université
PARIS DIDEROT
PARIS 7

2018-2019

Master 2^e année de Mathématiques Fondamentales

Responsable pédagogique : Marc Rosso

http://www.math.univ-paris-diderot.fr/formations/masters/math/m2-mathfonda

Table des matières

Notre offre de cours a été établie en concertation avec le M2 Mathématiques Fondamentales de Sorbonne Université. Nous indiquons pour chaque période, des cours dont les thématiques complètent bien notre liste.

Cours de base (1er semestre)

Réunion d'information le 7 septembre 2018 à 10h salle 1021 bâtiment Sophie Germain.
Début des cours le lundi 10 septembre 2018
Cours de 4 heures hebdomadaires (sauf cas particulier), groupes de travail de 2 heures hebdomadaires.

Algèbre homologique	Christian Ausoni (P13)
Introduction à la géométrie sous-riemannienne	Davide Barilari
Combinatoire	Guillaume Chapuy
Théorie du corps de classe	Pierre-Henri Chaudouard
Introduction à la théorie analytique des nombres	Régis de La Bretèche
Introduction à l'analyse micro-locale	Jean-Marc Delort (P13)
Propriétés d'approximations des groupes et algèbres de von Neumann	Pierre Fima
Introduction aux équations aux dérivées partielles	Gilles Francfort (P13)
Algèbres de Lie semi-simples et leurs représentations	Bernhard Keller
Représentations des groupes finis et invariants tensoriels	Marc Rosso
Algèbres d'opérateurs	Georges Skandalis
Algèbre homotopique	Bruno Vallette (P13)

Les cours suivants du M2 de Mathématiques Fondamentales de Sorbonne Université complètent bien les thématiques de notre liste : Introduction à la géométrie algébrique, Géométrie différentielle et riemannienne, Géométrie complexe et théorie de Hodge, Introduction aux formes modulaires, Systèmes dynamiques I, Introduction à l'arithmétique des courbes elliptiques, Introduction à la théorie des schémas, Topologie algébrique.

Cours spécialisés (2e semestre)

début des cours : 7 janvier 2019
Cours de 4 heures hebdomadaires

Courbe adélique et géométrie d'Arakelov birationnelle	Huayi Chen
Les surfaces K3	Olivier Debarre
Catégorification en théorie de Lie	Olivier Dudas
Méthode de Nash-Moser et EDP non-linéaires	David Gérard-Varet
Variétés de Shimura	Michael Harris
Introduction à la théorie mathématique de la relativité générale	Paul Laurain
Sous-algèbres maximales et équivalence orbitale	François Le Maître
Systèmes dynamiques en géométrie topologie et physique	Anton Zorich

Les cours suivants du M2 de Mathématiques Fondamentales de Sorbonne Université complètent bien les thématiques de notre liste : Combinatoire des polytopes, Systèmes dynamiques II, Introduction aux schémas II, Géométrie algébrique des objets combinatoires.

Tableau des cours par filières

Algèbres d'opérateurs, géométrie non commutative :			
Propriétés d'approximations des groupes et algèbres de von Neumann	Pierre Fima	1er semestre	9 ECTS
Sous-algèbres maximales et équivalence orbitale	François Le Maître	2e semestre	9 ECTS
Algèbres d'opérateurs	Georges Skandalis	1er semestre	9 ECTS
Topologie algébrique			
Algèbre homologique	Christian Ausoni	1er semestre	9 ECTS
Algèbre homotopique	Bruno Vallette	1er semestre	9 ECTS
Algèbre, groupes et représentations :			
Catégorification en théorie de Lie	Olivier Dudas	2e semestre	9+9 ECTS
Algèbres de Lie semi-simples et leurs représentations	Bernhard Keller	1er semestre	9+9 ECTS
Représentations des groupes finis et invariants tensoriels	Marc Rosso	1er semestre	9 ECTS
Combinatoire			
Combinatoire	Guillaume Chapuy	1er semestre	9+9 ECTS
Analyse physique mathématique, EDP :			
Méthode de Nash-Moser et EDP non-linéaires	David Gérard-Varet	2e semestre	9 ECTS
Géométrie et dynamique :			
Introduction à la géométrie sous-riemannienne	Davide Barilari	1er semestre	9 ECTS
Introduction à la théorie mathématique de la relativité générale	Paul Laurain	2e semestre	9 ECTS
Géométrie et dynamique (d'après les travaux de M. Mirzakhani)	Anton Zorich	2e semestre	9 ECTS
Théorie des nombres :			
Théorie du corps de classe	Pierre-Henri Chaudouard	1er semestre	9+9 ECTS
Introduction à la théorie analytique des nombres	Regis de la Bretèche	1er semestre	9 ECTS
Géométrie algébrique et théorie des nombres :			
Courbe adélique et géométrie d'Arakelov birationnelle	Huayi Chen	2e semestre	9+9 ECTS
Formes automorphes			
Variétés de Shimura	Michael Harris	2e semestre	9 ECTS
Géométrie algébrique			
Les surfaces K3	Oliver Debarre	2e semestre	9 ECTS
EDP			
Introduction à l'analyse micro-locale	Jean-Marc Delort	1er semestre	9 ECTS
Introduction aux équations aux dérivées partielles	Gilles Francfort	1er semestre	9 ECTS

Les renseignements administratifs

Les contacts

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Le responsable de la formation :

Marc ROSSO
marc.rosso@imj-prg.fr

01 57 27 92 11</td>
<td>Lui écrire

Université Paris Diderot – Paris 7
UFR de Mathématiques
Bâtiment Sophie Germain
Case 7012
75205 Paris cedex 13</td>
</tr>
<tr>
<td>Le rencontrer

Site Paris Rive Gauche (13ème)
Bâtiment Sophie Germain
8 place Aurélie Nemours
6ème étage, bureau 6017</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Le secrétariat
du Master 2 de
Mathématiques Fondamentales :

Catherine Prudlo
catherine.prudlo@univ-paris-diderot.fr

01 57 27 93 06</td>
<td>Correspondre

Université Paris Diderot – Paris 7
UFR de Mathématiques
Scolarité des Masters 2
Bâtiment Sophie Germain
Case 7012
75205 Paris cedex 13</td>
</tr>
<tr>
<td>S'y rendre

Site Paris Rive Gauche (13ème)
Bâtiment Sophie Germain
8 place Aurélie Nemours
5ème étage, bureau 5055</td>
</tr>
</table>

Le Calendrier 2018/2019

7 Septembre	Réunion d'information
10 septembre	Début des cours du 1er semestre
20 septembre	Date limite d'envoi des dossiers de candidature
15 octobre	Date limite pour l'inscription administrative auprès de la scolarité centrale (DEF)
15 octobre	Date limite pour l'inscription pédagogique auprès du secrétariat du M2 (indication des cours suivis)
Fin octobre	Session d'examens pour les cours de la 1ère partie du 1er semestre
Fin décembre	Session d'examen pour les cours de la 2e partie du 1er semestre
Janvier	Début des cours du 2e semestre et inscription pédagogique au secrétariat
Fin février	Session d'examens pour les cours de la 1ère partie du second semestre Choix du directeur de stage (convention de stage à établir en ligne)
Avril	Session d'examen pour les cours de la 2e partie du 2e semestre
Mai-Juin	Campagne de recrutement pour les contrats doctoraux
Fin Juin	Session de rattrapage
30 juin	Date limite de soutenance du rapport de stage pour la session 1
Début juillet	Attribution des contrats doctoraux
30 septembre	Date limite de soutenance du rapport de stage pour la session 2

