Analyse-Résumés et exercices

1 Suites de nombres réels

Les nombres et les opérations sur les nombres sont des objets que l'on rencontre bien sûr très tôt en mathématiques. On rencontre d'abord les nombres entiers positifs, puis, comme ils sont insuffisants pour la soustraction et la division, on est amené à introduire les entiers relatifs puis les nombres rationnels. Le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est insuffisant : il manque des points qui auraient dû y être : $\mathbb{Q}$ n'est pas complet... On est ainsi amené à introduire le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. On n'aura pas tout à fait fini puisque des idées d'algèbre et géométrie nous conduiront ensuite à construire le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Un nombre réel peut être donné comme solution d'une équation plus ou moins simple :
- $\sqrt{2}$ est solution de l'équation $x^2 = 2$;
- π de l'équation $\sin x = 0$...

Par contre tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.

Ainsi, on peut construire $\mathbb{R}$ comme l'ensemble des limites de nombres rationnels ($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$). Cette idée se réalise de la façon suivante.
- on sait quand une suite de nombres rationnels devrait avoir une limite : cela a lieu si et seulement si c'est une suite de Cauchy.
- on sait quand deux suites de nombres rationnels devrait avoir la même limite : cela a lieu si et seulement si leur différence tend vers 0.

La construction mathématique est alors la suivante. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites de Cauchy de nombres rationnels (c'est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ des suites de nombres rationnels) ; sur $\mathcal{C}$ on définit une relation R en écrivant

$$(u_n)R(v_n) \iff \lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0.$$

On démontre que R est une relation d'équivalence et on définit $\mathbb{R}$ comme le quotient d'équivalence $\mathcal{C}/R$. Il reste alors à définir les opérations (addition, multiplication, relation d'ordre $\leqslant$) sur $\mathbb{R}$, plonger $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$...

Une autre façon de concevoir $\mathbb{R}$ est de *choisir* pour chaque nombre réel une une suite de nombres rationnels convergeant vers ce nombre. Par exemple, comme notre façon de compter est basée sur le nombre 10, un nombre réel est limite de la suite de ses développements décimaux. On aurait pu évidemment choisir un développement en base b pour un entier $b \geqslant 2$ quelconque... Mais comme nos mains nous offrent dix doigts, c'est le nombre dix qui a été choisi !

1.1 Développement décimal des nombres réels

Écriture décimale des nombres entiers positifs. Pour décrire les nombres entiers, on pourrait imaginer :
- utiliser un symbole différent pour chaque nombre - cela est évidemment impossible : il faudrait une infinité de symboles différents...

- mettre une barre pour chaque entier - cette méthode est utilisée lors de dépouillements de scrutins et certaines rencontres sportives ; on regroupe alors par paquets de cinq ou de dix ; cependant, pour des nombres moyennement grands, cette méthode est fastidieuse tant à l'écriture qu'à la lecture.

L'écriture décimale permet avec dix symboles de pouvoir exprimer de façon relativement compacte n'importe quel nombre entier.

Nous ne rappelons pas ici le principe de cette écriture, ni les algorithmes des opérations dans cette écriture. Rappelons par contre les tests de division que cette écriture permet.

Division par 10^n. Un nombre entier est divisible par 10^n si et seulement si les n derniers chiffres de son écriture décimale sont nuls. Le reste d'un nombre entier dans la division par 10^n est le nombre obtenu en conservant les n derniers chiffres de son écriture décimale. On en déduit qu'un nombre est divisible par 2^n (ou 5^n) si et seulement si le nombre obtenu en conservant les n derniers chiffres de son écriture décimale l'est.

Division par 3, par 9. Tout nombre entier est congru modulo 9, donc modulo 3 à la somme de ses chiffres (dans l'écriture décimale) : c'est la base de la *preuve par* 9. En effet 10 est congru à 1 modulo 9, donc 10^k est congru à 1 modulo 9 pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, 10^k$ est congru modulo 9 à $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$.

Division par 11. Remarquons que 10 est congru à -1 modulo 11, donc 10^k est congru à $(-1)^k$ modulo 11 pour tout $k \in \mathbb{N}$. On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, 10^k$ est congru modulo 11 à $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$. On trouve ainsi facilement le reste modulo 11 d'un nombre entier.

Nombres décimaux - approximation décimale des nombres réels

Définition. Un nombre $x \in \mathbb{R}$ est dit *décimal* s'il existe $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = m\, 10^{-n}$. En particulier, un nombre décimal est rationnel.

Approximation décimale. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Posons $p_n = E(10^n x)$ (où E désigne la partie entière), $a_n = 10^{-n} p_n$ et $b_n = 10^{-n}(p_n + 1)$, de sorte que $p_n \in \mathbb{Z}$ et $a_n \leqslant x < b_n$. Les nombres a_n et b_n sont décimaux ; le nombre a_n est appelé l'*approximation décimale par défaut* de x à l'ordre n. Si $x \neq a_n$, on dit que b_n est l'*approximation décimale par excès* de x à l'ordre n.

Comme $10p_n \leqslant 10^{n+1}x < 10(p_n + 1)$, il vient $10p_n \leqslant p_{n+1} < 10(p_n + 1)$; en particulier, la suite (a_n) est croissante ; et puisque $p_{n+1} < 10p_n$, il vient $p_{n+1} + 1 \leqslant 10(p_n + 1)$, donc la suite (b_n) est décroissante. Enfin $b_n - a_n = 10^{-n}$, donc les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes ; puisque pour tout n on a $a_n \leqslant x \leqslant b_n$, la limite commune de ces deux suites est x.

