

**Équivalence orbitale et coût (9 ECTS)**

**François Le Maître**

2<sup>e</sup> semestre

**Présentation**

---

Ce cours propose une introduction à la notion d'*équivalence orbitale*. Étant donné une action libre d'un groupe dénombrable  $\Gamma$ , on s'intéresse à la partition de l'espace en orbites induite par l'action. Si l'espace n'a aucune structure, cette partition est pauvre en information puisqu'on ne pourra que détecter le fait que  $\Gamma$  est infini ou non. En équivalence orbitale, on s'intéresse donc à des partitions provenant d'actions libres sur des espaces plus structurés : les espaces de probabilité *standards* ; le cours commencera par une introduction aux actions préservant la mesure de groupes dénombrables sur de tels espaces avec de nombreux exemples.

Dans ce cadre, la partition retient beaucoup plus d'informations. Elle se souvient notamment la *moyennabilité* du groupe, et un résultat remarquable de Connes, Feldman et Weiss, que l'on démontrera après avoir présenté la notion de moyennabilité, dit que pour les groupes moyennables, toutes les actions ergodiques donnent en fait la même partition de l'espace en orbites, à composition par une bijection préservant la mesure près.

On s'intéressera ensuite à un invariant naturel de la partition (et plus généralement de *groupoïdes pmp*), le coût, qui est grosso modo le nombre minimal de générateurs du groupoïde. On verra notamment un résultat de Damien Gaboriau qui dit que le coût d'une action libre du groupe libre  $F_n$  est égal à  $n$  : la partition de l'espace en orbites se souvient du rang du groupe libre ! On expliquera aussi un résultat d'Abért et Nikolov qui établit un lien fort entre le coût d'une action profinie et le *gradient de rang*.

Enfin, dans la mesure où le temps le permettra, on présentera lien entre percolation et équivalence orbitale afin d'expliquer une réponse positive dans le cadre mesuré au problème de Day-von Neumann due à Gaboriau et Lyons : tout groupe non moyennable contient une copie à *ME* près du groupe libre.

**Connaissances requises**

---

Une certaine familiarité avec les groupes libres est un plus ; par contre le cours ne s'appuiera pas sur les autres cours du parcours algèbres d'opérateurs.

**Bibliographie**

---

- D. Gaboriau, *Around the orbit equivalence theory of the free group, cost and  $l^2$ -Betti numbers*, available at <http://perso.ens-lyon.fr/gaboriau/Travaux-Publi/Copenhagen/Copenhagen-Lectures.html>
- A.S. Kechris et B. Miller, *Topics in orbit equivalence*.