3 Topologie des espaces métriques

3.1 Définitions et propriétés

3.1.1 Définitions

Définition. Soit X un ensemble. Une *distance* sur X est une application de $X \times X$ dans $\mathbb{R}_+$ qui vérifie les trois propriétés suivantes

a) Pour tous $x, y \in X$, on a $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

b) Pour tous $x, y \in X$, on a $d(x, y) = d(y, x)$.

c) Pour tous $x, y, z \in X$, on a $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

Un *espace métrique* est un ensemble muni d'une distance - c'est donc un couple (X, d) où X est un ensemble et d une distance sur X.

3.1.2 Exemples d'espaces métriques

Espaces normés. Rappelons qu'une *norme* sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est une application $N : E \to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :

a) Pour tout $x \in E$, on a $N(x) = 0 \iff x = 0$.

b) Pour tous $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.

c) Pour tous $x, y \in E$, on a $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

Un espace vectoriel normé (E, N) est un espace métrique pour la distance $(x, y) \mapsto N(x - y)$.

Sous-espace. Remarquons que toute partie d'un espace métrique est un espace métrique.

3.1.3 Propriétés des distances

Distance à une partie. Soient (X, d) un espace métrique, $x \in X$ et A une partie non vide de X. On appelle distance de x à A et le nombre réel $d(x, A) = \inf\{d(x, y);\ y \in A\}$. On pose parfois $d(x, \emptyset) = +\infty$.

Diamètre. Soient (X, d) un espace métrique et A une partie non vide de X. Le diamètre de A est la quantité $\sup\{d(x, y);\ (x, y) \in A \times A\} \in [0, +\infty]$. Par convention le diamètre de l'ensemble vide est 0.

Boule ouverte, boule fermée. Soient (X, d) un espace métrique, $x \in X$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$; la boule ouverte (*resp.* fermée) de centre x et de rayon r est l'ensemble $\mathring{B}(x, r) = \{y \in X;\ d(x, y) < r\}$ (*resp.* $\overline{B}(x, r) = \{y \in X;\ d(x, y) \leqslant r\}$).

3.1.4 Notions topologiques

Limite d'une suite. On dit qu'une suite (x_n) de points de X tend vers $\ell \in X$ si et seulement si la suite de nombres réels $(d(x_n, \ell))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

Voisinage. Soient (X, d) un espace métrique et $x \in X$. Un voisinage de x dans X est une partie de X qui contient une boule ouverte centrée en x.

Ouvert. Soit (X, d) un espace métrique. Une partie de X est dite ouverte si c'est un voisinage de chacun de ses points.

Fermé. Soit (X, d) un espace métrique. Une partie de X est dite fermée si son complémentaire est ouvert.

Intérieur, adhérence. Soit (X,d) un espace métrique et soit A une partie de X.

- La réunion de tous les ouverts de X contenus dans A s'appelle l'intérieur de A et se note $\mathring{A}$. C'est le plus grand ouvert de X contenu dans A.
- L'intersection de tous les fermés de X contenant A s'appelle l'adhérence de A et se note $\overline{A}$. C'est le plus petit fermé de X contenant A.
- On dit que A est *dense* dans X si $\overline{A} = X$.
- L'ensemble $\overline{A} \setminus \mathring{A}$ s'appelle la *frontière* de A.

Application continue. Soient (X,d) et (X',d') des espaces métriques et $f : X \to Y$ une application. On dit que l'application f est continue en un point $a \in X$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que pour $x \in X$ on ait $d(a,x) < \alpha \Rightarrow d'(f(a), f(x)) < \varepsilon$.
On dit que l'application f est continue si elle est continue en tout point de X.

Homéomorphisme. Une application $f : X \to X'$ est un homéomorphisme si elle est bijective et si f et f^{-1} sont continues.

Propriétés des voisinages. *a) Une partie de X est un voisinage de x si et seulement si elle contient une boule fermée centrée en x (de rayon > 0).*

b) Toute partie contenant un voisinage de x est un voisinage de x.

c) L'intersection de deux (d'un nombre fini de) voisinages de x est un voisinage de x.

Propriétés des ouverts. *a) Une réunion quelconque d'ouverts est ouverte.*

b) L'intersection de deux (d'un nombre fini d') ouverts est ouverte.

c) Une boule ouverte est ouverte. Les ouverts de X sont les réunions de boules ouvertes.

Propriétés des fermés. *a) Une intersection quelconque de fermés est fermée.*

b) La réunion de deux (d'un nombre fini de) fermés est fermée.

c) Une boule fermée est fermée.

Soit A une partie de X.

Caractérisation de l'intérieur. *Pour $x \in X$, on a $x \in \mathring{A} \iff A$ est un voisinage de x.*

Caractérisation de l'adhérence. *Pour $x \in X$, on a l'équivalence*

(i) $x \in \overline{A}$;

(ii) il existe une suite de points de A convergeant vers x ;

(iii) $d(x,A) = 0$;

(iv) tout voisinage de x a une intersection non vide avec A.

Caractérisation de la continuité en un point. *Les conditions suivantes sont équivalentes pour une application $f : X \to X'$ et $a \in X$:*

(i) L'application f est continue en a ;

(ii) l'image inverse par f de tout voisinage de $f(a)$ est un voisinage de a ;

(iii) pour toute suite (x_n) dans X convergeant vers a la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.

Caractérisation de la continuité. *Les conditions suivantes sont équivalentes pour une application $f : X \to X'$:*

(i) L'application f est continue ;

(ii) l'image inverse par f de tout ouvert de X' est un ouvert de X ;

(iii) l'image inverse par f de tout fermé de X' est un fermé de X.

(iv) pour toute suite convergente (x_n) dans X, la suite $(f(x_n))$ est convergente dans X'.

3.1.5 Propriétés métriques

Ces propriétés dépendent de la distance, pas seulement de la topologie...

Application uniformément continue. Soient (X, d) et (X', d') des espaces métriques et $f : X \to Y$ une application. On dit que l'application f est uniformément continue si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous $x, y \in X$ on ait $d(x, y) < \alpha \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Application Lipschitzienne. Soient (X, d) et (X', d') des espaces métriques, $k \in \mathbb{R}_+$ et $f : X \to Y$ une application. On dit que l'application f est *lipschitzienne* de rapport k si pour tous $x, y \in X$ on a $d'(f(x), f(y)) \leqslant k\, d(x, y)$.