Discutons quelques aspects de cette approximation décimale :

Densité de $\mathbb{Q}$. L'approximation décimale nous permet d'écrire tout nombre réel comme limite d'une suite de nombres décimaux. En d'autres termes, les nombres décimaux forment un sous-ensemble dense de $\mathbb{R}$; on en déduit *a fortiori* que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Développement décimal propre. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre entier $c_n = p_n - 10p_{n-1}$ est compris entre 0 et 9. C'est la *n-ième décimale de x après la virgule.* On a (par récurrence sur n) $a_n = a_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k 10^{-k}$ et, puisque x est la limite des a_k, il vient

$$x = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k 10^{-k}.$$

Cette expression s'appelle le *développement décimal propre* de x. On obtient alors l'*écriture décimale (infinie) de x* sous la forme

$$x = a_0, c_1c_2c_3\dots$$

b) Inversement, donnons-nous une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres entiers relatifs tels que pour $n \geqslant 1$ on ait $0 \leqslant c_n \leqslant 9$. La série (à termes positifs) de terme général $(c_k 10^{-k})_{k\geqslant 1}$ est convergente car majorée par la série géométrique $\sum 9\,10^{-k}$. Posons $x = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k 10^{-k}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, le nombre $q_n = \sum_{k=0}^{n} c_k 10^{n-k}$ est entier et l'on a

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} c_k 10^{n-k} \leqslant 9 \sum_{k=1}^{+\infty} 10^{-k} = 1.$$

Cette inégalité est stricte à moins que $c_k = 9$ pour tout $k > n$.

Distinguons deux cas :

- Si l'ensemble des k tels que $c_k \neq 9$ est infini, le développement décimal propre de x est

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k 10^{-k}.$$

- Supposons qu'à partir d'un certain rang, tous les c_k sont égaux à 9. Notons $m \in \mathbb{N}$ le plus petit entier tel que $c_k = 9$ pour tout $k > m$; posons $c'_k = c_k$ pour $k < m$ et $c'_m = 1 + c_m$. Le développement décimal propre de x est

$$x = \sum_{k=0}^{m} c'_k 10^{-k}.$$

Dans ce dernier cas, l'expression $x = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k 10^{-k} = \sum_{k=0}^{m} c_k 10^{-k} + \sum_{k=m+1}^{+\infty} 9.10^{-k}$ s'appelle le *développement décimal impropre* de x.

Une bijection. Notons $A = \mathbb{Z} \times \{0, \dots, 9\}^{\mathbb{N}^*}$ l'ensemble des suites $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres entiers relatifs tels que pour $n \geqslant 1$ on ait $0 \leqslant c_n \leqslant 9$. Notons aussi $A' \subset A$ l'ensemble des suites (c_n) comportant une infinité de termes distincts de 9. On a construit une application $f : \mathbb{R} \to A$ qui à $x \in \mathbb{R}$ associe son développement décimal propre, et une application $g : A \to \mathbb{R}$ donnée par $g\Big((c_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_k 10^{-k}$.

On a vu ci-dessus que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ (1.1.a) et que $f \circ g\Big((c_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big) = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A'$ (1.1.b). On en déduit que f et g induisent par restriction des bijections réciproques l'une de l'autre entre $\mathbb{R}$ et A'.

Théorème de Cantor. *Le corps $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que $[0; 1[$ n'est pas dénombrable.

Soit $f : \mathbb{N}^* \to [0, 1[$ une application. Définissons alors le réel $a = 0, a_1a_2 \dots a_n \dots$ de la manière suivante :

- On chosit la première décimale a_1 de a dans l'ensemble $\{0, \dots, 8\}$ et distincte de la première décimale de $f(1)$; on a donc $a \neq f(1)$.

- On choisit ensuite a_2 dans l'ensemble $\{0,\dots,8\}$ et distinct de la deuxième décimale de $f(2)$; donc $a \neq f(2)$.
- Plus généralement, on choisit la n-ième décimale a_n de a dans l'ensemble $\{0,\dots,8\}$ et distincte de la n-ième décimale de $f(n)$; donc $a \neq f(n)$.
- Les décimales de a ne peuvent valoir 9, donc le développement $a = 0,a_1a_2\dots$ est le développement décimal propre de a. Comme $a \neq f(n)$ pour tout n l'application f n'est pas surjective. $\square$

Remarque : développement décimal des nombres strictement négatifs. Pour les nombres réels négatifs l'usage est d'écrire plutôt $x = -|x|$ où l'on développe $|x|$ dans son écriture décimale. Ainsi, le nombre $-\pi$ s'écrit $-3,14159\dots$ plutôt que $(-4),85840\dots$

1.2 Cas des nombres rationnels

Soit a un nombre rationnel positif. Notons $a = \dfrac{p}{q}$ son *écriture irréductible*, *i.e.* avec p et q des nombres entiers premiers entre eux. Nous allons étudier le développement décimal de a : nous démontrerons qu'il est périodique et étudierons sa période en fonction du dénominateur q.

a)
- Si les seuls diviseurs premiers de q sont 2 et 5, on écrit $q = 2^k5^\ell$. Alors $10^m a \in \mathbb{N}$ où $m = \max(k,\ell)$, de sorte que a est un nombre décimal (avec m chiffres après la virgule).
- Inversement, si a est décimal avec m chiffres après la virgule, on a $10^m a \in \mathbb{N}$, de sorte que $q|10^m$ (puisque $\dfrac{p}{q}$ est l'écriture irréductible de $\dfrac{10^m a}{10^m}$), puis que q est de la forme 2^k5^ℓ avec $k \leqslant m$ et $\ell \leqslant m$. Enfin, si a possède exactement m chiffres après la virgule, $10^{m-1}a \notin \mathbb{N}$, donc $m = \max(k,\ell)$.

