université
PARIS DIDEROT
PARIS 7

UFR DE MATHÉMATIQUES

MASTER 2e année MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES 2018 – 2019

Parcours algèbres d'opérateurs, théorie géométrique et mesurée des groupes (9 ECTS)
Pierre Fima, François Le Maître et Georges Skandalis
1er & 2e semestre

Présentation

Un parcours dans la filière algèbres d'opérateurs, géométrie non commutative contenant 3 cours de 9 ECTS chacun est proposé. Ce parcours s'appuie sur les liens profond existant entre les algèbres d'opérateurs, la théorie géométrique et la théorie mesurée des groupes discrets dénombrables.

Les algèbres d'opérateurs, introduites par Murray et von Neumann entre 1940 et 1950 dans l'optique de formaliser les concepts de la mécanique quantique, ont connu des progrès spectaculaires, en lien avec la théorie ergodique et la théorie des groupes, ces 15 dernières années. Ce parcours présentera quelques uns de ces résultats très récents ainsi que les techniques modernes qui permettent de les obtenir.

Le premier cours de ce parcours est une introduction aux algèbres d'opérateurs : C*-algèbres et algèbres de von Neumann. Dans le second cours, différentes propriétés d'approximations pour les groupes et algèbres de von Neumann, dont l'utilisation permet d'obtenir des résultats surprenant de rigidité, seront présentées et étudiées en détails. Enfin, le dernier cours portera sur les sous algèbres abéliennes maximales d'une algèbre de von Neumann finie. On étudiera en détail le lien entre ces dernières et les actions préservant une mesure de probabilité de groupes dénombrables. Plusieurs résultats profonds, tels que l'unicité de la Cartan dans le facteur hyperfini II1 (Connes-Feldman-Weiss, 1981) et la trivialité du groupe fondamental de L(SL2(Z)nZ2) (Popa, 2001), seront démontrés.

Programme

1. **Algèbres d'opérateurs – G. Skandalis (9 ECTS), septembre-octobre.**

   - C*-algèbres, algèbres de von Neumann, exemples.
     - Le théorème de bicommutant de von Neumann
     - C*-algèbres et théorie de Gelfand
     - Exemples d'algèbres de von Neumann

   - Algèbres de von Neumann finies
     - Classification des facteurs en types
     - Facteurs de type II1 et trace
     - Exemples de facteurs de type II1.

2. **Propriétés d'approximations des groupes et algèbres de von Neumann – P. Fima (9 ECTS), novembre-décembre.**

   - Bimodules sur les algèbres de von Neumann finies.
   - Groupes moyennables, algèbres de von Neumann hyperfinies, le facteur hyperfini II1.
   - Propriété de Haagerup et moyennabilité faible.
   - Propriété (T), (T) relative, SL2(Z) n Z2.

3. **Sous-algèbres maximales abéliennes et équivalence orbitale – F. Le Maître (9 ECTS), janvier-février.**

   - Masas dans les facteurs II1 :
     - Types: Cartan, semi-régulier, singulier.
     - Exemples en provenance des groupes.
     - Invariant de Pukanzky.

- Théorie ergodique et masas
  - Bases de la théorie spectrale des transformations préservant une mesure de probabilité, exemples.
  - Masa associée à une transformation p.m.p., conjecture de Neshveyev-Størmer.
  - Construction d'une relation d'équivalence p.m.p. à partir d'une Cartan. Equivalence orbitale.
  - Toute relation d'équivalence moyennable est hyperfinie (Connes-Feldman-Weiss). Unicité de Cartan dans le facteur hyperfini II1.
- Coût et trivialité du groupe fondamental de L(SL2(Z) n Z2)
  - Relations d'équivalence p.m.p., exemples en provenance d'actions de groupes.
  - Coût des relations d'équivalence p.m.p., coût des produits amalgamés (Gaboriau).
  - Trivialité du groupe fondamental de L(SL2(Z) n Z2) (Popa).

Connaissances requises

Une connaissance de l'analyse fonctionnelle de M1 est utile.

Bibliographie

Partie I : Un polycopié sera distribué pour la Partie I.

[1] J. Dixmier, Les C*-algèbres et leurs représentations.

[2] J. Dixmier, Les algèbres de von Neumann dans l'espace hilbertien.

[3] G. J. Murphy, C*-algebras and operator theory.

[4] M. Takesaki, Theory of operator algebras. I.

Partie II :

[1] V. Jones et V.S. Sunders, Introduction to subfactors.

[2] N. Brown et N. Ozawa, C*-algebras and Finite-Dimensional Approximations.

[3] B. Bekka, P. de la Harpe et A. Valette, Kazhdan's Property (T).

Partie III :

[1] A.M. Sinclair et R.R. Smith, Finite von Neumann algebras and masas.

[2] A.S. Kechris et B. Miller, Topics in orbit equivalence.

[3] C. Anantharaman et S. Popa, An introduction to II1 factors.