Proposition. *Une application uniformément continue est continue. Une application lipschitzienne est uniformément continue.*

3.1.6 Comparaison de distances

Soient d et d' deux distances sur X.

- Les distances d et d' sont dites *topologiquement équivalentes* si l'identité de X est un homéomorphisme de (X, d) sur (X, d').
- Les distances d et d' sont dites *uniformément équivalentes* si l'identité de X est uniformément continue de (X, d) sur (X, d') et de (X, d') sur (X, d).
- Les distances d et d' sont dites *équivalentes* si l'identité de X est lipschitzienne de (X, d) sur (X, d') et de (X, d') sur (X, d).

3.1.7 Produits finis d'espaces métriques

Soient (X, d) et (X', d') des espaces métriques. Les applications $((x, x'), (y, y')) \mapsto \max\{d(x, y), d'(x', y')\}$, $((x, x'), (y, y')) \mapsto d(x, y) + d'(x', y')$ et $((x, x'), (y, y')) \mapsto \sqrt{d(x, y)^2 + d'(x', y')^2}$ sont des distances sur $X \times X'$; elles sont équivalentes.

3.2 Les grandes notions de topologie

3.2.1 Compacité

Définition. Un espace métrique (X, d) est dit *compact* si de toute suite de points de X on peut extraire une suite convergente.

Parties compactes. Une partie compacte d'un espace métrique est fermée. Une partie d'un espace métrique compact est compacte si et seulement si elle est fermée.

Produit de compacts. Le produit de deux (d'un nombre fini d') espaces métriques compacts est compact.

Parties compactes de $\mathbb{R}^n$. Les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés (Bolzano Weierstrass).

Applications continues. L'image d'un espace compact par une application continue est compacte. L'image d'un compact non vide par une application continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Théorème de Heine. *Une application continue définie sur un compact est uniformément continue.*

3.2.2 Espaces métriques connexes.

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition. On dit que X est connexe si toute partie de X à la fois ouverte et fermée est vide ou égale à X.

Caractérisation. L'espace X est connexe si toute application continue de X dans $\{0, 1\}$ est constante.

Parties connexes. Une partie A de X est un espace métrique ; donc cela a un sens de dire si A connexe ou non.

Réunion de connexes. La réunion d'une famille de parties connexes de X d'intersection non vide est connexe.

Composante connexe. Soit $x \in X$. La réunion de toutes les parties connexes de X contenant x est le plus grand connexe contenant x. On l'appelle la composante connexe de x (dans X). Les composantes connexes forment une *partition* de X.

Proposition. *Tout produit d'espaces connexes est connexe.*

Théorème. *Tout intervalle est connexe.*

On en déduit que les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Théorème. *L'image d'un espace connexe par une application continue est connexe.*

On en déduit le **théorème des valeurs intermédiaires**.

Connexité par arcs. On dit que X est connexe par arcs si deux points de X peuvent être joints par un chemin continu, *i.e.* si pour tous $x, y \in X$, il existe une application continue $f : [0, 1] \to X$ telle que $f(0) = x$ et $f(1) = y$.
Tout espace métrique connexe par arcs est connexe. Un ouvert connexe d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs.

3.2.3 Espaces métriques complets.

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition (Suite de Cauchy)**.** Une suite (u_n) dans X est dite *de Cauchy* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour $p, q \geqslant n$, on ait $d(u_p, u_q) \leqslant \varepsilon$.

Définition. On dit que l'espace métrique (X, d) est complet si toute suite de Cauchy de X est convergente.

Parties complètes. Une partie complète d'un espace métrique est fermée. Une partie d'un espace métrique complet est complète si et seulement si elle est fermée.

Exemples. Les espaces métriques $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets. Un espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

Théorème du point fixe. Une application $f : X \to X$ est dite *contractante* si elle est lipschitzienne de rapport k pour un certain $k < 1$.

Théorème du point fixe. *Si X est un espace métrique* complet *non vide, toute application contractante f de X dans X admet un unique point fixe. Pour tout $x \in X$, la suite récurrente (x_n) définie par $x_n = f^n(x)$ converge vers le point fixe de f.*

3.3 Espaces de Banach

Définition. Un espace de Banach est un espace vectoriel (réel ou complexe) normé complet.

Sous-espaces de Banach. On appelle sous-espace de Banach d'un espace de Banach E un sous-espace vectoriel fermé F de E (muni de la restriction à F de la norme de E).

Norme d'une application linéaire. Soient E et F des espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application linéaire. L'application f est continue si et seulement si elle est continue en 0 ce qui a lieu si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ avec $\|f(x)\| \leqslant k\|x\|$ pour tout $x \in E$.
La meilleure constante dans cette inégalité, est le nombre $\sup\{\|f(x)\|;\ \ x \in E,\ \|x\| \leqslant 1\}$ qui s'appelle la *norme* de f et se note $|||f|||$.
Pour $k \in \mathbb{R}_+$ on a $(\|f(x)\| \leqslant k\|x\|$ pour tout $x \in E) \iff (k \geqslant |||f|||)$.
Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des applications linéaires continues, alors $|||g \circ f||| \leqslant |||g|||.|||f|||$.

Proposition. *Soient E et F des espaces vectoriels normés. L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de toutes les applications linéaires de E dans F. L'application $|||\ |||$ est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$. Si F est complet, il en va de même pour $\mathcal{L}(E, F)$.*

3.4 Exercices

3.1 Exercice. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante telle que $f(0) = 0$ et, pour tous $s, t \in \mathbb{R}_+$, $f(s+t) \leqslant f(s) + f(t)$.

1. On suppose qu'il existe $s > 0$ tel que $f(s) = 0$. Montrer que f est nulle sur $\mathbb{R}_+$.
2. On suppose que f n'est pas nulle. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que l'application $(x, y) \mapsto f\big(d(x, y)\big)$ est une distance sur X.
3. Vérifier que les applications suivantes satisfont les hypothèses faites sur f :
   • $0 \mapsto 0$ et $t \mapsto 1$ si $t > 0$; • $t \mapsto t^\alpha$ avec $\alpha \in]0, 1[$; • $t \mapsto \min(t, 1)$; • $t \mapsto \dfrac{t}{t+1}$.
4. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante, continue, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $g(0) = 0$. On suppose que g' est décroissante. Montrer que g vérifie les hypothèses faites sur f.