b)
- Supposons que le dénominateur q est premier avec 10 et $q \neq 1$. Notons $p = dq + r$ la division euclidienne de p par q avec $1 \leqslant r \leqslant q-1$. Notons que $r \neq 0$ puisque p et q sont premiers entre eux et $q > 1$.
  Comme q et 10 sont premiers entre eux, la classe de 10 est un élément du groupe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Notons k l'ordre de 10 dans ce groupe. Il en résulte que $10^k \equiv 1 \quad [q]$, donc q divise $10^k - 1$. Ecrivons alors $10^k - 1 = bq$ et enfin
  $$a = d + \frac{br}{10^k - 1} = d + br\sum_{n=1}^{+\infty} 10^{-nk}.$$
  Remarquons que $br < bq = 10^k - 1$. Notons $br = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} c_j 10^{k-j}$ son développement décimal (autrement dit l'écriture décimale de l'entier br est $br = c_1c_2\dots c_k$). On a alors $a = d + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{j=1}^{k} c_j 10^{-(nk+j)}$. Le développement décimal de a est donc $a = d + \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} c_j 10^{-j}$ où l'on a prolongé les c_j par périodicité, posant $c_{j+nk} = c_j$ (pour $n \in \mathbb{N}$ et $1 \leqslant j \leqslant k$). En d'autres termes, le développement décimal de a est $a = d, c_1\dots c_k c_1 \dots c_k \dots$; il est périodique après la virgule, et k est un multiple de sa période.
- Inversement, si le développement décimal d'un nombre réel a est périodique de période ℓ après la virgule, on a : $a = d, c_1 \dots c_\ell c_1 \dots c_\ell \dots$, c'est-à-dire :
  $$a = d + \sum_{j=1}^{+\infty} c_j 10^{-j} = d + \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{j=1}^{\ell} c_j 10^{-(n\ell+j)} = d + \Big(\sum_{j=1}^{\ell} c_j 10^{\ell-j}\Big)\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} 10^{-n\ell}\Big).$$
  Enfin $a = d + \dfrac{u}{10^\ell - 1}$ où $u = \displaystyle\sum_{j=1}^{\ell} c_j 10^{\ell-j}$, donc l'écriture irréductible de a est $\dfrac{p}{q}$ où q est un diviseur de $10^\ell - 1$. En particulier 10 et q sont premiers entre eux et l'ordre de 10 dans le groupe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ divise ℓ.

c) Dans le cas général, on écrit $q = 2^k 5^\ell q'$ avec $q' > 1$ et premier avec 10. Posons $m = \max(k, \ell)$. Alors l'écriture irréductible de $10^m a$ est de la forme $\dfrac{p'}{q'}$ de sorte que l'écriture décimale de a est périodique à partir de la $m+1$-ème décimale après la virgule de période k où k est l'ordre de 10 dans le groupe $(\mathbb{Z}/q'\mathbb{Z})^*$.

On a donc démontré :

Théorème. • *Le développement décimal d'un nombre réel est fini ou périodique (à partir d'un certain rang) si et seulement s'il est rationnel.*

• *Soit* $a = \dfrac{p}{2^k 5^\ell q}$ *un nombre rationnel avec* $k, \ell \in \mathbb{N}$ *et* q *premier avec* $10p$. *Posons* $m = \max(k, \ell)$.

a) Le développement décimal de a *est fini si et seulement si* $q = 1$.

b) Si $q \neq 1$, *le développement décimal de* a *est périodique à partir du* $m+1$*-ème chiffre après la virgule et sa période est l'ordre de* 10 *dans le groupe* $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$.

□

Remarque. On peur remplacer le développement décimal par le développement en base b où b est un nombre entier $\geqslant 2$ quelconque. On pourra ainsi écrire :

- tout nombre entier positif A (de manière unique) sous la forme $A = \sum_{k=0}^{N} a_k b^k$ avec $N \in \mathbb{N}$ et, pour tout $i \in \{0, \ldots, N\}$, $a_i \in \{0, \ldots, b-1\}$; cette suite (a_i) s'appelle le développement en base b de l'entier A.
- tout nombre réel positif A comme somme d'une série $A = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b^{-k}$ avec $a_0 \in \mathbb{N}$ et, pour $i \geqslant 1$, $a_i \in \{0, \ldots, b-1\}$, avec unicité si l'on impose que l'ensemble des $i \in \mathbb{N}$ tels que $a_i \neq b-1$ est infini. La suite (a_i) s'appelle alors le développement en base b propre du nombre réel A.
- Le développement en base b d'un nombre réel est fini ou périodique (à partir d'un certain rang) si et seulement s'il est rationnel.
- Soit A un nombre rationnel et écrivons $A = \dfrac{p}{mq}$ où $p, m, q \in \mathbb{N}$ sont deux à deux premiers entre eux, q est premier avec b et m divise une puissance b^k de b.

  a) Le développement en base b de a est fini (*i.e.* $a_i = 0$ à partir d'un certain rang) si et seulement si $q = 1$.

  b) Si $q \neq 1$, le développement en base b de a est périodique à partir du rang $k+1$ et sa période est l'ordre de b dans le groupe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$.

Remarque. On a vu que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Soit π un nombre irrationnel. On en déduit que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, qui contient $\mathbb{Q} + \pi$, est dense dans $\mathbb{R}$.

L'ensemble $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes à coefficients rationnels est dénombrable. Chaque polynôme à un nombre fini de racines dans $\mathbb{C}$. On en déduit que l'ensemble A des éléments algébriques, réunion sur $P \in \mathbb{Q}[X]$ (non nul) de l'ensemble des racines de P est une partie dénombrable de $\mathbb{C}$. L'ensemble $A \cap \mathbb{R}$ des nombres réels algébriques est aussi dénombrable. Son complémentaire, l'ensemble des nombres transcendants n'est donc pas dénombrable.

Nous exhiberons en exercice des nombres transcendants (les nombres de *Liouville*).

1.3 Axiome de la borne supérieure

Rappelons que la relation binaire $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$, fondamentale en analyse, est une *relation d'ordre* ([1]) *total* ([2]).

Définition. Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
- On dit qu'un nombre réel x est un *majorant* de A ou qu'il *majore* A si pour tout $y \in A$, on a $y \leqslant x$. Si de plus $x \in A$, on dit que c'est le *plus grand élément* de A.
- La partie A est dite *majorée* s'il existe $x \in \mathbb{R}$ qui majore A.
- De même, on dit qu'un nombre réel x est un *minorant* de A ou qu'il *minore* A si pour tout $y \in A$, on a $y \geqslant x$. Si de plus $x \in A$, on dit que c'est le *plus petit élément* de A.
- La partie A est dite *minorée* s'il existe $x \in \mathbb{R}$ qui minore A.
- La partie A est dite *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée.

Axiome de la borne supérieure. Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. L'ensemble de ses majorants a un plus petit élément : c'est le *plus petit des majorants de A* qui s'appelle *borne supérieure* de A et se note $\sup A$.

De même, si A est une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$, elle possède un *plus grand minorant*, la *borne inférieure* de A qui se note $\inf A$.

Si A n'est pas majorée (*resp.* minorée) on pose $\sup A = +\infty$ (*resp.* $\inf A = -\infty$). On pose aussi $\sup \emptyset = -\infty$ et $\inf \emptyset = +\infty$.