L'inscription

Conditions d'inscription

La 2e année de Master (M2) se place normalement en 5e année des études universitaires.
L'accès en M2 est réservé aux étudiants titulaires :

- d'un master 1, d'une maîtrise de Mathématiques
- ou d'un diplôme équivalent sanctionnant 4 années d'études universitaires (diplômes universitaires étrangers, diplôme d'ingénieur, diplôme d'une Grande Ecole,…)

Modalités d'inscription

- ➢ Candidature des étudiants étrangers :
  Afin de faciliter la mobilité internationale, l'Université Paris Diderot adhère à l'Agence Campus France.
  Les étudiants étrangers relevant de la procédure CEF (consultation de la liste des pays concernés : http://www.campusfrance.org/fr/node/1246), doivent prendre connaissance de la procédure de candidature sur le site de Campus France : http://www.campusfrance.org/fr et doivent s'inscrire auprès de cet organisme avant mars 2018.

- ➢ Pour toutes les autres candidatures : les étudiants doivent déposer une demande de pré-inscription sur le site web : https://ecandidat.app.univ-paris-diderot.fr

  Dates limites de préinscription sur ecandidat :
  - Du 1 avril au 10 juillet (Les candidats qui ont besoin d'un avis par anticipation et/ou les candidats ayant déjà validé la partie théorique de leur formation doivent fournir un relevé provisoire de l'année en cours)
  - Du 25 août au 15 septembre 2018

Dates de retour du dossier

- Avant le 15 juillet 2018 pour un examen de votre dossier de candidature à la session de juillet
- Avant le 20 septembre 2018 pour un examen du dossier de candidature à la session de septembre.

Envoi	☺ Dépôt
Université Paris Diderot – Paris 7 UFR de Mathématiques Scolarité des Masters 2 Bâtiment Sophie Germain Case 7012 75205 Paris cedex 13	De 9 à 12 h et de 14 à 17 h du lundi au vendredi Site Paris Rive Gauche (13ème) Bâtiment Sophie Germain 8 place Aurélie Nemours 5ème étage, bureau 5055

Inscription administrative

Dans le cas d'une réponse favorable, l'étudiant recevra un mail et devra confirmer sa venue sur e-candidat. Il recevra alors la procédure en vue de l'inscription administrative auprès de la Direction des Études et de la Formation (DEF). Il devra se munir de toutes les pièces justificatives mentionnées dans ce message.

Date limite d'inscription administrative : 15 octobre 2018

Structure du Master 2

Partie théorique	• Trois UE dont au moins une UE Fondamentale (1er semestre) et une UE d'orientation (2e semestre). La troisième UE est choisie soit parmi les UE Fondamentales soit parmi les UE d'Orientation (9+9+9 = 27 ECTS)
Partie pratique	• Une UE de stage - 30 ECTS - sous la direction d'un enseignant ou chercheur d'un laboratoire associé : lecture et résumé d'articles de recherche récents, rédaction d'un mémoire, ou d'un cours...
UE d'ouverture	• Une UE d'ouverture - 3 ECTS - (au 1er ou 2e semestre)

Les cours de 9+9 ECTS sont enseignés pendant tout le semestre sur une base de 4 heures par semaine. Un examen au milieu du semestre permet de valider la moitié du cours (9 ECTS).

Les cours de 9 ECTS sont en général enseignés pendant la moitié du semestre sur une base de 4 heures par semaine. Certains cours de 9 ECTS sont enseignés pendant tout le semestre sur une base de 2 heures par semaine.

Le choix des cours

- **Les cours de base** doivent être choisis dans la liste des cours du M2 « Mathématiques Fondamentales ». Certains cours fondamentaux sont soutenus par un groupe de travaux dirigés dont les activités concourent à l'assimilation du cours de base et à la préparation de l'examen qui le sanctionne.

- **Les cours spécialisés** sont pris en principe dans la liste des cours spécialisés du M2 de Mathématiques Fondamentales.

  Ils peuvent également être choisis parmi les cours de M2 extérieurs, <u>sous réserve de l'accord préalable du responsable du M2</u>, et à condition de correspondre au même volume horaire.
  Voici une liste non restrictive de M2 extérieurs possibles :

  - M2 Mathématiques Fondamentales à Paris 6
  - M2 Mathématiques Pures à Paris 11
  - M2 Mathématiques à Paris 13

  Il existe d'autres possibilités parmi divers cours de M2 de la région parisienne.

- **L'unité d'ouverture** correspond à des activités complémentaires choisies <u>en accord avec le responsable du M2</u>. Parmi les possibilités : exposé oral et/ou écrit dans le cadre d'un groupe de travail, rapport écrit et/ou oral ou séminaire « extérieur », etc.

L'étudiant devra informer régulièrement le Secrétariat du M2 de l'UFR de Mathématiques de ses choix (cours de base, cours spécialisé, directeur de stage, demande d'allocation de recherches…). Il devra particulièrement le faire en début de second semestre pour l'indication des cours spécialisés, de l'unité d'ouverture et du directeur de stage.

Modalités du contrôle des connaissances

Pour obtenir le diplôme de Master, l'étudiant doit être reçu à chacune des cinq épreuves composant son diplôme, soit :

Partie théorique	Partie pratique	Ouverture
1 UE fondamentale 9 ECTS 1 UE d'orientation 9 ECTS 1 UE fondamentale ou d'orientation 9 ECTS	Stage 30 ECTS	UE d'ouverture 3 ECTS

Chaque cours de la partie théorique est sanctionné par des épreuves écrites, de 3 heures, accompagnées, le cas échéant, si la note d'écrit, sur 20, est ≥ 8, et < 10, d'un oral de rattrapage.

Pour chaque cours, la note finale est donnée sur 20.

Seules sont prises en compte dans cette évaluation les UE pour lesquelles la note obtenue est ≥ 10.

Les dates et les horaires des examens sont disponibles sur le site du M2, un mois auparavant. Il n'y a pas de convocation individuelle.

Le stage (en général d'une durée de 3 mois) donne lieu :

- à la rédaction d'un mémoire
- à une soutenance orale devant un collège comprenant au moins 2 membres habilités à diriger des recherches.

Il fait l'objet d'un rapport du directeur de stage et est sanctionné par une note sur 20.

La soutenance doit :

- Se dérouler avant le 30 juin pour une prise en compte de la note en session 1 ;
- Se dérouler avant le 30 septembre pour une prise en compte de la note en session 2.

Le M2 est délivré avec pour note globale la « moyenne pondérée » des notes obtenues dans chacune des catégories d'UE ci-dessus. Dans chaque catégorie, seules sont conservées pour le calcul, des notes correspondant au nombre d'ECTS requis. La note globale est sur 20.