3.2 Exercice. Soit F une partie fermée de $\mathbb{R}$.

1. On suppose que F est non vide et majorée. Montrer que $\sup F \in F$.
2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus F$. Montrer qu'il existe $a \in F \cup \{-\infty\}$ et $b \in F \cup \{+\infty\}$ tels que $a < x < b$ et $]a, b[\subset \mathbb{R} \setminus F$.
   Soient (E, N) un espace vectoriel normé et $f : F \to E$ une application continue.
3. Montrer qu'il existe une application $g : \mathbb{R} \to E$ qui prolonge f et qui est affine sur tout intervalle $[a, b]$ tel que $]a, b[\subset \mathbb{R} \setminus F$.
4. Montrer qu'une telle application g est continue.

3.3 Exercice. Soient K une partie compacte non vide d'un espace métrique (X, d) et U une partie ouverte de X contenant K. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in X$, on ait l'implication $d(x, K) < r \Rightarrow x \in U$. *Considérer l'application $x \mapsto d(x, X \setminus U)$ définie sur K.*

3.4 Exercice. Soient E un espace vectoriel normé et A, B des parties de E. On pose $A+B = \{x+y ; x \in A,\ y \in B\}$.

1. On suppose que A et B sont compactes. Montrer que $A + B$ est compacte.
2. On suppose que A est compacte et que B est fermée dans E. Montrer que $A + B$ est fermée dans E.

3.5 Exercice. Soient (X, d) un espace métrique compact et W une partie ouverte de $X \times X$ contenant la diagonale $\{(x, x) ; x \in X\}$ de X. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $(x, y) \in X \times X$, on ait l'implication $d(x, y) < r \Rightarrow (x, y) \in W$.

3.6 Exercice. Soient X un espace métrique, Y un espace métrique compact et $f : X \to Y$ une application dont le graphe $G \subset X \times Y$ (c'est-à-dire l'ensemble $\{\big(x, f(x)\big) ; x \in X\}$) est fermé dans $X \times Y$. Montrer que f est continue.

3.7 Exercice. Soit (X, d) un espace métrique.

1. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans X, non convergente. Montrer que, pour tout x la suite $\big(d(x, x_n)\big)$ est convergente vers un nombre $g(x) \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que l'application $x \mapsto g(x)^{-1}$ est continue de X dans $\mathbb{R}$ et n'est pas bornée.
2. On suppose que X n'est pas précompact. Soient alors $r > 0$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de X telle que, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, avec $n \neq m$, on ait $d(x_n, x_m) > r$. Montrer qu'il existe une unique fonction $f : X \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = n\big(\frac{r}{3} - d(x_n, x)\big)$ si $d(x_n, x) < \frac{r}{3}$ et $f(x) = 0$ si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $d(x_n, x) \geqslant \frac{r}{3}$. Montrer que f est continue et qu'elle n'est pas bornée.
   Rappelons qu'un espace métrique Y est dit précompact *si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de Y par des boules de rayon ε.*

Puisque X n'est pas précompact, il existe $r > 0$ tel que X ne soit pas réunion finie de boules de rayon r. On construit alors par récurrence une suite (x_n) telle que $x_n \notin \bigcup_{k<n} B(x_k, r)$. On aura donc $d(x_m, x_n) \geqslant r$ pour $n \neq m$.

3. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   a) l'espace X est compact ;
   b) pour tout espace métrique Y et toute application continue $f : X \to Y$, $f(X)$ est fermé dans Y ;
   c) toute fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$ est bornée.

   Rappelons qu'un espace métrique est compact si et seulement s'il est précompact et complet.

3.8 Exercice. Soient X un espace métrique compact non vide, Y un espace métrique et $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ une application continue. Démontrer que l'application $y \mapsto \sup\{f(x, y); x \in X\}$ de Y dans $\mathbb{R}$ est continue.

3.9 Exercice. Soient X, Y des espaces métriques. Montrer que la projection $X \times Y \to Y$ est fermée si et seulement si X est compact ou Y discret. *On rappelle qu'une application f d'un espace métrique A dans un espace métrique B est dite* fermée *(resp. ouverte) si l'image par f de toute partie fermée (resp. ouverte) de A est fermée (resp. ouverte) dans B.*

3.10 Exercice. Soit X un espace métrique. Montrer que la relation R définie par $x\, R\, y$ si et seulement s'il existe une application continue $\alpha : [0, 1] \to X$ telle que $\alpha(0) = x$ et $\alpha(1) = y$ est une relation d'équivalence sur X. Montrer que la classe d'équivalence d'un point $x \in X$ est la plus grande partie de X connexe par arcs contenant x.

3.11 Exercice. Une démonstration du théorème de Darboux. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Soit $I \subset U$ un intervalle. Notons $A = \{(x, y) \in I \times I; x < y\}$.

1. Montrer que A est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$.
2. Pour $(x, y) \in A$, posons $g(x, y) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}\cdot$ Montrer que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.
3. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.
   Ce résultat signifie que la dérivée de toute fonction dérivable possède la propriété de la valeur intermédiaire. Voir 6.11 pour deux autres démonstrations.

3.12 Exercice. Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$. Montrer que les composantes connexes de U sont ouvertes dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'ensemble des composantes connexes de U est dénombrable.

3.13 Exercice. Soit X un espace métrique. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) l'espace X est compact et connexe ;

(ii) pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de X, il existe un nombre entier $n \in \mathbb{N}$ et des éléments $i_1, \ldots, i_n$ de I tels que $\bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k} = X$ et tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k < n$, on ait $U_{i_k} \cap U_{i_{k+1}} \neq \emptyset$.

3.14 Exercice. Soit (E, N) un espace vectoriel normé.

1. Soient $x, y \in E$ et $r, s \in \mathbb{R}_+^*$ tels que la boule fermée de centre x et de rayon r soit contenue dans la boule fermée de centre y et de rayon s. Montrer que $N(y - x) + r \leqslant s$.
2. On suppose que E est complet. Soit (B_n) une suite décroissante de boules fermées. Montrer que l'intersection des B_n n'est pas vide.