1.4 Suites de nombres réels

Définition. Une *suite de nombres réels* est une application (d'une partie) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Cependant la notation est ici différente : l'image de l'élément $n \in \mathbb{N}$ par la suite se note x_n ou u_n, ou ... plutôt que $f(n)$. La suite elle même se note sous la forme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (plutôt que f). Par abus, il arrive qu'on note la suite juste $(u_n)_n$ voire (u_n).

On définit de même une suite d'éléments d'un ensemble X : c'est une application (d'une partie) de $\mathbb{N}$ dans X.

Pour ne pas alourdir les notations, toutes nos suites seront supposées définies sur $\mathbb{N}$.

Définition. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *majorée*, *minorée*, ou *bornée* si l'ensemble $\{u_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est.

Définition. On dit qu'une suite (u_n) de nombres réels *converge* vers un nombre ℓ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ satisfaisant $n \geqslant N$, on ait $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Dans ce cas, le nombre ℓ est uniquement déterminé par la limite (u_n) (*théorème d'unicité de la limite*). On l'appelle *limite* de la suite u_n et on le note $\lim(u_n)$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Lorsqu'une suite admet une limite, on dit qu'elle est *convergente*.

Proposition. *Toute suite convergente est bornée.*

---

1. C'est une relation (i) *réflexive* : $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $x \leqslant x$, (ii) *antisymétrique* : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, alors $x = y$ et (iii) *transitive* : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$, alors $x \leqslant z$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.

Opérations sur les limites. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes de nombres réels. Alors les suites $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et l'on a*

$$\lim_{n\to\infty}(u_n+v_n)=\Big(\lim_{n\to\infty}u_n\Big)+\Big(\lim_{n\to\infty}v_n\Big)\quad \textit{et}\quad \lim_{n\to\infty}(u_nv_n)=\Big(\lim_{n\to\infty}u_n\Big)\Big(\lim_{n\to\infty}v_n\Big).$$

Puisque de plus les suites constantes sont convergentes, on en déduit que l'ensemble des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de toutes les suites et que l'application qui à une suite convergente associe sa limite est linéaire.

Limites infinies. On dit qu'une suite (u_n) de nombres réels admet la limite $+\infty$ (*resp.* $-\infty$) si pour tout $M\in\mathbb{R}$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}$ satisfaisant $n\geqslant N$, on ait $u_n\geqslant M$ (*resp.* $u_n\leqslant M$).

Théorème d'encadrement (*ou* « théorème des gendarmes »). *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de nombres réels. On suppose que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $u_n\leqslant v_n\leqslant w_n$ et que les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ. Alors la suite (v_n) converge aussi vers ℓ.*

Suites monotones. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *croissante* si pour tout $m,n\in\mathbb{N}$, tels que $m\leqslant n$ on a $u_m\leqslant u_n$. Notons qu'il suffit de vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $u_n\leqslant u_{n+1}$ (par récurrence sur $n-m$). On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *décroissante* si pour tout $m,n\in\mathbb{N}$, tels que $m\leqslant n$ on a $u_m\geqslant u_n$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *monotone* si elle est croissante ou si elle est décroissante.

L'axiome de la borne supérieure se traduit par :

Théorème. *Toute suite monotone bornée converge :*
- *Toute suite croissante majorée converge vers sa borne supérieure.*
- *Toute suite décroissante minorée converge vers sa borne inférieure.*

En effet, soit (u_n) une suite croissante majorée et posons $\ell=\sup\{u_n;\ n\in\mathbb{N}\}$. Soit $\varepsilon>0$; alors $\ell-\varepsilon$ ne majore pas $\{u_n;\ n\in\mathbb{N}\}$, donc il existe n_0 tel que $u_{n_0}>\ell-\varepsilon$. Pour $n\geqslant n_0$, on a alors $\ell-\varepsilon<u_{n_0}\leqslant u_n\leqslant\ell$.

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites *adjacentes* si l'une est croissante, l'autre décroissante et leur différence converge vers 0.

Corollaire. *Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.*

Corollaire (Segments emboités). *Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments de $\mathbb{R}$ (des intervalles fermés bornés et non vides, i.e. de la forme $[a_n,b_n]$ avec $a_n\leqslant b_n$). On suppose que $I_{n+1}\subset I_n$ et que la longueur de I_n tend vers 0. Alors $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}I_n$ contient un et un seul point.*

Ce point est la limite commune de a_n et b_n.

Limite supérieure, limite inférieure. Soit (u_n) une suite bornée de nombres réels. Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $v_n=\inf\{u_k;\ k\geqslant n\}$ et $w_n=\sup\{u_k;\ k\geqslant n\}$. La suite (v_n) est croissante, la suite (w_n) décroissante et pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $v_n\leqslant w_n$.
La limite de la suite (v_n) s'appelle la *limite inférieure* de (u_n) et se note $\liminf(u_n)$; la limite de la suite (w_n) s'appelle la *limite supérieure* de (u_n) et se note $\limsup(u_n)$.

Proposition. *Une suite bornée de nombres réels converge si et seulement si sa limite supérieure et sa limite inférieure coïncident.*

En effet, on a $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ donc si la limite supérieure et sa limite inférieure coïncident, la suite (u_n) converge par le $t$héorème des gendarmes ≫.

Si (u_n) converge vers un nombre ℓ, il existe n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$ on ait $\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$. On aura alors, $\ell - \varepsilon \leqslant v_{n_0}$ et $w_{n_0} \leqslant \ell + \varepsilon$. Pour $n \geqslant n_0$, on aura $\boxed{\ell - \varepsilon \leqslant v_{n_0} \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant w_{n_0} \leqslant \ell + \varepsilon,}$ donc (v_n) et (w_n) convergent toutes deux vers ℓ.

Remarque. Si la suite (u_n) n'est pas majorée, on a $\sup\{u_k;\ k \geqslant n\} = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\limsup(u_n) = +\infty$ et $(u_n) \to +\infty$ si et seulement si $\liminf(u_n) = +\infty$. De même, si la suite (u_n) n'est pas minorée, on a $\inf\{u_k;\ k \geqslant n\} = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\liminf(u_n) = -\infty$ et $(u_n) \to -\infty$ si et seulement si $\limsup(u_n) = -\infty$.