Bourse et/ou logement en résidence universitaire

Le ministère chargé de l'Enseignement supérieur accorde aux étudiants un certain nombre d'aides gérées par le Crous, en lien avec les universités : bourses sur les critères sociaux, aides financières particulières, prêt étudiant garanti par l'État, l'aide au mérite…

Pour de plus amples informations, vous pouvez consulter :

- les différents types de bourses et les aides financières :
https://etudes-formations.univ-paris-diderot.fr/bourses-et-aides-financieres-0

- le CNOUS : http://www.etudiant.gouv.fr/pid33797/cnous-crous.html

- l'accompagnement au sein de Paris Diderot :
https://universite.univ-paris-diderot.fr/accompagnement-au-sein-de-paris-diderot

Bibliothèque, groupes de travail

Bibliothèque

La bibliothèque Mathématiques Informatique Recherche :
http://www.biblio.math.jussieu.fr
située dans le bâtiment Sophie Germain, 8e étage, 8 Place Aurélie Nemours, 75013 Paris est à la disposition des étudiants du M2. Il est également possible d'emprunter un Ipad à domicile pour une durée d'un mois, renouvelable un mois.

Groupes de travail

Des groupes de travail et séminaires d'initiation à la recherche sont organisés dans certains domaines et les étudiants sont vivement invités à y participer.

Écoles d'été

Les étudiants peuvent être amenés à suivre d'autres activités d'initiation à la recherche : écoles d'été, congrès, séminaires…

Le Doctorat de mathématiques

Le doctorat débute normalement en 6e année des études universitaires et s'adresse aux étudiants titulaires d'un M2 ou d'un titre de niveau équivalent.

La durée conseillée des études doctorales est de 3 ans.
Une année supplémentaire peut être accordée après examen du dossier (incluant un rapport du directeur de thèse prouvant l'avancement des travaux) et autorisation du Directeur de thèse, du Directeur de l'Ecole Doctorale et du Président de l'Université.

Le contrat doctoral

Le dossier de candidature est à remettre au secrétariat de l'Ecole Doctorale de Paris Centre avant la mi-juin 2018 (bâtiment Sophie Germain, 5ème étage, bureau 5056 pour les candidatures de Paris Diderot).

Les résultats des attributions des contrats doctoraux seront annoncés début juillet 2019.

Modalités d'inscription en thèse de doctorat à l'Université Paris Diderot

Les étudiants titulaires du M2 peuvent, l'année suivante, s'inscrire en Diplôme de Doctorat de Mathématiques après avoir au préalable obtenu l'accord d'un Directeur de recherche et du Directeur de l'École Doctorale. Afin de candidater pour une inscription en doctorat, ils devront se connecter sur le site web suivant : https://ecandidat.app.univ-paris-diderot.fr

Pour l'examen de leurs demandes, les étudiants devront déposer auprès du Bureau de l'École Doctorale (Bureau 5056) de juin à octobre environ, les documents suivants :

- Une lettre exposant la nature de la recherche envisagée et le projet de thèse.
- Un curriculum vitae détaillé.
- Une lettre de recommandation rédigée par l'enseignant du M2 (ce point ne concerne pas les étudiants qui ont obtenus le M2 à Paris 7).
- Le détail des résultats obtenus en M2 (aux examens et au stage, avec indication des enseignants et des intitulés correspondants).
- L'attestation de M2 (provisoire ou définitive) délivrée par l'université d'origine.
- L'attestation de financement.

A titre indicatif pour l'année 2018-2019 :

- Date limite des inscriptions administratives : 16 novembre 2018

Programme des Cours de base

Homology Theroy (9 ECTS)

Christian Ausoni (Université Paris 13)
1er semestre

Program

In this lecture course, we will begin by introducing basic category theory, chain complexes and elementary homological algebra, including resolutions and the derived functors Tor and Ext.

We will then define and study the singular homology and cohomology of spaces, review the Eilenberg-Steenrod axioms, as well as the Kunneth and universal coefficient theorems. The end of the lecture will be dedicated to the cup product and Poincaré duality.

References

[Hat02] A. Hatcher, ***Algebraic Topology***, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
[M92] J. P. May, ***A concise course in algebraic topology***, Chicago Lectures in Maths, University of Chicago Press, 1992.
[ML95] S. Mac Lane, ***Homology***, Classics in Mathematics, reprint of the 1975 edition, Springer, 1995.
[ML98] S. Mac Lane, ***Categories or the working mathematician***, Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 5, Springer, 1998.
[tD08] T. tom Dieck, ***Algebraic Topology***, EMS Textbook in Mathematics, 2008.
[Wei94] Ch. Weibel, ***An introduction to homological algebra***, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

Introduction à la géométrie sous-riemannienne (9 ECTS)

Davide Barilari

1er semestre

Présentation

On propose une introduction à la géométrie sous-riemannienne, notamment autour des questions de l'existence, caractérisation et régularité des géodésiques sous-riemanniennes. On introduira notamment le formalisme hamiltonien, qui est le langage naturel pour traiter ce genre de problèmes.

Programme

- Le problème isopérimétrique et le groupe de Heisenberg
- Distributions vectorielles : théorèmes de Frobenius et de Rashewskii-Chow
- Distance sous-riemannienne : définitions et propriétés fondamentales
- Géodésiques : existence et conditions nécessaires du premier ordre
- Géométrie symplectique et formulation hamiltonienne : géodésiques normales et anormales
- Les géodésiques normales sont lisses et localement minimizantes
- Autour de la régularité des géodésiques anormales et problèmes ouverts.

Connaissances requises

Connaissances de base de géométrie différentielle. Il n'est pas strictement nécessaire d'avoir suivi un cours de géométrie riemannienne.

Bibliographie

-- Référence principale :

Notes de cours :

[1] Agrachev, D. Barilari, U. Boscain - Introduction to geodesics in sub-Riemannian geometry
Chapitre dans "Geometry, Analysis and Dynamics in SR manifolds, vol.II", EMS Lecture Notes series (2016).

Ces notes de cours publiées sont une partie d'un livre en cours de publication, dont une version préliminaire est disponible à la page web : https://webusers.imj-prg.fr/~davide.barilari/Notes.php

-- Autres références:

[1] A. Bellaiche, The tangent space in sub-Riemannian geometry, in: Bellaïche A., Risler JJ. (eds) Sub-Riemannian Geometry. Progress in Mathematics, vol 144. Birkhäuser Basel.

[2] F. Jean, Control of Nonholonomic Systems : from Sub-Riemannian Geometry to Motion Planning, Springerbriefs in Mathematics, 2014.

[3] R. Montgomery, A tour in sub-Riemannian geometries, their geodesics and applications, vol. 91 of Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI (2002).

[4] L. Rifford, Sub-Riemannian Geometry and Optimal Transport, Springerbriefs in Mathematics, 2014.