3.15 Exercice. On se propose de donner une autre démonstration du théorème du point fixe. Soient (X, d) un espace métrique complet non vide et $f : X \to X$ une application lipschitzienne de rapport $k \in [0, 1[$. Pour $R \in \mathbb{R}_+$, on pose $A_R = \{x \in X; d\big(x, f(x)\big) \leqslant R\}$.

1. Montrer que $f(A_R) \subset A_{kR}$ et en déduire que pour tout $R \in \mathbb{R}_+^*$, A_R est une partie fermée non vide de X.
2. Soient $x, y \in A_R$. Montrer que $d(x,y) \leqslant 2R + d\big(f(x), f(y)\big)$ et en déduire que $\delta(A_R) \leqslant \dfrac{2R}{1-k}\cdot$
3. Montrer que A_0 n'est pas vide.

3.16 Exercice. (Théorème du point fixe à paramètres). Soient X un espace métrique, (Y, d) un espace métrique complet non vide et $f : X \times Y \to Y$ une application telle que

- pour tout $y \in Y$, l'application $x \mapsto f(x, y)$ est continue ;
- pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V de x et un nombre réel k tels que $0 \leqslant k < 1$ et, pour tout $(x', y, y') \in V \times Y \times Y$, on ait $d\big(f(x', y), f(x', y')\big) \leqslant k\, d(y, y')$.

1. Montrer que l'application f est continue.
2. Montrer qu'il existe une unique application $g : X \to Y$ telle que, pour tout $x \in X$, on ait $f\big(x, g(x)\big) = g(x)$.
3. Montrer que l'application g est continue.

3.5 Solutions

Exercice 3.1.

1. Soit $s > 0$ tel que $f(s) = 0$. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on a $f(ns) \leqslant nf(s)$, donc $f(ns) = 0$. Comme f est croissante, $f = 0$.
2. Pour $x, y, z \in X$, on a $f(d(x,y)) = 0 \iff d(x,y) = 0 \iff x = y$; $f(d(x,y)) = f(d(y,x))$; enfin
$$\begin{aligned} f(d(x,z)) &\leqslant f(d(x,y)+d(y,z)) && \text{puisque } f \text{ est croissante} \\ &\leqslant f(d(x,y)) + f(d(y,z)) \end{aligned}$$
3. Ces applications sont toutes croissantes
   - Supposons que $f(0) = 0$ et $f(s) = 1$ pour $s > 0$. On a $0 = f(0+0) \leqslant f(0) + f(0) = 0$. Si s et t ne sont pas tous deux nuls, on a $f(s) + f(t) \geqslant 1 = f(s+t)$.
   - Soit $u \in [0,1]$ tel que $s = (s+t)u$. On a alors $t = (s+t)(1-u)$. Pour $\alpha \in]0,1[$, on a $u \leqslant u^\alpha$ et $(1-u) \leqslant (1-u)^\alpha$, donc $(s+t)^\alpha = (u + (1-u))(s+t)^\alpha \leqslant (u^\alpha + (1-u)^\alpha)(s+t)^\alpha = s^\alpha + t^\alpha$.
   - Supposons que $f(s) = \min(s,1)$. Si $s, t \in [0,1]$, on a bien $\min(s+t,1)$. Si l'un des deux est > 1, alors $1 = \min(s+t,1) \leqslant \min(s,1) + \min(t,1)$.
   - Pour $s, t \in \mathbb{R}_+$, on a $\dfrac{s}{s+t+1} \leqslant \dfrac{s}{s+1}$ et $\dfrac{t}{s+t+1} \leqslant \dfrac{t}{t+1}$, donc $\dfrac{s+t}{s+t+1} \leqslant \dfrac{s}{s+1} + \dfrac{t}{t+1}$.
4. Fixons s et posons $h(t) = g(t) + g(s) - g(s+t)$. L'application h est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $h'(t) = g'(t) - g'(t+s) \leqslant 0$. Comme $h(0) = 0$, on a $h(t) \leqslant 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 3.2.

1. Posons $b = \sup F$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b - 2^{-n}$ ne majore pas F (puisque b est le plus petits des majorants de F). Il existe donc $x_n \in F$ avec $b - 2^{-n} < x_n$. Comme $x_n \in F$ et b majore F, il vient $b - 2^{-n} < x_n \leqslant b$. On en déduit que la suite (x_n) converge vers b et, puisque F est fermé, il vient $b \in F$.
2. Remarquons que a et b vérifient ces propriétés, puisque $]a, x] \cap F = \emptyset$ et $a \in F$ ou $a = -\infty$, on a $a = \sup F \cap]-\infty, x]$ (rappelons que $\sup \emptyset = -\infty$). De même $b = \inf F \cap [x, +\infty[$.

   Posons $a = \sup F \cap]-\infty, x]$. Puisque $F \cap]-\infty, x]$ est majoré (par x) et fermé, il vient $a = -\infty$ (si $F \cap]-\infty, x] = \emptyset$), ou $a \in F \cap]-\infty, x]$ (par la question 1.). En particulier, puisque $x \notin F$, il vient $a < x$.

   De même, posons $b = \inf F \cap [x, +\infty[$. On a encore $b \in F$ ou $b = +\infty$ et $b > x$.

   Pour $y \in]a, b[$, on a $y \notin F \cap]-\infty, x]$, puisque $y > a$ et $a = \sup F \cap]-\infty, x]$; de même $y \notin F \cap [x, +\infty[$ puisque $y < b = \inf F \cap [x, +\infty[$. Donc $y \notin F$.
3. Si $F = \emptyset$, on posera $g(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   Supposons donc $F \neq \emptyset$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus F$, et soient a, b définis comme dans la question 2. Si x majore F, on a $b = +\infty$. On posera $g(x) = f(a)$; remarquons qu'alors $a = \sup F$. De même, si x minore F, on posera $g(x) = f(\inf F)$. Enfin, si x ne majore ni ne minore F, on pose $a = \sup F \cap]-\infty, x]$ et $b = \inf F \cap [x, +\infty[$. On considérons alors l'application affine $\ell : \mathbb{R} \to E$ telle que $\ell(a) = f(a)$ et $\ell(b) = f(b)$. On pose $g(x) = \ell(x)$; autrement dit $g(x) = \dfrac{b-x}{b-a} f(a) + \dfrac{x-a}{b-a} f(b)$. Remarquons que si I est un intervalle tel que $\mathring{I}$ soit non vide et contenu dans $\mathbb{R} \setminus F$, les éléments $a = \sup F \cap]-\infty, x]$ et $b = \inf F \cap [x, +\infty[$, ne dépendent pas de $x \in I$ de sorte que la fonction g définie ci-dessus est bien affine sur I.
4. Remarquons que toute fonction affine $t \mapsto t\xi + \eta$ est lipschitzienne (de rapport $N(\xi)$ donc continue sur $\mathbb{R}$.