Suites extraites. Soit (u_n) une suite et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. La suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ s'appelle une *suite extraite* de (u_n).

Une suite extraite d'une suite convergente, converge vers la même limite.

Théorème de Bolzano-Weierstrass. *De toute suite bornée de nombres réels, on peut extraire une suite convergente.*

On peut en fait assez facilement extraire une suite qui converge vers $\limsup(u_n)$. En effet :

(*) Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout ε, comme $w_m - \varepsilon$ ne majore pas $\{u_k,\ k \geqslant m\}$, il existe $k \geqslant m$ tel que $w_m - \varepsilon < u_k$. Alors $\boxed{w_k - \varepsilon \leqslant w_m - \varepsilon < u_k \leqslant w_k}$.

A l'aide de la propriété (*), on construit (par récurrence sur n) une application φ strictement croissante telle que pour tout n on ait $0 \leqslant w_{\varphi(n)} - u_{\varphi(n)} \leqslant 2^{-n}$. Alors, la suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers la même limite que $(w_{\varphi(n)})$, soit $\limsup(u_n)$.

On peut de même trouver une suite extraite de (u_n) qui converge vers $\liminf(u_n)$.

Suites de Cauchy. Une suite (u_n) est dite *de Cauchy* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour $p, q \geqslant n$, on ait $|u_p - u_q| \leqslant \varepsilon$.

Une suite convergente est clairement de Cauchy. La réciproque est vraie (parce que $\mathbb{R}$ est *complet*). En effet, si (u_n) est de Cauchy, $\Big(\sup\{u_k;\ k \geqslant n\} - \inf\{u_k;\ k \geqslant n\}\Big)$ tend vers 0. On a donc :

Critère de Cauchy. *Une suite de nombres réels est convergente (dans $\mathbb{R}$) si et seulement si elle est de Cauchy.*

Convergence d'une suite dans un espace métrique. Soient (X, d) un espace métrique et (x_n) une suite d'éléments de X. On dit que la suite (x_n) converge vers $\ell \in X$ si la suite de nombres réels $\big(d(x_n, \ell)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Nous reviendrons sur cette notion en topologie.

1.5 Exercices

1.1 Exercice. 1. Soit p un nombre premier. Démontrer que le développement décimal de $1/p$ est périodique de période 5 si et seulement si $p|11\,111$.

2. Soit p un diviseur premier de $11\,111$.
   a) Quel est l'ordre de la classe 10 dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$?
   b) En déduire que $p \equiv 1$ [10].

3. Quel est le plus petit nombre entier p tel que le développement décimal de $1/p$ soit périodique de période 5 ?

1.2 Exercice. Considérons le nombre $n = 142\,857$. On a $2n = 285\,714$, $3n = 428\,571$, $4n = 571\,428$, $5n = 714\,285$, $6n = 857\,142$. En d'autres termes, multiplier n par k pour $1 \leqslant k \leqslant 6$ fait tourner les décimales de n. On dira qu'on a des *multiplications magiques.* Enfin $7n = 999\,999$. Le but de cet exercice est de comprendre et généraliser ce fait.

Soit p un nombre premier. On suppose que 10 est un générateur du groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ - ce groupe est cyclique. Écrivons $\dfrac{10^{p-1}-1}{p} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p-1} a_j 10^{p-1-j}$ le développement décimal de l'entier $N = \dfrac{10^{p-1}-1}{p}\cdot$

1. Quel est le développement décimal du nombre entier pN ? Quel est le développement décimal du nombre rationnel $\dfrac{1}{p}$?
2. Soit k un nombre entier avec $1 \leqslant k \leqslant p-1$.
   a) Démontrer qu'il existe un unique nombre entier ℓ avec $0 \leqslant \ell \leqslant p-2$ tel que $10^\ell \equiv k \quad [p]$.
   b) Écrivons $10^\ell N = 10^{p-1}A + R$ la division euclidienne de $10^\ell N$ par 10^{p-1}. Quels sont les développement décimaux de A et R ?
   c) Démontrer que $kN = R + A$. Quel est son développement décimal ?
3. Le calcul des 16 premières décimales du nombre $1/17$ donnent $0,0588235294117647$.
   a) Quel est l'ordre de 10 dans $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^*$?
   b) Calculer de tête $2 \times 0588235294117647$ puis $3 \times 0588235294117647$, *etc.* jusqu'à $16 \times 0588235294117647$.

1.3 Exercice. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\delta(x) = \inf\{|x-n|\,;\ n \in \mathbb{Z}\}$ sa distance à $\mathbb{Z}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient $s_0, \ldots, s_{n+1} \in [0,1]$. Montrer qu'il existe des nombres entiers i et j satisfaisant $0 \leqslant i < j \leqslant n+1$ et $|s_i - s_j| \leqslant \dfrac{1}{n+1}\cdot$
2. Soient $t_0, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe des entiers i et j satisfaisant $0 \leqslant i < j \leqslant n$ et $\delta(t_i - t_j) \leqslant \dfrac{1}{n+1}\cdot$
3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ satisfaisant $1 \leqslant k \leqslant n$ et $\delta(kt) \leqslant \dfrac{1}{n+1}\cdot$
4. En déduire qu'il existe une suite de nombres rationnels p_n/q_n qui converge vers t et telle que $|t - p_n/q_n| < q_n^{-2}$.

1.4 Exercice. 1. Démontrer que la série de terme général $10^{-k!}$ est convergente.

Posons $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} 10^{-k!}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 10^{-k!}$.

2. Démontrer que $0 < S < 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $0 < S - a_n < 2.10^{-(n+1)!}$.
3. Soit P un polynôme non nul à coefficients entiers. Notons p son degré.
   a) Démontrer que pour tout n on a $10^{p.n!}P(a_n) \in \mathbb{Z}$.
   b) Démontrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout n on ait $|P(S) - P(a_n)| \leqslant M.10^{-(n+1)!}$.
   c) Démontrer que $P(S) \neq 0$ (on remarquera que, pour n assez grand, a_n n'est pas racine de P).
4. Démontrer que S est transcendant.

1.5 Exercice. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré d que l'on peut supposer irréductible. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ une racine de P. Soit $\frac{p_n}{q_n}$ une suite de rationnels qui tend vers x. Démontrer que la suite $q_n^d \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right|$ est bornée inférieurement (*on s'inspirera de l'exercice 1.4*). Exhiber d'autres nombres transcendants.