Combinatoire (9+9 ECTS)

Guillaume Chapuy

1er semestre

Présentation

Ce cours a pour but de présenter une introduction générale à la combinatoire, et à la combinatoire énumérative en particulier. La plupart des étudiants n'ayant eu qu'un contact très bref voire nul avec la combinatoire, nous commencerons par les bases : arguments de double comptage, démonstrations bijectives d'identités combinatoires, techniques de résolutions d'équations de récurrence à base de séries génératrices, méthodes d'inclusion-exclusion. En nous concentrant sur les objets classiques de la combinatoire (arbres, mots chemins, tableaux), nous développerons néanmoins des méthodes générales qui ensemble forment la combinatoire énumérative : combinatoire symbolique, combinatoire analytique, combinatoire des chemins et des langages algébriques et rationnels, tout en abordant des techniques plus avancées. Nous aborderons également la théorie des fonctions symétriques et ses liens avec les tableaux de Young et la théorie des représentations du groupe symétrique, en proposant des applications à la résolution de problèmes de comptage pour des nombres de Hurwitz, ainsi que pour des modèles de physique statistique comme les matrices à signes alternants via les équations de Yang-Baxter. Certains des développements suggérés dans le plan pourront être donnés sous forme de travail personnel aux étudiant.e.s motivé.e.s.

Le cours sera constitué de deux modules consécutifs de 24 heures destinés à être suivis ensemble.

Programme

- Concepts de base, coefficients binomiaux, principes d'énumération élémentaires.
- Séries formelles, combinatoire symbolique. Langages réguliers, séries rationnelles et algébriques.
- Combinatoire des chemins, inversion de la Lagrange, lemme cyclique.
- Encore des fonctions génératrices : partitions, q-séries, quelques mots sur les séries hypergéométriques.
- Méthodes de crible. Inclusion-Inclusion et applications. Combinatoire déterminantale, lemme de Gessel-Viennot, théorème matrix-tree.
- Jardin de Catalan, arbres et bijection classiques.
- Introduction aux fonctions symétriques, algorithme RSK, opérateurs de vertex et espace de Fock, application aux modèles de pavages. Tableaux standard et formule des équerres.
- Rappels de théorie des représentations des groupes finis. Formule de Frobenius et application à l'énumération de graphes plongés.
- Équation de Yang-Baxter et matrices à signes alternants.

Bibliographie

[1] Martin Aigner, A Course in Enumeration, Berlin : Springer, c2007.

[2] Philippe Flajolet and Robert Sedgewick, Analytic combinatorics, Cambridge ; New York : Cambridge University Press, 2009.

[3] Richard Stanley, Enumerative Combinatorics, Volume 2, New York : Cambridge University Press, 2012.

La théorie du corps de classes (9+9 ECTS)

Pierre-Henri Chaudouard

1er semestre

Présentation

Le but du cours est d'énoncer les principaux résultats de la « théorie du corps de classes » et d'en donner une démonstration aussi complète que possible dans le temps imparti. Le but de cette théorie est d'obtenir une description des extensions abéliennes d'un corps local ou global en terme de l'arithmétique de ce corps. Le contenu du cours sera utile à tout étudiant intéressé par la théorie des nombres, la géométrie arithmétique ou les formes automorphes.

Cours I. (9 ECTS, septembre-octobre)

Le but du cours I est d'introduire les principaux objets qui vont intervenir dans l'énoncé et de démontrer au passage quelques théorèmes classiques de théorie algébrique des nombres. Il a donc un intérêt indépendamment du cours II.

Programme

- Valeurs absolues, complétions, corps locaux,
- Théorème d'Ostrowski, corps globaux, anneau des adèles,
- Compacité des classes d'adèles, dualité de Pontryagin, série de Fourier, formule sommatoire de Poisson,
- Idèles d'un corps global, compacité des classes d'idèles. Applications : finitude du groupe de classes, théorème des unités,
- Thèse de Tate.

Connaissances requises

Une familarité avec l'algèbre commutative de base (anneaux, idéaux, modules, corps, localisation, quotients, anneaux de Dedekind). Quelques notions de théorie de Galois sont les bienvenues. On utilisera des notions élémentaires d'analyse complexe et d'analyse de Fourier.

Bibliographie

[1] J. Cassels -J.Fröhlich, Algebraic number theory
[2] S. Lang, Algebraic number theory
[3] D. Ramakrishnan, R. Valenza Fourier Analysis on Number Fields
[4] J-P Serre Corps locaux
[5] A. Weil Basic Number theory

Cours II. (9 ECTS, novembre-décembre)

Programme

- Notions de cohomologie des groupes,
- La première inégalité fondamentale ; conséquences,
- La seconde inégalité fondamentale ; conséquences,
- Loi de réciprocité d'Artin ; énoncé, preuve,
- Le théorème d'existence,
- Applications (corps de classes de Hilbert, théorème de Kronecker-Weber …).

Connaissances requises

Cours I + prérequis du cours I.

Bibliographie

[1] E. Artin. J. Tate Class field theory
[2] J. Cassels -J.Fröhlich, Algebraic number theory
[3] S. Lang, Algebraic number theory
[4] J. Milne Class field theory
[5] J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg Cohomology of Number fields
[6] D. Ramakrishnan, R. Valenza Fourier Analysis on Number Fields
[7] J-P Serre Corps locaux
[8] A. Weil Basic Number theory

Une introduction à la théorie analytique des nombres (9 ECTS)

Régis de La Bretèche

1er semestre

Présentation

Ce cours consiste en une initiation courte à la théorie analytique des nombres. Ce domaine se situe à l'interface avec beaucoup d'autres domaines des mathématiques : formes modulaires, géométrie algébrique, combinatoire ... Il s'agit de donner quelques repères (on démontrera le théorème des nombres premiers) et on évoquera quelques développements très récents sur les fonctions sommatoires de fonctions multiplicatives.

Mots clés

- fonction arithmétique
- théorème des nombres premiers
- fonctions sommatoires de fonctions multiplicatives
- série de Dirichlet

Bibliographie

[4] Tenenbaum, Introduction à la théorie analytique et élémentaire des nombres, Belin (il y a une version anglaise à l'AMS)

[5] Davenport, Multiplicative Number Theory

[6] Iwaniec et Kowalski, Analytic Number Theory

Introduction à l'analyse micro-locale (9 ECTS)

Jean-Marc Delort (Université Paris 13)

1er semestre

Programme

1. Analyse de Fourier et espaces fonctionnels : Rappels de notations sur les distributions, Espaces de Sobolev. Théorie de Littlewood-Paley, caractérisation des espaces de Sobolev.
2. Front d'onde des distributions. Intégrales oscillantes. Définition de la classe de symboles $S^m{}_{1,0}$. Exemple des distributions lagrangiennes.
3. Définition des opérateurs pseudo-différentiels (globalement sur $\mathbb{R}^d$). Calcul symbolique.
4. Action des opérateurs pseudo-différentiels sur les espaces de Sobolev.
5. Opérateurs pseudo-différentiels et front d'onde. Régularité elliptique microlocale. Inégalité de Gårding faible.
6. Propagation des singularités pour les opérateurs pseudo-différentiels à symbole principal réel.
7. Existence des solutions pour des équations d'onde linéaires (à coefficients variables). Inégalités d'énergie.
8. Éléments d'analyse microlocale semi-classique : h front d'onde, opérateurspseudo-diffétrentiels semi-classiques et leur calcul symbolique.