   Si $x \notin F$, la fonction g affine au voisinage de x est continue en x.

   Si $x \in F$, distinguons deux cas :
   - ou bien il existe $\alpha > 0$ tel que $]x - \alpha, x[\subset \mathbb{R} \setminus F$, dans ce cas g est affine sur $[x - \alpha, x]$ donc est continue à gauche en x ;

- sinon, soit $\varepsilon > 0$; il existe $\alpha > 0$ tel que pour $y \in F$, tel que $|y-x| < \alpha$ on ait $N(f(x))-f(y)) < \varepsilon$; dans $]x-\alpha, x[\cap F$ il existe un élément x'. Pour tout $y \in [x', x]$, $g(y)$ est dans l'enveloppe convexe de $\{f(z);\ z \in [x', x] \cap F\}$ elle-même contenue dans la boule ouverte de centre $f(x)$ et de rayon ε. Cela prouve que dans ce cas aussi g est continue à gauche en x.

On démontre de même que g est continue à droite en x.

Exercice 3.3. On peut supposer que $X \neq U$, sinon il n'y a rien à démontrer.

L'application $f : x \mapsto d(x, X \setminus U)$ est continue (elle est lipschitzienne de rapport 1). Comme $X \setminus U$ est fermé, on a $f(x) = 0 \iff x \in X \setminus U$ (en général, on $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$). La fonction f atteint son minimum en un point a du compact K. Posons $r = f(a)$. Comme $a \in U$, on a donc $r > 0$.

Soit $x \in X$; si $x \in X \setminus U$ alors pour tout $y \in K$, on a $d(x, y) \geqslant d(y, X \setminus U) \geqslant f(a) = r$, donc $d(x, K) \geqslant r$. Par contraposée, $d(x, K) < r \Rightarrow x \in U$.

Exercice 3.4.

1. $A + B$ est l'image par l'application continue $(x, y) \mapsto x + y$ du compact $A \times B$.
2. Soit $z \in \overline{A + B}$. Il existe une suite (z_n) dans $A + B$ qui converge vers z. Par définition, il existe $x_n \in A$ et $y_n \in B$ tels que $z_n = x_n + y_n$. Comme A est compacte, il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite $(x_{\varphi(n)})$ converge vers un point $a \in A$. La suite $(z_{\varphi(n)})$, extraite de la suite (z_n) converge vers z. Il s'ensuit que la suite $(z_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)})$, c'est-à-dire la suite $(y_{\varphi(n)})$ converge vers $z - a \in E$. Comme B est fermé, il vient $z - a \in B$, donc $z \in A + B$.
   NB. Les ensembles $A = \{n + 2^{-n};\ n \in \mathbb{N}^*\}$ et $\mathbb{Z}$ sont fermés dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2^{-n} \in A + \mathbb{Z}$ et $0 \notin A + \mathbb{Z}$, donc $A + \mathbb{Z}$ n'est pas fermé.

Exercice 3.5. Notez que cela résulte de l'exercice 3.3...

L'ensemble $C = X \times X \setminus U$ est fermé dans $X \times X$; il est compact. S'il n'est pas vide, la fonction continue $(x, y) \mapsto d(x, y)$ y atteint sa borne inférieure r. Pour tout $(x, y) \in C$, on a $x \neq y$, donc $d(x, y) \neq 0$. Il vient $r > 0$. Pour $(x, y) \in X \times X$, on a $(x, y) \in C \Rightarrow d(x, y) \geqslant r$; donc $d(x, y) < r \Rightarrow (x, y) \in U$.

Exercice 3.6. Soit (x_n) une suite de points de X convergeant vers un point $x \in X$. Nous devons démontrer que la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$. Pour cela, puisque Y est compact, il suffit de démontrer que toute suite extraite convergente de la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$. Soit donc $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante, telle que la suite $(f(x_{\varphi(n)}))$ converge vers un point y de Y. Alors la suite $(x_{\varphi(n)}, f(x_{\varphi(n)}))$ converge vers (x, y). Comme G est fermé, il vient $(x, y) \in G$ donc $y = f(x)$.

NB. Ce résultat ne se généralise pas au cas où Y n'est pas supposé compact. Par exemple, le graphe de l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(0) = 0$ et $f(x) = 1/x$ pour $x \neq 0$ est fermé : c'est l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 1\} \cup \{(0, 0)\}$.

Exercice 3.7.

1. Pour tout $x \in X$, l'application $y \mapsto d(x, y)$ est 1-lipschitzienne (d'après l'inégalité triangulaire). Il s'ensuit que la suite $(d(x, x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc convergente. L'application g est limite de la suite de fonctions 1-lipschitziennes $x \mapsto d(x, x_n)$: elle est 1-lipschitzienne (en effet pour tout $(x, y) \in X^2$, on a $|g(x) - g(y)| = \lim |d(x, x_n) - d(y, x_n)| \leqslant d(x, y)$), donc continue ([4]). Puisque la suite (x_n) n'est pas convergente, la fonction g ne s'annule pas. (En effet $g(y) = 0 \iff d(y, x_n) \to 0 \iff (x_n) \to y$). La fonction $1/g$ est donc bien définie et continue.
   Puisque la suite (x_n) est de Cauchy, on a $\lim g(x_n) = 0$ (en effet $g(x_n) \leqslant \sup\{d(x_p, x_q);\ p, q \geqslant n\}$ et ce sup tend vers 0), donc $g(x_n)^{-1} \to \infty$: la fonction $1/g$ n'est pas bornée.

