

Algèbre et analyse élémentaires I

Code MM1, 9 ECTS, Semestre S1

Prérequis : — **Évaluation :** Contrôle continu et examen final. Évaluation commune à 75% et différenciée à 25% suivant les mentions concernées.

Mentions concernées : Mathématiques, MIAHS, Info, Physique, Chimie

Horaires hebdomadaires : 3 h CM + 4,5 h TD ou 6h CTD

Objectifs

Utiliser les nombres complexes dans différents contextes. Maîtriser les notions de base associées aux fonctions, s'initier aux rudiments de l'Algèbre linéaire. En Licence Mathématiques : commencer les raisonnements d'Analyse.

Programme

1 Étude de fonctions

Durée. 2 semaines pour Math et Math-Info, 3 semaines pour les autres mentions.

Objectif. Être capable de donner l'allure de la courbe représentative d'une fonction obtenue à partir de fonctions usuelles.

Commentaire. Il s'agit avant tout d'un objectif *pragmatique*. On se limitera donc aux aspects intuitifs des notions abordées (limites, continuité, dérivabilité). En Licence de Mathématiques, les notions de limite, continuité et dérivabilité seront abordées rigoureusement en S2. On pourra donner quelques définitions théoriques pour les groupes plus avancés.

Convention. Une *fonction* n'est pas nécessairement définie sur tout son ensemble de départ, contrairement à une *application*.

Contenu.

1. Fonctions réelles d'une variable réelle : ensemble de départ et ensemble de définition, ensemble d'arrivée et image, courbe représentative.
2. Parité, périodicité.
3. Fonctions usuelles : polynomiales, rationnelles, cosinus, sinus, tangente, fonctions puissances, fonctions logarithmiques.
4. Composée de fonctions.
5. Limites, asymptotes, dérivabilité, dérivées secondes, convexité, concavité, tracé des courbes représentatives.

2 Nombres complexes

Durée. 3 semaines.

Contenu.

1. Rappels de Terminale.
 - (a) Partie réelle et imaginaire. Conjugué. Module, inégalité triangulaire. Affixe d'un point ou d'un vecteur du plan muni d'un repère orthonormé.
 - (b) Somme et produit de deux nombres complexes. Inverse d'un nombre complexe non nul.
 - (c) Argument d'un nombre complexe. Forme trigonométrique et notation exponentielle.
 - (d) Transformations géométriques du plan : translation, homothétie, rotation.
2. Racines carrées d'un nombre complexe. Résolution des équations du second degré à coefficients complexes (à coefficients réels en Terminale).
3. Racines n^e de l'unité, racines primitives.
4. Formules d'Euler $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ et formule de Moivre $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ pour $n \in \mathbb{Z}$.
5. Formule du binôme.
6. Applications à la trigonométrie : formules d'addition du cosinus et du sinus, linéarisation, formules de duplication.

3 Introduction à l'algèbre linéaire

Durée. 3 semaines.

Objectif. Être à l'aise avec l'algèbre linéaire en petite dimension.

Commentaire. Comme pour le cours sur les fonctions il s'agit avant tout d'un objectif *pragmatique* : la théorie est vue en S2. Pour les groupes plus avancés on pourra donner quelques définitions théoriques, notamment la définition d'espace vectoriel.

- Contenu.**
1. Résolution de systèmes linéaire, pivot de Gauss.
 2. Définition de \mathbb{R}^n , opérations dans \mathbb{R}^n
 3. Sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n . Droites, plans, hyperplans. Passage entre représentation paramétrique et équations cartésiennes.
 4. Somme et intersection de *sev*, combinaisons linéaires, *sev* engendré par une partie, famille libre et famille génératrice, base d'un *sev*, dimension (on admet le théorème de la dimension)
 5. Changement de base en dimension 2.

4 Propriétés de \mathbb{R} et suites numériques

Durée. 4 semaines pour Math et Math-Info, 3 semaines pour les autres mentions.

Objectif. Apprendre les raisonnements fins en analyse. On prendra du temps pour les démonstrations en cours qui seront retravaillées en TD sous la forme d'exercices (c'est la nouveauté par rapport au précédent programme qui ne mettait pas l'accent sur les démonstrations en TD).

Remarques pour les mentions Physique, CPEI, Chimie et STEP. Suivant le temps, on pourra ajouter "Ensembles et applications", notions abordées dans l'UE *Raisonnements mathématiques* pour les autres mentions.

- Contenu.**
1. L'ensemble des réels est un corps ordonné : propriétés d'ordre de \mathbb{R} , valeur absolue, intervalles, majorant, minorant.
 2. Borne supérieure et borne inférieure. Définitions, théorème de la borne supérieure et de la borne inférieure (admis). Caractérisation des intervalles de \mathbb{R} par la convexité.
 3. Partie entière.
 4. Voisinages. Densité de \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans \mathbb{R} .
 5. Suites : définition de la limite finie d'une suite de nombres réels ou complexes. cas d'une limite $\pm\infty$ dans le cas réel.
 6. Unicité de la limite, opérations sur les limites. Limites et inégalités, théorème des gendarmes.
 7. Suites bornées, suites monotones, toute suite monotone et bornée est convergente, suites adjacentes.
 8. Sous-suites, théorème de Bolzano-Weierstrass.