Parcours algèbres d'opérateurs, théorie géométrique et mesurée des groupes (9 ECTS)

Pierre Fima, François Le Maître et Georges Skandalis

1er & 2e semestre

Présentation

Un parcours dans la filière algèbres d'opérateurs, géométrie non commutative contenant 3 cours de 9 ECTS chacun est proposé. Ce parcours s'appuie sur les liens profond existant entre les algèbres d'opérateurs, la théorie géométrique et la théorie mesurée des groupes discrets dénombrables.

Les algèbres d'opérateurs, introduites par Murray et von Neumann entre 1940 et 1950 dans l'optique de formaliser les concepts de la mécanique quantique, ont connu des progrès spectaculaires, en lien avec la théorie ergodique et la théorie des groupes, ces 15 dernières années. Ce parcours présentera quelques uns de ces résultats très récents ainsi que les techniques modernes qui permettent de les obtenir.

Le premier cours de ce parcours est une introduction aux algèbres d'opérateurs : C*-algèbres et algèbres de von Neumann. Dans le second cours, différentes propriétés d'approximations pour les groupes et algèbres de von Neumann, dont l'utilisation permet d'obtenir des résultats surprenant de rigidité, seront présentées et étudiées en détails. Enfin, le dernier cours portera sur les sous algèbres abéliennes maximales d'une algèbre de von Neumann finie. On étudiera en détail le lien entre ces dernières et les actions préservant une mesure de probabilité de groupes dénombrables. Plusieurs résultats profonds, tels que l'unicité de la Cartan dans le facteur hyperfini II1 (Connes-Feldman-Weiss, 1981) et la trivialité du groupe fondamental de L(SL2(Z)nZ2) (Popa, 2001), seront démontrés.

Programme

1. Algèbres d'opérateurs – G. Skandalis (9 ECTS), septembre-octobre.

- C*-algèbres, algèbres de von Neumann, exemples.
  - Le théorème de bicommutant de von Neumann
  - C*-algèbres et théorie de Gelfand
  - Exemples d'algèbres de von Neumann
- Algèbres de von Neumann finies
  - Classification des facteurs en types
  - Facteurs de type II1 et trace
  - Exemples de facteurs de type II1.

2. Propriétés d'approximations des groupes et algèbres de von Neumann – P. Fima (9 ECTS), novembre-décembre.

- Bimodules sur les algèbres de von Neumann finies.
- Groupes moyennables, algèbres de von Neumann hyperfinies, le facteur hyperfini II1.
- Propriété de Haagerup et moyennabilité faible.
- Propriété (T), (T) relative, SL2(Z) n Z2.

3. Sous-algèbres maximales abéliennes et équivalence orbitale – F. Le Maître (9 ECTS), janvier-février.

- Masas dans les facteurs II1 :
  - Types: Cartan, semi-régulier, singulier.
  - Exemples en provenance des groupes.

– Invariant de Pukanzky.

- Théorie ergodique et masas

– Bases de la théorie spectrale des transformations préservant une mesure de probabilité, exemples.
– Masa associée à une transformation p.m.p., conjecture de Neshveyev-Størmer.
– Construction d'une relation d'équivalence p.m.p. à partir d'une Cartan. Equivalence orbitale.
– Toute relation d'équivalence moyennable est hyperfinie (Connes-Feldman-Weiss). Unicité de Cartan dans le facteur hyperfini II1.

- Coût et trivialité du groupe fondamental de L(SL2(Z) n Z2)

– Relations d'équivalence p.m.p., exemples en provenance d'actions de groupes.
– Coût des relations d'équivalence p.m.p., coût des produits amalgamés (Gaboriau).
– Trivialité du groupe fondamental de L(SL2(Z) n Z2) (Popa).

Connaissances requises

Une connaissance de l'analyse fonctionnelle de M1 est utile.

Bibliographie

Partie I : Un polycopié sera distribué pour la Partie I.

[1] J. Dixmier, Les C*-algèbres et leurs représentations.
[2] J. Dixmier, Les algèbres de von Neumann dans l'espace hilbertien.
[3] G. J. Murphy, C*-algebras and operator theory.
[4] M. Takesaki, Theory of operator algebras. I.

Partie II :

[1] V. Jones et V.S. Sunders, Introduction to subfactors.
[2] N. Brown et N. Ozawa, C*-algebras and Finite-Dimensional Approximations.
[3] B. Bekka, P. de la Harpe et A. Valette, Kazhdan's Property (T).

Partie III :

[1] A.M. Sinclair et R.R. Smith, Finite von Neumann algebras and masas.
[2] A.S. Kechris et B. Miller, Topics in orbit equivalence.
[3] C. Anantharaman et S. Popa, An introduction to II1 factors.

Introduction aux EDP (9 ECTS)

Gilles Francfort (Université Paris 13)
1^{er} semestre

Programme

Après avoir rapidement passé en revue les équations classiques (transport, Laplace, chaleur et onde) je traiterai tout ou partie, en fonction de la vitesse à laquelle se déroule le cours, des sujets suivants :

1. Les équations non linéaires du premier ordre : Hamilton-Jacobi et lois de conservation
2. La theorie Sobolev des équations linéaires : espaces de Sobolev, ellipticité, équations d'évolution et semi-groupes
3. Les méthodes variationnelles notamment pour les équations elliptiques semi-linéaires
4. Les méthodes de point fixe
5. Les flots-gradient
6. Les solutions de viscosité pour Hamilton-Jacobi
7. Les systèmes de lois de conservation.

Connaissances requises

Une connaissance des bases de l'intégration et des distributions sera requise ; une petite familiarité avec les Sobolev sera un plus.

Bibliographie

Ma référence de base sera le livre de L.C. Evans intitulé Partial Differential Equations.

Algèbres de Lie semi-simples complexes et leurs représentations (9+9 ECTS)

Bernhard Keller

1er semestre

Programme

Algèbres de Lie, idéaux, homomorphismes, représentations, algèbres résolubles, algèbres nilpotentes, forme de Killing, algèbres semi-simples, décomposition en idéaux simples, semi-simplicité des représentations, représentations de sl2, sous-algèbres de Cartan, systèmes de racines, groupe de Weyl, classification des systèmes de racines, algèbre enveloppante, algèbre de Lie libre, théorème d'existence et d'unicité pour une algèbre de Lie au système de racines donné, plus hauts poids, modules de Verma, modules simples, formule de Weyl.

Bibliographie

[1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4 {6, Masson 1981.

[2] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier{Villars 1974.

[3] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer 1972.

[4] R. Mneimné, Réduction des endomorphismes, Calvage et Mounet 2006.

[5] [R. Mneimné, F. Testard, Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques, Hermann 1986.

[6] J.-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin 1966.

[7] V. S. Varadarajan, Lie groups, Lie algebras and their representations, Prentice Hall 1974.