4. On peut aussi démontrer que la suite de fonctions $x \mapsto d(x, x_n)$ converge *uniformément* vers g.

2. Notons U_n la boule ouverte de centre x_n et de rayon $r/2$ et $V = \{x \in X;\ \inf d(x, x_n) > r/3\}$. La fonction $x \mapsto \inf d(x, x_n) = d(x, \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\})$ est 1-lipschitzienne donc continue. Ces parties forment donc un recouvrement ouvert de X. Il suffit de démontrer que f est continue sur chacun de ces ouverts. Sur V, la fonction f est nulle, donc elle y est continue. Sur U_n, on a $f(x) = \max\Big(0, n\big(\frac{r}{3} - d(x_n, x)\big)\Big)$; elle y est continue. Puisque $f(x_n) = \frac{nr}{3}$, la fonction f n'est pas bornée.
3. L'image d'un compact par une application continue est compacte donc fermée, d'où (i)$\Rightarrow$(ii).
   Si $f : X \to \mathbb{R}$ est une application continue non bornée, la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{1 + f(x)^2}$ est continue, ne s'annule pas, mais $0 \in \overline{g(X)}$, donc (ii)$\Rightarrow$(iii).
   On peut construire une application continue et non bornée de X dans $\mathbb{R}$ si X n'est pas complet - par (a), ou s'il n'est pas précompact par (b). D'où (iii)$\Rightarrow$(i).

Exercice 3.8. Pour $y \in Y$, posons $g(y) = \sup\{f(x, y); x \in X\}$.

Pour tout $y \in Y$, l'application continue $x \mapsto f(x, y)$ atteint son maximum sur le compact X : il existe un point $x \in X$ tel que $f(x, y) = g(y)$.

Soit (y_n) une suite de points de Y convergeant vers un point $y \in Y$. Soient $x \in X$ et (x_n) une suite de points de X tels que $f(x, y) = g(y)$ et $f(x_n, y_n) = g(y_n)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue, on a $\lim f(x, y_n) = f(x, y)$; donc il existe n_0, tel que pour $n \geqslant n_0$, on ait $g(y_n) \geqslant f(x, y_n) > f(x, y) - \varepsilon = g(y) - \varepsilon$.

Supposons que l'ensemble $Z = \{n \in \mathbb{N};\ g(y_n) \geqslant g(y) + \varepsilon\}$ ne soit pas majoré. De la suite $(x_n)_{n \in Z}$ dans le compact X, on peut extraire une suite convergente. Il existe donc une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to Z$ telle que la suite $(x_{\varphi(n)})$ soit convergente vers un point $z \in X$. On a alors $g(y) \geqslant f(z, y) = \lim f(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)})$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \geqslant g(x) + \varepsilon$, et on arrive à une contradiction.

L'ensemble Z étant majoré, il existe n_1 que l'on peut supposer $\geqslant n_0$ qui le majore. Pour $n > n_1$, on a $g(y) + \varepsilon > g(y_n) > g(y) - \varepsilon$. On en déduit que $g(y_n)$ tend vers $g(y)$, donc g est continue.

Exercice 3.9. Si Y est discret, toute partie de Y est fermée, donc toute application à valeurs dans Y est fermée !

Supposons que X soit compact et soit F une partie fermée de $X \times Y$. Soit y_n une suite de points de $p(F)$ (où $p : X \times Y \to Y$ est la projection) qui converge vers un point $y \in Y$. On doit démontrer que $y \in p(F)$. Puisque $y_n \in p(F)$, il existe $x_n \in X$ tel que $(x_n, y_n) \in F$. Comme X est compact, il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite $(x_{\varphi(n)})$ soit convergente vers un point $x \in X$. Alors la suite $(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)})$ converge vers (x, y) ; puisque F est fermé, il vient $(x, y) \in F$, donc $y \in p(F)$.

Si X n'est pas compact et Y n'est pas discret, il existe
• une suite (x_n) de points de X dont aucune suite extraite ne converge ;
• une suite (y_n) de points de Y convergeant vers un point $y \in Y$ telle que, pour tout n, on ait $y_n \neq y$.
Posons $F = \{(x_n, y_n);\ n \in \mathbb{N}\}$. Si F n'était pas fermée, il existerait une suite (z_k) de points de F convergeant vers un point z qui n'est pas dans F ; alors il existerait une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $z_k = (x_{\varphi(k)}, y_{\varphi(k)})$; comme la limite de la suite z_k n'étant pas un point de cette suite, chaque valeur de la suite serait prise au plus un nombre fini de fois, donc on aurait $\lim \varphi(k) = +\infty$. Quitte à extraire une sous-suite, on pourrait alors supposer que φ est strictement croissante. Or la suite $(x_{\varphi(k)})$ ne peut pas converger par hypothèse. Il en résulte que F est fermé

Or $p(F) = \{(y_n);\ n \in \mathbb{N}\}$ qui n'est pas fermé puisque $y \notin p(F)$, donc p n'est pas fermée.

Exercice 3.10.

- L'application constante définie par $\alpha(t) = x$ pour tout $t \in [0,1]$ est continue, donc $x\,R\,x$: on en déduit que R est *réflexive.*
- Soit $\alpha : [0,1] \to X$ une application continue telle que $\alpha(0) = x$ et $\alpha(1) = y$; posons $\beta(t) = \alpha(1-t)$; c'est une application continue et l'on a $\beta(0) = y$ et $\beta(1) = x$. On en déduit que R est *symétrique.*
- Soient $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ des applications continues telle que $\alpha(0) = x$ et $\alpha(1) = y = \beta(0)$ et $\beta(1) = z$. Notons $\gamma : [0,1] \to X$ l'application définie par $\gamma(t) = \alpha(2t)$ si $0 \leqslant t \leqslant 1/2$ et $\gamma(t) = \beta(2t-1)$ si $1/2 \leqslant t \leqslant 1$. Cette application est continue en tout point de $[0,1/2[$ et de $]1/2,1]$; elle est continue à gauche et à droite en $1/2$; elle est donc continue. On en déduit que R est *transitive.*

Pour $x \in X$, notons A_x la classe de x pour la relation d'équivalence R ($A_x = \{y \in X;\ x\,R\,y\}$).

Si $B \subset X$ est une partie connexe par arcs contenant x, pour tout $y \in B$, il existe une application continue $\alpha : [0,1] \to B$ telle que $\alpha(0) = x$ et $\alpha(1) = y$ (car B est connexe par arcs). L'application α est une application continue de $[0,1]$ dans X, donc $y \in A_x$. Il vient $B \subset A_x$.