1.6 Exercice. On définit une suite (u_n) en posant $u_0 = a \in \mathbb{C}$ et $u_{n+1} = u_n^{10}$.

1. Décrire la suite u_n.
2. On suppose $|a| \neq 1$. Discuter selon la valeur de a le comportement de cette suite.
3. On suppose ici que $|a| = 1$. On écrit $a = e^{2i\pi\theta}$ où $\theta \in [0, 1[$. On note $\theta_n = \dfrac{\arg u_n}{2\pi}$ (l'argument étant pris dans $[0, 2\pi[$).
   a) Exprimer θ_n en fonction du développement décimal de θ.
   b) Pour quelles valeurs de θ la suite (u_n) est-elle constante ?
   c) Pour quelles valeurs de θ la suite (u_n) prend-elle un nombre fini de valeurs ?
   d) Pour quelles valeurs de θ la suite (u_n) converge-t-elle ?
   e) (*) Construire θ tel que $\{u_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans le cercle unité de $\mathbb{C}$.

1.7 Exercice. (Variante) Étudier l'application $f : [0, 1[\to [0, 1[$ donnée par $f(x) = 10x - E(10x)$ et les suites récurrentes (u_n) données par un point $u_0 \in [0, 1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Décrire l'application f en termes de développement décimal.
2. Quels sont les points fixes de f ?
3. Pour quelles valeurs de u_0 cette suite stationne-t-elle ?
4. Pour quelles valeurs de u_0 cette suite converge-t-elle ?
5. Pour quelles valeurs de u_0 cette suite est-elle périodique ? Pour lesquelles devient-elle périodique à partir d'un certain rang ?
6. Construire un u_0 pour lequel $\{u_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans $[0, 1]$.

1.8 Exercice. Soient (u_n) une suite convergente et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application injective. Démontrer que la suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers la même limite.

1.9 Exercice. (Cesàro généralisé). Soit (v_n) une suite croissante de nombres réels non nuls telle que $\lim v_n = +\infty$. Soit (u_n) admettant une limite $\ell \in [-\infty, +\infty]$.
Démontrer que la suite (w_n) définie par $w_n = \dfrac{1}{v_n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k(v_k - v_{k-1})$ admet la même limite.

1.10 Exercice. Soit (u_n) une suite de nombres réels telle que pour tout $n, m \in \mathbb{R}$ on ait $u_{n+m} \leqslant u_n + u_m$. Démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$ tend vers $\inf \left\{\dfrac{u_n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

1.11 Exercice. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $0 < b < a$. On définit les suites (a_n) et (b_n) par récurrence en posant $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$. Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

1.12 Exercice.
1. Soit (u_n) une suite de nombres réels. On suppose que $u_{n+1} - u_n \to 0$. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est un intervalle.
2. Soient (X, d) un espace métrique compact et (u_n) une suite d'éléments de X telle que $d(u_n, u_{n+1}) \to 0$. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est connexe.
3. Est-ce que l'ensemble des valeurs d'adhérence de toute suite (u_n) d'éléments de $\mathbb{R}^2$ telle que $\|u_n - u_{n+1}\| \to 0$ est connexe ?

1.6 Solutions

Exercice 1.1.

1. On a vu que $1/p$ est périodique de période divisant 5 si et seulement si p divise $10^5 - 1$; la période est exactement 5 si de plus p ne divise pas $10 - 1$. Si p est premier, il doit donc diviser $11\,111$. Inversement, puisque 9 et $11\,111$ sont premiers entre eux, tout diviseur premier de $11\,111$ convient.
2. a) D'après ce qui précède, l'ordre de 10 dans le groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est 5.

   b) L'ordre 10 dans le groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ divise l'ordre de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, donc 5 divise $p - 1$. Comme p est impair, il est de la forme $10k + 1$.
3. On vérifie immédiatement que 11 ne divise pas $11\,111$; le nombre 21 n'est pas premier ; 31 ne convient pas non plus... mais 41 convient. On trouve $11\,111 = 41 \times 271$.
   NB Comme tout diviseur de 271 divise $11\,111$ et est donc $\geqslant 41 > \sqrt{271}$, on en déduit que 271 est premier.

Exercice 1.2.

1. On $pN = 10^{p-1} - 1$. Son développement décimal est donc $99\ldots9$ ($p - 1$ chiffres).
   On a $\dfrac{1}{p} = \dfrac{N}{10^{p-1} - 1}$. Or $\dfrac{1}{10^{p-1} - 1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} 10^{-k(p-1)}$. Donc le développement décimal du nombre rationnel $\dfrac{1}{p}$ est
   $$\frac{1}{p} = 0, a_1a_2 \ldots a_{p-1}a_1a_2 \ldots a_{p-1}a_1a_2 \ldots a_{p-1} \ldots$$
2. a) La classe de k dans le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un élément de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Or, puisque la classe de 10 est un générateur de ce groupe, on en déduit que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est l'ensemble des classes de 10^ℓ où $0 \leqslant \ell \leqslant p - 2$.

   b) Le développement décimal de $10^\ell N$ est $a_1 \ldots a_{p-1}00 \ldots 0$ (avec ℓ zéros à la fin). Il vient $A = a_1 \ldots a_\ell$ et $R = a_{\ell+1} \ldots a_{p-1}0 \ldots 0$.

   c) On a $k \equiv 10^\ell \ \ [p]$, donc $kN \equiv 10^\ell N \ \ [pN]$. Or $pN = 10^{p-1} - 1$, donc $10^\ell N = 10^{p-1}A + R \equiv A + R \ \ [pN]$. Les nombres kN et $A + R$ sont tous deux compris strictement entre 0 et $pN = 10^{p-1} - 1$ et congrus modulo pN : ils sont égaux. Le développement décimal en est $a_{\ell+1} \ldots a_{p-1}a_1 \ldots a_\ell$.
3. a) Le développement décimal du nombre $1/17$ admet la période 16 et n'est visiblement pas périodique de période 8 : sa période, qui est l'ordre de (la classe de) 10 dans $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^*$ est bien 16.