Représentations des groupes finis, algèbres semi-simples, invariants tensoriels (9 ECTS)

Marc Rosso

1er semestre

Présentation

L'objectif de ce cours est de donner une introduction à la théorie des représentations des algèbres semi-simples, en particulier des algèbres de groupes finis, et d'étudier plus précisément celles des groupes symétriques en interaction avec le groupe linéaire.

Programme

- Algèbres semi-simples; théorème du bicommutant
- Représentations linéaires des groupes finis (caractéristique nulle) ; Induction; formule de McKay
- Représentations linéaires du groupe symétrique
- Structure d'algèbre de Hopf sur la somme des groupes de Grothendieck et application aux fonctions symétriques (à la Zelevinsky)
- Représentations de GL(V) et dualité de Schur-Weyl
- Invariants tensoriels et théorème fondamental pour le groupe linéaire.

Bibliographie

[1] Serre, J-P : Représentations linéaires des groupes finis, Hermann.

[2] Goodmann, R –Wallach, N : Symmetry, Representations and Invariants, Graduate Texts in Mathematics 255, Springer Verlag.

[3] Fulton, W - Harris, J : Representation Theory, Graduate Texts in Mathematics 129, Springer Verlag.

[4] Zelevinsky, A : Representations of finite classical groups, a Hopf algebra approach, Lecture Notes in Mathematics 869, Springer Verlag.

Homotopy Theory (9 ECTS)

Bruno Vallette (Université Paris 13)

1er semestre

Program

The goal of this lecture will be to present various “concrete” homotopy theories. We will start with the classical homotopy theory of topological spaces (higher homotopy groups, cellular complexes, Whitehead and Hurewicz theorems, Eilenberg—MacLane spaces, fibrations, and Postnikov towers). Then we will move to the homotopy theory of simplicial sets (definitions, simplex category, adjunction and cosimplicial objects, examples, fibrations, Kan complexes, and simplicial homotopy). Finally, we will study the rational homotopy theory via the homotopy theory of differential graded Lie or commutative (co)algebras (Sullivan approach : minimal model, Quillen approach : Whitehead Lie bracket, bar and cobar constructions, complete Lie algebra-Hopf algebras-groups).
This presentation opens the door to the axiomatic treatment of homotopy theory done by Quillen and treated in details in the next course « Homotopical Algebra » (Grégory Ginot, Paris 13).

Prerequistes

Basic notions of category theory, chain complexes, exact sequence, singular (co)homology (all being covered by the previous course « Homology Theory »).

References

[FHT01] Y. Félix, S. Halperin, and J.-C. Thomas. ***Rational homotopy theory***, Graduate Texts in Mathematics, 205, Springer, 2001.
[GJ99] P. G. Goerss and J. F. Jardine, ***Simplicial homotopy theory***, reprint of the 1999 edition, Birkhauser, 2009.
[GM13] P. Grifiths, J. Mornan, ***Rational Homotopy Theory and Differential forms***, second edition, Birkhauser, 2013.
[Hat02] A. Hatcher, ***Algebraic Topology***, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
[Whi78] G. Whitehead, ***Elements of homotopy theory***, Graduate Texts in Mathematics,61. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978.

Programme des Cours spécialisés

Courbe adélique et géométrie d'Arakelov birationnelle (9+9 ECTS)

Huyai Chen

2e semestre

Présentation

Le but de ce cours est de présenter des avancements récents sur la géométrie d'Arakelov birationnelle. La géométrie d'Arakelov est une théorie de géométrie arithmétique, où plusieurs domaines mathématiques, comme géométrie algébrique, théorie des nombres, géométrie analytique interviennent naturellement. Elle consiste à "compactifier" les variétés sur un corps de nombres par des objets analytiques, en s'appuyant sur la comparaison avec la géométrie algébrique relativement à une courbe projective régulière.

Le cours commence par une introduction sur la géométrie des nombres classique et sa version moderne dans le langage de fibré vectoriel hermitien.

Ensuite on introduit une géométrie de courbe adélique dont le corps "de nombres" sous-jacent est de type fini sur Q.

La dernière partie du cours porte sur un travail récent en collaboration avec Moriwaki sur l'étude des schémas projectifs au-dessus d'une courbe adélique générale et leurs invariants arithmétiques.

Programme

Programme de la première partie :

- courbes arithmétiques, géométrie des nombres
- courbe adélique, fibrés vectoriels adéliques et leur géométrie

Programme de la deuxième partie :

- variété arithmétique sur une courbe adélique, diviseurs adéliques
- invariants birationnels
- positivité des diviseurs adéliques

Connaissances requises

Cours fondamentaux sur la géométrie algébrique et théorie des nombres.

Bibliographie

[1] Adelic curves and birational Arakelov geometry, ouvrage en cours de rédaction en collaboration avec Moriwaki (qui sera disponible avant le cours).

Les surfaces K3 (9 ECTS)

Olivier Debarre

2e semestre

Présentation

La géométrie algébrique est l'étude des ensembles définis des équations polynomiales à plusieurs variables à coefficients dans un corps, appelés variétés affines. On considère aussi les sous-ensembles des espaces projectifs définis par des équations polynomiales homogènes, de façon à obtenir des objets « compacts », les variétés projectives. Dès qu'on a défini les concepts de dimension et de lissité, on peut entamer un travail de classification (à isomorphisme près) des variétés projectives lisses connexes de dimension donnée, sur un corps fixé qui sera pour nous le corps des complexes. En dimension 1, on appelle ces variétés des courbes et un élément essentiel de leur classification est leur genre, un entier positif. Dès la dimension 2, la classification demande plus de travail mais est maintenant bien comprise depuis des décennies.

Programme

Nous nous intéressons dans ce cours à un type de surfaces bien particulier, appelées surfaces K3 (ainsi nommées par André Weil « à cause de Kummer, Kähler, Kodaira et de la belle montagne K2 au Cachemire »). Elles occupent une place bien particulière dans la classification : assez spéciales pour qu'on puisse les décrire précisément (classification de Mukai en petits degrés), mais suffisamment diverses pour garder suffisamment de propriétés (géométriques, dynamiques, arithmétiques) importantes pas encore toutes élucidées.
Travailler sur le corps des nombres complexes nous permettra d'utiliser les outils de la géométrie complexe, comme la théorie de Hodge et l'application des périodes, qui sont fondamentaux pour l'étude des surfaces K3.

Connaissances requises

Une certaine familiarité avec les concepts de base de la géométrie algébrique ou complexe sera nécessaire mais je m'adapterai à l'auditoire. Les surfaces K3 seront le fil conducteur du cours mais j'en profiterai pour introduire divers outils classiques utilisés dans l'étude des surfaces algébriques.

Bibliographie

[1] Barth, Wolf; Hulek, Klaus; Peters, Chris ; Van de Ven, Antonius ; Compact complex surfaces, Second edition, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 4, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[2] Beauville, Arnaud, Surfaces algébriques complexes, Astérisque 54, Société Mathématique de France, Paris, 1978.

