

# Introduction à la logique mathématique

Code LO3, 6 ECTS, Semestre S3

**Prérequis :** Néant **Évaluation :** Contrôle continu et examen final

**Mentions concernées :** Mathématiques, mathématiques et informatique

**Horaires hebdomadaires :** 2 h CM + 3 h TD

## Résumé

Formalisation en calcul des prédicats. Opérations sur les ensembles et cardinalité. Calcul propositionnel : satisfaction, déduction, correction et complétude.

## Objectifs

Identifier et maîtriser les aspects logiques et ensemblistes du langage mathématique ; introduire aux notions de base de la logique (syntaxe, sémantique, déduction, ...) dans le contexte du calcul propositionnel.

## Programme

### 1 Analyse du discours mathématique

- Le langage du calcul des prédicats et la notion de structure sont introduits à partir d'exemples.
- Analyse du langage mathématique usuel ; expressions mathématiques, noms et énoncés ; variables, constantes ; connecteurs ; signes lieurs, quantificateurs ; quantification relativisée, quantificateurs liés à l'égalité (« il existe au plus un .. », « il existe un unique ... »). Définition, axiome, théorème, propriété, lemme, corollaire, ... Exemples de formalisation.
  - Usage des connecteurs et quantificateurs : équivalences classiques, règles d'inférence.
  - exemples de structures et de théories ; distinction entre premier et second ordre ; arithmétique (récurrence).

### 2 Opérations ensemblistes

Opérations booléennes sur les ensembles, inclusion, propriétés, lien avec le calcul propositionnel ; produit cartésien, relations, fonctions ; familles indexées d'ensembles et de fonctions et opérations sur celles-ci (intersection et réunion infinies, ...).

### 3 Introduction à la cardinalité

Définition (ensembles en bijection) ; cardinalité finie : principe des tiroirs et variantes ; cardinalité infinie : ensembles dénombrables,  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Q}$  sont dénombrables ; méthode diagonale  $\mathbb{R}$  n'est pas dénombrable (le théorème de Cantor-Bernstein peut être admis).

### 4 Calcul propositionnel

Définition inductive de l'ensemble des formules propositionnelles ; définition et démonstration par induction sur l'ensemble des formules ; définition de la satisfaction. Tautologies, conséquence sémantique. Méthode de réfutation (approche non formelle). Formes normales disjonctives et conjonctives ; systèmes complets. Formalisation en calcul propositionnel. Étude d'un système de déduction (au choix) : correction et complétude (cas dénombrable). Compacité.