   b) D'après la discussion ci-dessus, les développements décimaux des nombres $k \times 0588235294117647$ pour $1 \leqslant k \leqslant 16$ sont obtenus par permutation circulaire à partir de 0588235294117647. En les classant par ordre croissant, on trouve
   $2 \times 0588235294117647 = 1176470588235294$, $3 \times 0588235294117647 = 1764705882352941$
   $4 \times 0588235294117647 = 2352941176470588$, $5 \times 0588235294117647 = 2941176470588235$
   $6 \times 0588235294117647 = 3529411764705882$, $7 \times 0588235294117647 = 4117647058823529$
   $8 \times 0588235294117647 = 4705882352941176$, $9 \times 0588235294117647 = 5294117647058823$
   $10 \times 0588235294117647 = 5882352941176470$, $11 \times 0588235294117647 = 6470588235294117$
   $12 \times 0588235294117647 = 7058823529411764$, $13 \times 0588235294117647 = 7647058823529411$
   $14 \times 0588235294117647 = 8235294117647058$, $15 \times 0588235294117647 = 8823529411764705$
   $16 \times 0588235294117647 = 9411764705882352$.

Exercice 1.3.

1. Quitte à réordonner les s_i, on peut supposer que la suite s_i est croissante. On a $\sum_{k=0}^{n} s_{k+1} - s_k = s_{n+1} - s_0 \leqslant 1 - 0$. Il existe donc k tel que $s_{k+1} - s_k \leqslant \frac{1}{n+1}$.
2. Pour $i = 1, \ldots, n$, posons $s_i = t_i - t_0 - E(t_i - t_0)$ où E désigne la partie entière ; posons aussi $s_{n+1} = 1$. Par (a), il existe i, j avec $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n+1$ tels que $|s_i - s_j| \leqslant \frac{1}{n+1}$. Si $j \neq n+1$, on trouve $|(t_i - t_j) - p| \leqslant \frac{1}{n+1}$, où p est un entier ($p = E(t_i - t_0) - E(t_j - t_0)$). Si $j = n+1$, on trouve $|t_0 - t_i - p| \leqslant \frac{1}{n+1}$ avec $p = E(t_i - t_0) + 1$. Remarquons que dans ce cas $i \neq 0$ puisque $1 > \frac{1}{n+1}$.
3. Posons $t_i = ix$; il existe i, j avec $0 \leqslant i < j \leqslant n$ tels que $\delta(t_i - t_j) \leqslant \frac{1}{n+1}$. On pose alors $k = j - i$; on trouve $\delta(kx) \leqslant \frac{1}{n+1}$.
4. Soit $t \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par 1.c), il existe $q_n \leqslant n$ tel que $1 \leqslant q_n \leqslant n$ et $\delta(q_n t) \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{q_n+1}$. Soit p_n l'entier le plus proche de $q_n t$. On a donc $|t - p_n/q_n| \leqslant \frac{1}{(n+1)q_n} < q_n^{-2}$. Enfin, puisque $|t - p_n/q_n| \leqslant \frac{1}{n+1}$, on a $t = \lim p_n/q_n$.

Exercice 1.4.

1. Cette série converge extrêmement vite et on peut utiliser plusieurs méthodes. Par exemple, la règle de Cauchy : $(10^{-k!})^{1/k} = 10^{-(k-1)!} \to 0$.
2. Pour $n, k \in \mathbb{N}$, on a $(n+k+1)! - (n+1)! \geqslant k$, donc

$$0 < S - a_n = \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-(n+k+1)!} \leqslant 10^{-n+1} \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-k} < 2.10^{-(n+1)!}$$

En particulier, puisque $a_0 = 0$, il vient $0 < S < 2.10^{-1} < 1$.

3. a) Le nombre a_n est rationnel et s'écrit sous la forme $a_n = \frac{p_n}{q_n}$ où $q_n = 10^{n!}$. Le polynôme P s'écrit $P = \sum_{k=0}^{p} b_k X^k$, donc $q_n^p P(a_n) = \sum_{k=0}^{p} b_k p_k^k q_k^{p-k}$. C'est un entier.
   b) Posons $M = 2 \sup\{|P'(t)|;\ t \in [0,1]\}$. Par le théorème des accroissements finis, On a $|P(S) - P(a_n)| \leqslant \frac{M}{2}|S - a_n| \leqslant M.10^{-(n+1)!}$.
   c) Puisque P a un nombre fini de racines, seulement un nombre fini de a_n peuvent être racines de P. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$ on ait $P(a_n) \neq 0$. Dans ce cas, $10^{p.n!}P(a_n)$ est un nombre entier non nul, donc $|10^{p.n!}P(a_n)| \geqslant 1$. Donc, pour $n \geqslant n_0$, on a $|10^{pn!}P(S)| \geqslant |10^{pn!}P(a_n)| - M.10^{pn!-(n+1)!} \geqslant 1 - M.10^{-(n+1-p)n!}$. Or, $\lim_{n\to\infty} M.10^{-(n+1-p)n!} = 0$, donc, pour n assez grand $M.10^{-(n+1-p)n!} < 1$. On en déduit que $P(S) \neq 0$.
4. On a démontré que, pour tout $P \in \mathbb{Z}[X]$ non nul, on a $P(S) \neq 0$, donc S est transcendant.

Exercice 1.5. Comme pour l'exercice précédent, $q_n^d P\Big(\frac{p_n}{q_n}\Big)$ est entier et non nul, donc $\Big|q_n^d P\Big(\frac{p_n}{q_n}\Big)\Big| \geqslant 1$. Or $\Big|q_n^d P\Big(\frac{p_n}{q_n}\Big)\Big| = \Big|q_n^d \Big[P\Big(\frac{p_n}{q_n}\Big) - P(x)\Big]\Big| \leqslant M q_n^d \Big|x - \frac{p_n}{q_n}\Big|$, où M est le maximum de $|P'|$ sur le plus petit segment contenant tous les $\frac{p_n}{q_n}$.

Pour exhiber des nombres transcendants, on peut écrire $S = \sum 10^{-n!} a_n$ où a_n est une suite bornée de nombres entiers non nuls, on peut par exemple remplacer 10 par n'importe quel entier $\geqslant 2$ et $n!$ par n'importe quelle suite b_n de nombres entiers croissant suffisamment vite (avec $\lim \dfrac{b_{n+1}}{b_n} \to \infty$).