[3] Beauville, Arnaud, Complex algebraic surfaces, translated from the French by R. Barlow, N. I. Shepherd-Barron and M. Reid, London Mathematical Society Lecture Note Series 68, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

[4] Beauville, Arnaud, Surfaces K3, Séminaire Bourbaki, 217–229, Astérisque 105-106, Société Mathématique de France, Paris, 1983.

[5] Hartshorne, Robin, Algebraic Geometry, Graduate Text in Mathematics 52, Springer Verlag, 1977.

[6] Géométrie des surfaces K3 : modules et périodes, séminaire Palaiseau, octobre 1981–janvier 1982, Astérisque 126, Société Mathématique de France, Paris, 1985.

[7] Huybrechts, D., Complex geometry. An introduction, Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[8] Huybrechts, Daniel, Lectures on K3 surfaces, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 158, Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[9] Serre, Jean-Pierre, Cours d'arithmétique, deuxième édition revue et corrigée. Le Mathématicien, No. 2, Presses Universitaires de France, Paris, 1977.

Catégorification(s) en théorie de Lie (9+9 ECTS)

Olivier Dudas

2e semestre

Programme

Le but de ce cours est d'introduire à la théorie des représentations dite "supérieure", où les espaces vectoriels sont remplacés par des catégories et les actions par des foncteurs. Cette approche permet de démontrer, entre autres :

- des propriétés de positivité et des identités combinatoires (en "décatégorifiant"),
- des équivalences entre catégories abéliennes ou triangulées,
- l'existence de bases "canoniques" pour certaines représentations.

La grande partie du cours sera consacrée aux constructions de Chuang-Rouquier pour les représentations de l'algèbre de Lie sl2, auxquelles seront ajoutées les approches diagrammatiques dûes à Khovanov-Lauda. Le cas général d'une algèbre de Kac-Moody se fera via l'étude les algèbres de Hecke-carquois (appelées aussi algèbres KLR).

Ce cours s'insère dans la filière "Algèbre, groupes et représentations" mais certaines constructions topologiques (faisceaux constructibles et faisceaux pervers) seront aussi évoquées.

Connaissances requises

Il serait souhaitable d'avoir au préalable suivi un cours sur les algèbres de Lie ou les groupes algébriques.

Bibliographie

[1] [Chuang-Rouquier] Derived equivalences for symmetric groups and sl2-categorification, Annals of Math. 167 (2008).

[2] [Etingof-Gelaki-Nikshych-Ostrik] Tensor categories, Mathematical Surveys and Monographs, 205. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.

[3] [Khovanov-Lauda] A diagrammatic approach to categorification of quantum groups. I. Represent. Theory 13 (2009), 309--347.

[4] [Khovanov-Lauda] A diagrammatic approach to categorification of quantum groups II. Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011), no. 5, 2685--2700.

[5] [Rouquier] 2-Kac-Moody algebras, (2008).

[6] [Rouquier] Quiver Hecke algebras and 2-Lie algebras, Algebra Colloquium 19 (2012), 359—410.

Méthode de Nash-Moser et EDP non-linéaires (9 ECTS)

David Gérard-Varet

2^{e} semestre

Présentation

L'objet du cours est une méthode remarquable introduite par Nash et développée par Moser, visant à résoudre des EDO ou des EDP non-linéaires. Cette méthode a été appliquée avec succès à différents problèmes d'analyse et de géométrie : plongement isométrique des variétés, conjugaison des difféomorphismes du cercle, théorème KAM, amortissement Landau...

Programme

Le but de la première partie du cours sera de présenter cette méthode, et certaines de ses applications les plus connues.
Dans une seconde partie, nous nous intéresserons à son apport à la théorie des EDP, et son lien avec des problèmes ou notions connexes (régularité des solutions d'équations elliptiques, paraproduit).

Connaissances requises

Le cours ne nécessite pas d'autres prérequis que les cours d'analyse classiques de L3/M1 (calcul différentiel, analyse de Fourier, espaces de Banach). Avoir quelques notions sur les EDP (notamment sur les solutions faibles d'EDP elliptiques) peut aider dans la seconde partie du cours, mais n'est pas indispensable.

Bibliographie

[1] The Nash-Moser iteration scheme, article de Terence Tao disponible sur sa page web.
[2] An introduction to KAM theory, article de C.E. Wayne disponible sur sa page web.
Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser, par S. Alinhac et P. Gérard, EDP Sciences.
[3] Elliptic partial differential equations, par Q. Han et F. Lin, Courant Lecture Notes, AMS.

Variétés de Shimura (9 ECTS)

Michael Harris

2e semestre

Programme

1. Modules de courbes elliptiques, formes modulaires, opérateurs de Hecke classiques et adéliques
2. Modules de variétés abeliennes, demi-plan supérieur de Siegel, structures PEL
3. Formalisme de variations de structures de Hodge, axiomes de Deligne d'une variété de Shimura
4. Quotients arithmétiques d'un domaine hermitien symétrique (existence de structure algébrique, sans démonstrations)
5. Multiplication complexe (loi de réciprocité de Shimura-Taniyama, sans démonstrations sauf pour les courbes elliptiques)
6. Propriétés fonctorielles des modèles canoniques, existence en cas PEL (et si le temps le permet)
7. Fibrés automorphes et formes automorphes holomorphes
8. Cohomologie et formes automorphes (formule de Matsushima)

Bibliographie

[1] Deligne, "Travaux de Shimura (Sem. Bourbaki 1971/72)

[2] Griffiths-Harris, "Principles of Algebraic Geometry" (pour les variétés abeliennes)

[3] Milne, Introduction to Shimura varieties, Clay Math. Proceedings, vol. 4

[4] Mumford, "Abelian varieties"

[5] Shimura-Taniyama, "Complex multiplication of abelian varieties..."

Introduction à l'analyse géométrique à travers les mathématiques de la relativité générale (9 ECTS)

Paul Laurain

2e semestre

Programme

1. Semaine 1 : Fondements de la relativité restreinte et introduction aux équations d'Einstein
2. Semaine 2 : Le Problème de Cauchy : Le théorème de Choquet-Bruhat, équations de contraintes et méthode conforme
3. Semaine 3 : Espaces asymptotiquement plats et définition de la masse
4. Semaine 4 : Le problème de Plateau
5. Semaine 5 (et 6) : Le théorème de la masse positive de Schoen et Yau

Connaissances requises

- Géométrie différentielle et Riemannienne (Le cours de J. Marché à P6 ou [2] chapitres1-6, ou encore [1])
- Équations aux dérivées partielles principalement elliptiques (Le cours de Yves Achdou & Xavier Blanc à P7 ou [3] chapitres 5-6)

Bibliographie

[1] Thierry Aubin. A course in differential geometry, volume 27 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[2] Manfredo Perdigão do Carmo. Riemannian geometry. Mathematics : Theory & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992.Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty.

[3] Lawrence C. Evans. Partial differential equations, volume 19 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.

