

Les surfaces K3 (9 ECTS)

Olivier Debarre

2^e semestre

Présentation

La géométrie algébrique est l'étude des ensembles définis des équations polynomiales à plusieurs variables à coefficients dans un corps, appelés variétés affines. On considère aussi les sous-ensembles des espaces projectifs définis par des équations polynomiales homogènes, de façon à obtenir des objets « compacts », les variétés projectives. Dès qu'on a défini les concepts de dimension et de lissité, on peut entamer un travail de classification (à isomorphisme près) des variétés projectives lisses connexes de dimension donnée, sur un corps fixé qui sera pour nous le corps des complexes. En dimension 1, on appelle ces variétés des courbes et un élément essentiel de leur classification est leur genre, un entier positif. Dès la dimension 2, la classification demande plus de travail mais est maintenant bien comprise depuis des décennies.

Programme

Nous nous intéressons dans ce cours à un type de surfaces bien particulier, appelées surfaces K3 (ainsi nommées par André Weil « à cause de Kummer, Kähler, Kodaira et de la belle montagne K2 au Cachemire »). Elles occupent une place bien particulière dans la classification : assez spéciales pour qu'on puisse les décrire précisément (classification de Mukai en petits degrés), mais suffisamment diverses pour garder suffisamment de propriétés (géométriques, dynamiques, arithmétiques) importantes pas encore toutes élucidées.

Travailler sur le corps des nombres complexes nous permettra d'utiliser les outils de la géométrie complexe, comme la théorie de Hodge et l'application des périodes, qui sont fondamentaux pour l'étude des surfaces K3.

Connaissances requises

Une certaine familiarité avec les concepts de base de la géométrie algébrique ou complexe sera nécessaire mais je m'adapterai à l'auditoire. Les surfaces K3 seront le fil conducteur du cours mais j'en profiterai pour introduire divers outils classiques utilisés dans l'étude des surfaces algébriques.

Bibliographie

- [1] Barth, Wolf; Hulek, Klaus; Peters, Chris ; Van de Ven, Antonius ; Compact complex surfaces, Second edition, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 4, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [2] Beauville, Arnaud, Surfaces algébriques complexes, Astérisque 54, Société Mathématique de France, Paris, 1978.
- [3] Beauville, Arnaud, Complex algebraic surfaces, translated from the French by R. Barlow, N. I. Shepherd-Barron and M. Reid, London Mathematical Society Lecture Note Series 68, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.
- [4] Beauville, Arnaud, Surfaces K3, Séminaire Bourbaki, 217–229, Astérisque 105-106, Société Mathématique de France, Paris, 1983.
- [5] Hartshorne, Robin, Algebraic Geometry, Graduate Text in Mathematics 52, Springer Verlag, 1977.
- [6] Géométrie des surfaces K3 : modules et périodes, séminaire Palaiseau, octobre 1981–janvier 1982, Astérisque 126, Société Mathématique de France, Paris, 1985.
- [7] Huybrechts, D., Complex geometry. An introduction, Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [8] Huybrechts, Daniel, Lectures on K3 surfaces, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 158, Cambridge University Press, Cambridge, 2016.
- [9] Serre, Jean-Pierre, Cours d'arithmétique, deuxième édition revue et corrigée. Le Mathématicien, No. 2, Presses Universitaires de France, Paris, 1977.