Algèbre + Homotopie = Opérades (9 ECTS)

Bruno Vallette

1er semestre

Présentation

“L’algèbre et la théorie de l’homotopie se marient mal à priori” se plaisait à dire Saunders MacLane, car les structures algébriques ne sont en général pas stables par homotopie. Et pourtant, les mathématiques regorgent de structures algébriques sur des complexes de chaînes, par exemple. En topologie algébrique, le complexe des cochaînes singulières d’un espace topologique est muni d’un produit associatif. En géométrie différentielle, le complexe de de Rham d’une variété est muni d’un produit commutatif. Et la théorie de la déformation est basée sur la notion d’algèbre de Lie différentielle graduée.
Il faut prendre le constat de MacLane de manière positive : il y a là une source féconde de beaux développements mathématiques qui permettent de décrire les propriétés homotopiques des types d’algèbres, avec des applications en algèbre, géométrie, topologie, etc. Le but de ce cours sera de familiariser les étudiant-e-s avec certains outils modernes de l’algèbre homotopique. On commencera par se faire la main sur des exemples cruciaux d’algèbres différentielles graduées et leurs propriétés, comme le théorème de transfert homotopique. On verra ensuite comment coder conceptuellement les différents types de structures algébriques avec la notion d’opérade. La théorie des opérades, dont la dualité de Koszul, nous fournira des outils fondamentaux pour décrire les propriétés homotopiques des algèbres différentielles graduées. On conclura ce cours par des applications récentes et élégantes en théorie de la déformation (algèbre pré-Lie et ∞-groupoïde).

Ce cours s’inscrit dans le prolongement de celui d’*Algèbre homologique et topologie algébrique* donné par Muriel Livernet (cours de base, septembre-octobre 2017) et il ouvre naturellement sur celui d’*Introduction à la théorie de l’homotopie* donné par Gregory Ginot et Marco Robalo (second semestre).

Programme

(1) Algèbres différentielles graduées (2) Opérades
(2) Dualité de Koszul
(3) Algèbres à homotopie près
(4) Théorie de la déformation

Connaissances requises

Algèbre homologique de base (complexe de chaînes, homotopie, produit tensoriel) et rudiments de théorie des catégorie (catégorie, foncteur, catégorie monoïdale, monade).

Bibliographie

[1] Jean-Louis Loday et Bruno Vallette, *Algebraic operads*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 346, Springer-Verlag, Berlin, 2012.

[2] Bruno Vallette, *Algebra+Homotopy=Operads*, in "Symplectic, Poisson and Noncommuta- tive Geometry", MSRI Publications 62 (2014), 101–162.