Parcours algèbres d'opérateurs, théorie géométrique et mesurée des groupes (9 ECTS)

Pierre Fima, François Le Maître et Georges Skandalis

1er & 2e semestre

Présentation

Un parcours dans la filière algèbres d'opérateurs, géométrie non commutative contenant 3 cours de 9 ECTS chacun est proposé. Ce parcours s'appuie sur les liens profond existant entre les algèbres d'opérateurs, la théorie géométrique et la théorie mesurée des groupes discrets dénombrables.

Les algèbres d'opérateurs, introduites par Murray et von Neumann entre 1940 et 1950 dans l'optique de formaliser les concepts de la mécanique quantique, ont connu des progrès spectaculaires, en lien avec la théorie ergodique et la théorie des groupes, ces 15 dernières années. Ce parcours présentera quelques uns de ces résultats très récents ainsi que les techniques modernes qui permettent de les obtenir.

Le premier cours de ce parcours est une introduction aux algèbres d'opérateurs : C*-algèbres et algèbres de von Neumann. Dans le second cours, différentes propriétés d'approximations pour les groupes et algèbres de von Neumann, dont l'utilisation permet d'obtenir des résultats surprenant de rigidité, seront présentées et étudiées en détails. Enfin, le dernier cours portera sur les sous algèbres abéliennes maximales d'une algèbre de von Neumann finie. On étudiera en détail le lien entre ces dernières et les actions préservant une mesure de probabilité de groupes dénombrables. Plusieurs résultats profonds, tels que l'unicité de la Cartan dans le facteur hyperfini II1 (Connes-Feldman-Weiss, 1981) et la trivialité du groupe fondamental de L(SL2(Z)nZ2) (Popa, 2001), seront démontrés.

Programme

4. **Algèbres d'opérateurs – G. Skandalis (9 ECTS), septembre-octobre.**

   - C*-algèbres, algèbres de von Neumann, exemples.
     - Le théorème de bicommutant de von Neumann
     - C*-algèbres et théorie de Gelfand
     - Exemples d'algèbres de von Neumann
   - Algèbres de von Neumann finies
     - Classification des facteurs en types
     - Facteurs de type II1 et trace
     - Exemples de facteurs de type II1.

5. **Propriétés d'approximations des groupes et algèbres de von Neumann – P. Fima (9 ECTS), novembre-décembre.**

   - Bimodules sur les algèbres de von Neumann finies.
   - Groupes moyennables, algèbres de von Neumann hyperfinies, le facteur hyperfini II1.
   - Propriété de Haagerup et moyennabilité faible.
   - Propriété (T), (T) relative, SL2(Z) n Z2.

6. **Sous-algèbres maximales abéliennes et équivalence orbitale – F. Le Maître (9 ECTS), janvier-février.**

   - Masas dans les facteurs II1 :
     - Types: Cartan, semi-régulier, singulier.
     - Exemples en provenance des groupes.
     - Invariant de Pukanzky.
   - Théorie ergodique et masas

- Bases de la théorie spectrale des transformations préservant une mesure de probabilité, exemples.
- Masa associée à une transformation p.m.p., conjecture de Neshveyev-Størmer.
- Construction d'une relation d'équivalence p.m.p. à partir d'une Cartan. Equivalence orbitale.
- Toute relation d'équivalence moyennable est hyperfinie (Connes-Feldman-Weiss). Unicité de Cartan dans le facteur hyperfini II1.

• Coût et trivialité du groupe fondamental de L(SL2(Z) n Z2)

- Relations d'équivalence p.m.p., exemples en provenance d'actions de groupes.
- Coût des relations d'équivalence p.m.p., coût des produits amalgamés (Gaboriau).
- Trivialité du groupe fondamental de L(SL2(Z) n Z2) (Popa).

Connaissances requises

Une connaissance de l'analyse fonctionnelle de M1 est utile.

Bibliographie

Partie I : Un polycopié sera distribué pour la Partie I.

[5] J. Dixmier, Les C*-algèbres et leurs représentations.
[6] J. Dixmier, Les algèbres de von Neumann dans l'espace hilbertien.
[7] G. J. Murphy, C*-algebras and operator theory.
[8] M. Takesaki, Theory of operator algebras. I.

Partie II :

[4] V. Jones et V.S. Sunders, Introduction to subfactors.
[5] N. Brown et N. Ozawa, C*-algebras and Finite-Dimensional Approximations.
[6] B. Bekka, P. de la Harpe et A. Valette, Kazhdan's Property (T).

Partie III :

[4] A.M. Sinclair et R.R. Smith, Finite von Neumann algebras and masas.
[5] A.S. Kechris et B. Miller, Topics in orbit equivalence.
[6] C. Anantharaman et S. Popa, An introduction to II1 factors.

Géométrie et dynamique (d'après les travaux de Maryam Mirzakhani (9 ECTS)

Anton Zorich

2e semestre

Programme

1. Survol des résultats de Mirzakhani sur comptage de géodésiques simples ; sur le comptage de volumes de Weil-Petersson de l'espace de modules de surfaces hyperboliques à bord géodésique ; l'idée de sa preuve de la conjecture de Witten.
2. Survol des théorèmes de rigidité d'Eskin-Mirzakhani-Mohammadi.
3. Introduction basique en géométrie des surfaces hyperboliques.
4. Faites basique sur l'espace de Teichmü ller et de l'espace de modules.
5. Intégration par rapport à l'espace de modules élaborée par Mirzakhani.
6. Voies ferrées (train-tracks) ; espace de laminations géodésiques ; ergodicité de l'action du groupe modulaire.
7. Comptage de géodésiques simples.
8. Réduction symplectique. Comptage de volumes de Weil-Petersson de l'espace de modules de surfaces hyperboliques à bord géodésique.
9. Idée de la preuve de Mirzakhani de la conjecture de Witten plus détaillée.

Bibliographie

[1] Articles originaux de Mirzakhani :

- A. Weil-Petersson volumes and intersection theory on the moduli space of curves, Journal of Amer. Math. Soc. 20 (2007), no. 1, 1-23.
- B. Simple geodesics and Weil-Petersson volumes of moduli spaces of bordered Riemann surfaces}, Invent. Math. 167 (2007), no.1, 179-222.
- C. Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces, Annals of Math. (2) 168 (2008), no. 1, 97–125.

[2] B. Farb, D. Margalit, "Primer on Mapping Class Groups", Princeton university press, 2012.

[3] A. Casson, S. Bleiler, "Automorphisms of Surfaces after Nielsen and Thurston", Cambridge Univ. press, 1988.

[4] S. Lando, A. Zvonkin, "Graphs on Surfaces and Their Applications", Springer 2004.

[5] F. Dalbo, "Geodesic and horocycle trajectories", Springer 2011.

[6] A. Zorich, The work of 2014 Fields Medalists: Maryam~Mirzakhani, Notices of the AMS, 62:11 (2015), 1345-1349, http://www.ams.org/notices/201511/rnoti-p1334.pdf

[7] A. Zorich, Le théorème de la baguette magique de A.Eskin et M.Mirzakhani, Gazette des mathématiciens, 142 (2014), 39-54, http://smf4.emath.fr/en/Publications/Gazette/2014/142/smf_gazette_142_39-54.pdf