Il reste à démontrer que A_x est connexe par arcs. Pour $y, z \in A_x$, il existe une application continue $\alpha : [0,1] \to X$ telle que $\alpha(0) = y$ et $\alpha(1) = z$; remarquons que pour tout $s \in [0,1]$, on a $\alpha(s)\,R\,y$: l'application $\beta_s : t \mapsto \alpha(st)$ est continue et joint y à $\alpha(s)$. Par transitivité, il vient $\alpha(s) \in A_x$. Alors α est un chemin tracé dans A_x qui joint y à z. Cela prouve que A_x est connexe par arcs.

Exercice 3.11.

1. L'ensemble A est convexe, donc connexe.
2. D'après le théorème des accroissements finis, pour tout $(x,y) \in A$, il existe $z \in I$ tel que $g(x,y) = f'(z)$. Il vient $g(A) \subset f'(I)$. Enfin, pour tout $x \in I$, on a $f'(x) = \lim\limits_{y \to x^+} g(x,y)$, donc $f'(I) \subset \overline{g(A)}$.
3. Puisque g est continue et A est connexe, $g(A)$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$: c'est un intervalle. L'ensemble $f'(I)$ qui est coincé entre $g(A)$ est son adhérence est un intervalle avec les mêmes extrémités.

Donnons deux autres démonstrations du théorème de Darboux. Il s'agit de démontrer que si $a < b$ sont tels que $[a,b] \subset U$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ entre $f'(a)$ et $f'(b)$, il existe $x \in [a,b]$ tel que $f'(x) = \xi$.

1. Posons $g(a) = f'(a)$ et pour $x \in\ ]a,b]$, posons $g(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Posons aussi $h(b) = f'(b)$ et pour $x \in [a,b[$, posons $h(x) = \dfrac{f(b) - f(x)}{b - x}$. Les fonctions g et h sont continues parce que f l'est et par définition de f'. Donc $g([a,b])$ et $h([a,b])$ sont des intervalles. Or $g(b) = h(a)$, donc $J = g([a,b]) \cup h([a,b])$ est un intervalle. Comme $f'(a) \in J$ et $f'(b) \in J$, il vient $\xi \in J$. Par ailleurs, d'après le théorème des accroissements finis, pour tout $x \in\ ]a,b]$, il existe $y \in\ ]a,x[$ tel que $g(x) = f'(y)$ et pour tout $x \in [a,b[$, il existe $y \in\ ]x,b[$ tel que $g(x) = f'(y)$. En d'autres termes $J \subset f'([a,b]$.
2. Quitte à échanger f en $-f$, on peut supposer que $f'(a) < \xi < f'(b)$. Posons $g(x) = f(x) - \xi x$. Comme $g'(a) < 0$, pour $x \in\ ]a,b[$ assez proche de a, on a $g(x) < g(a)$; de même, comme $g'(b) > 0$, pour $x \in\ ]a,b[$ assez proche de b, on a $g(x) < g(b)$. On en déduit que le minimum de g sur $[a,b]$ - qui est atteint d'après la compacité de $[a,b]$ - est atteint en un point x distinct de a et de b. Il vient $g'(x) = 0$, donc $f'(x) = \xi$.

Exercice 3.12. Notons I l'ensemble des composantes connexes de U.

Soit A une composant connexe de U ; pour tout $x \in A$, puisque U est ouvert, il contient une boule ouverte B centrée en U. L'ensemble B est convexe donc connexe et contient x ; il est donc contenu dans la composante connexe A de x dans U. Cela prouve que A est ouvert.

Comme $\mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$, on a $\mathbb{Q} \cap A \neq \emptyset$. Posons $D = U \cap \mathbb{Q}^n$; c'est un ensemble dénombrable ; l'application qui à $x \in D$ associe sa composante connexe est surjective de D sur I donc I est dénombrable.

Exercice 3.13. Si X satisfait (ii),
- de tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un recouvrement fini, donc X est compact ;
- si U_1 et U_2 sont deux parties ouvertes non vides distinctes de X et telles que $U_1 \cup U_2 = X$, alors en appliquant (ii) à $I = \{1, 2\}$, on trouve une suite finie $i_1, \ldots, i_n$ d'éléments de $\{1, 2\}$, avec $\bigcup U_{i_k} = X$, donc la suite n'est pas constante : il existe k tel que $i_k \neq i_{k+1}$, d'où $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. On en déduit que X n'admet pas de partition en deux ouverts : il est connexe.

Supposons inversement que X soit connexe et compact, et soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X. Puisque X est compact, il existe une partie finie J de I telle que $\bigcup\limits_{i\in J} U_i = X$. On raisonne par récurrence sur le nombre d'éléments de J.

- Si J possède un seul élément i, alors $X = U_i$. Prendre dans ce cas $n = 1$ ([5]).
- Supposons donc que J possède $m \geqslant 2$ éléments et que pour tout recouvrement $(V_k)_{k\in K}$ avec K possédant $m-1$ éléments il existe un nombre entier $n \in \mathbb{N}$ et des éléments $k_1, \ldots, k_n$ de K tels que $\bigcup\limits_{\ell=1}^{n} U_{k_\ell} = X$ et tels que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant \ell < n$, on ait $U_{k_\ell} \cap U_{k_{\ell+1}} \neq \emptyset$.
  S'il existe $i \in J$ tel que $U_i = \emptyset$, on peut remplacer J par $K = J \setminus \{i\}$ et appliquer l'hypothèse de récurrence.
  Sinon, soit $i \in J$ tel que $U_i \neq \emptyset$. Si $U_i = X$, on peut prendre prendre $n = 1$ et $i_1 = i$. Supposons donc $U_i \neq X$. On a $X = U_i \cup \bigcup\limits_{j\neq i} U_j$, et X étant connexe, ces deux ouverts ne sont pas disjoints, donc il existe $i' \in J$ avec $i' \neq i$ tel que $U_i \cap U_{i'} \neq \emptyset$. Soit alors un élément $k \notin J$ et posons $K = (J \setminus \{i, i'\}) \cup \{k\}$ et $U_k = U_i \cup U_{i'}$. Par hypothèse de récurrence, il existe n et une suite finie $(i_1, \ldots, i_n) \in K^n$ vérifiant les conclusions de (ii).
  On construit alors une suite finie $(j_1, \ldots, j_N)$ de la façon suivante : chaque fois que dans la liste $(i_1, \ldots, i_n)$ apparaît k, on le remplace par i, par i', par i, i' ou par i', i selon que le prédécesseur et le successeur (qui rencontrent tous deux U_k) rencontrent respectivement tous les deux U_i, tous les deux $U_{i'}$, le premier U_i le second $U_{i'}$, ou le premier $U_{i'}$ le second U_i. Si l'on n'a pas $\bigcup\limits_{\ell=1}^{N} U_{j_\ell} = X$ c'est que dans la suite ainsi formée apparaît U_i mais pas $U_{i'}$ (ou le contraire) ; dans ce cas, on remplace un i dans cette nouvelle suite par i, i', i.

Exercice 3.14.

1. Si $x = y$, on a $\overline{B}(x, r) \subset \overline{B}(x, s)$, donc $r \leqslant s$ ([6]). Si $x \neq y$, posons $z = x + \dfrac{r}{N(x-y)}(x-y)$. On a $N(z-x) = r$, donc $z \in \overline{B}(x, r)$; de plus $z - y = \Big(1 + \dfrac{r}{N(x-y)}\Big)(x-y)$, donc $N(z-y) = N(x-y) + r$. Puisque $z \in \overline{B}(y, s)$, il vient $N(y-x) + r \leqslant s$.
2. Écrivons $B_n = \overline{B}(x_n, r_n)$. On déduit de (a), que, pour $n \leqslant m$, on a $N(x_n - x_m) \leqslant r_n - r_m$; la suite r_n est décroissante et minorée par 0, donc convergente, l'inégalité $N(x_n - x_m) \leqslant r_n - r_m$ implique donc que la suite (x_n) est de Cauchy. Puisque E est complet, elle est convergente ; notons x sa limite. Pour $m \geqslant n$, on a $x_m \in B_m \subset B_n$; donc la suite $(x_k)_{k\geqslant n}$ étant dans B_n, qui est fermé, sa limite x est dans B_n ; cela prouve que $\bigcap B_n \neq \emptyset$.

Exercice 3.15.

1. Si $x \in f(A_R)$, il existe $y \in A_R$ tel que $y = f(x)$. On a alors $d(y, f(y) = d(f(x), f(y)) \leqslant kd(x, y) = kd(x, f(x)) \leqslant kR$, donc $y \in A_{kR}$.
   On en déduit que si $A_R \neq \emptyset$, alors $A_kR \neq \emptyset$. Puisque $X \neq \emptyset$, il existe $x_0 \in X$. Posons $R_0 = d(x_0, f(x_0))$; on a $x_0 \in A_{R_0}$. Donc $A_{R_0} \neq \emptyset$; on en déduit par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

5. Si $X = \emptyset$, prendre $n = 0$.
6. On doit ici supposer que E n'est pas réduit à l'élément nul.

on a $A_{k^nR_0} \neq \emptyset$. Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$; comme $k^nR_0 \to 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $k^nR_0 \leqslant R$, donc A_r contient $A_{k^nR_0}$ et n'est pas vide.

L'application $\varphi : x \mapsto d(x, f(x))$ est continue de X dans $\mathbb{R}$ (elle est lipschitzienne de rapport $1 + k$), donc A_R qui est égal à $\varphi^{-1}([0, R])$ est fermé.

2. Si $x, y \in A_R$, on a $d(x, y) \leqslant d(x, f(x)) + d(f(x), f(y)) + d(f(y), y) \leqslant 2R + d(f(x) + f(y))$; or $d(f(x) + f(y)) \leqslant kd(x, y)$, donc $(1 - k)d(x, y) \leqslant 2R$; donc $\dfrac{2R}{1-k}$ majore $\{d(x, y);\ (x, y) \in A_R^2\}$ et est donc plus on a bien $\dfrac{2R}{1-k} \geqslant \sup\{d(x, y);\ (x, y) \in A_R^2\} = \delta(A_R)$.

3. Par définition, on a $A_0 = \{x \in X;\ x = f(x)\} = \{x \in X; \forall n \in \mathbb{N}^*,\ d(x, f(x)) \leqslant 1/n\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{1/n}$.
Comme X est complet, une intersection d'une suite décroissante de parties fermées non vides dont le diamètre tend vers 0 n'est pas vide, donc $A_0 \neq \emptyset$. En d'autres termes f possède un point fixe.

Exercice 3.16.

1. Soient $(x_0, y_0) \in X \times Y$ et $\varepsilon > 0$. Par la continuité de l'application $x \mapsto f(x, y_0)$, il existe un voisinage V de x_0 tel que, pour $x \in V$ on ait $d(f(x_0, y_0), f(x, y_0)) < \varepsilon/2$. Or, pour tout $x \in X$, l'application $y \mapsto f(x, y)$ étant contractante, on a, pour $x \in V$, $d(f(x_0, y_0), f(x, y)) \leqslant d(f(x_0, y_0), f(x, y_0)) + d(f(x, y_0), f(x, y)) < \varepsilon/2 + d(y_0, y)$. On en déduit que si $d(y_0, y) < \varepsilon/2$, et $x \in V$, on a $d(f(x_0, y_0), f(x, y)) < \varepsilon$.
2. L'application $\varphi_x : y \mapsto f(x, y)$ possède un unique point fixe - d'après le théorème du point fixe.
3. Soient $x_0 \in X$ et $\varepsilon > 0$; posons $y_0 = g(x_0)$. Soit V un voisinage de x_0 et $k < 1$ tels que pour $x \in V$ et $y, z \in Y$ on ait $d\big(f(x, y), f(x, y)\big) \leqslant k\, d(y, z)$. On a $f(x_0, y_0) = y_0$. Par continuité de $x \mapsto f(x, y_0)$, il existe un voisinage W de x_0 tel que pour $x \in W$ on ait $d\big(f(x, y_0), y_0\big) \leqslant \varepsilon(1 - k)$. Pour $x \in V \cap W$, on a $d\big(f(x, y_0), f(x, g(x))\big) \leqslant kd(y_0, g(x))$. Or $f(x, g(x)) = g(x)$. Il vient
$$d\big(y_0, g(x)\big) \leqslant d\big(y_0, f(x, y_0)\big) + d\big(f(x, y_0), g(x)\big) \leqslant kd\big(y_0, g(x)\big) + \varepsilon(1 - k),$$
donc $d\big(y_0, g(x)\big) < \varepsilon$.