Exercice 1.6.

1. On a $u_n = a^{10^n}$.
2. Si $|a| < 1$, la suite (u_n) converge (très vite) vers 0. Si $|a| > 1$, la suite $(|u_n|)$ tend très rapidement vers $+\infty$.
3. a) On a $\theta_n = \langle 10^n \theta \rangle$ où $\langle x \rangle = x - E(x)$ est la *partie fractionnaire* d'un nombre réel x (ici $E(x)$ désigne sa partie entière).

   b) La suite est constante pour $\theta = k/9$ avec $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant 8$.

   c) Si $u_k = u_\ell$, avec $k < \ell$ il vient $a^{10^\ell - 10^k} = 1$, donc a est une racine de l'unité ; inversement, si a est une racine de 1 alors θ est rationnel, donc son développement décimal est périodique (à partir d'un certain rang), donc la suite u_k prend un nombre fini de valeurs.

   d) Supposons que (u_n) tend vers ℓ. Remarquons que
   - $\ell^{10} = \ell$ (par continuité de $z \mapsto z^{10}$) ;
   - pour $b = e^{2i\pi t}$ avec $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t| \leqslant 1/11$, on a $|1 - b^{10}| \geqslant |1 - b|$.

   En particulier, si pour $n \geqslant n_0$ on a $|u_n - \ell| \leqslant |1 - e^{\frac{2i\pi}{11}}| (= 2 \sin \dfrac{\pi}{11})$, alors la suite $|u_n - \ell|$ est croissante à partir de n_0, et ne peut tendre vers 0 que si $u_{n_0} = \ell$; on en déduit que $a^{10^{n_0}}$ est une racine neuvième de 1, donc a est une racine de 1 dont l'ordre divise 9×10^{n_0}.
   La réciproque est claire.

   NB. C'est un fait général. Si (X, d) est un espace métrique, $f : X \to X$ est une application et x_0 est un point fixe *répulsif* de f, *i.e.* si $d(f(x), x_0) \geqslant d(x, x_0)$ pour tout point x dans un voisinage de x_0, une suite $(f^n(x))$ ne peut converger vers x_0 que s'il existe n tel que $f^n(x) = x_0$.

   e) Considérons le nombre $\theta = 0,123456789101112131415161718192021222324....$ On a donc une suite d'entiers $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, strictement croissante, telle que $p_0 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 1$ le développement décimal de n est lu dans θ de la place $p_{n-1} + 1$ à p_n. On a donc
   - $p_n = p_{n-1} + k_n$ où k_n est le nombre de chiffres du développement décimal de n ;
   - $n = E(10^{p_n} \theta) - 10^{k_n} E(10^{p_{n-1}} \theta)$.

   En particulier, le développement décimal de $\langle 10^{p_{n-1}} \theta \rangle$ commence par n. Soit $x \in [0, 1[$. Pour $k \in \mathbb{N}$ posons $m(k) = E(10^k x)$. Alors (si $x \geqslant 1/10$) on a $x = \lim \langle 10^{p_{m(k)-1}} \theta \rangle$, donc $e^{2i\pi x} = \lim u_{p_{m(k)-1}}$.
   Si $x < 1/10$, on pose $y = \dfrac{1 + x}{10}$, on construit une suite extraite $(u_{\ell(k)})$ qui converge vers $e^{2i\pi y}$; alors $(u_{\ell(k)+1})$ converge vers $(e^{2i\pi y})^{10} = e^{2i\pi x}$.

Exercice 1.7.

1. Soit $x \in [0, 1[$. Écrivons son développement décimal propre $x = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ où les a_n ne sont pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang. Alors $10x = a_1, a_2 \ldots a_n \ldots$ et $f(x) = 0, a_2 \ldots a_n \ldots$; ces développements décimaux sont clairement propres (puisque les a_n ne sont pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang). En d'autres termes, f décale le développement décimal de x et oublie le premier terme de ce développement.
2. Soit $x = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ comme ci-dessus. Par unicité du développement décimal propre, on a $f(x) = x$ si et seulement si $a_k = a_{k+1}$ pour tout k, *i.e.* si la suite (a_k) est constante égale à $a \in \{0, \ldots, 8\}$ (9 est interdit puisque le développement décimal est supposé propre). Les points fixes de f sont donc les $a/9$ avec a entier entre 0 et 8.

3. La suite stationne si et seulement si, pour un $m \in \mathbb{N}$, $u_m = f^m(u_0)$ est un point fixe de f ; or $u_m = 10^m x - E(10^m u_0)$. On doit donc avoir $10^m u_0 = A + a/9 = B/9$ avec $A, a, B \in \mathbb{N}$; on en déduit immédiatement que (u_n) est stationnaire si et seulement si $u_0 = \dfrac{B}{9 \times 10^m}$ avec $B, m \in \mathbb{N}$ (et $B < 9 \times 10^m$).
4. Pour $x \in [0,1[$, posons $g(x) = \exp(2i\pi x)$ et $v_n = g(u_n)$. On a $v_{n+1} = v_n^{10}$ et, puisque g est continue, si u_n converge vers ℓ, alors $g(u_n)$ converge vers $g(\ell)$. Or $z \mapsto z^{10}$ étant continue, on doit avoir $g(\ell)^{10} = g(\ell)$, ce qui impose (puisque $g(\ell) \neq 0$) que $g(\ell)$ est racine 9-ième de 1, donc $\ell = \dfrac{k}{9}$ avec $k \in \{0, \ldots, 9\}$. Remarquons que pour $x \in [0,1[$, si $|x - \ell| < 0,01$, alors $x \in \left[\dfrac{k}{10}, \dfrac{k+1}{10}\right[$. Donc, si pour $|u_n - \ell| < 0,01$, la n-ième déciamle de u_0 est k. On en déduit que (u_n) converge si et seulement si la suite est staionnaire.
5. La suite est périodique si et seulement s'il existe n tel que $u_n = u_0$, ce qui est vrai si et seulement si u_0 est rationnel et dans son écriture en fraction irréductible $u_0 = p/q$ le dénominateur q n'est pas divisible par 2 ou par 5 ; la suite devient périodique à partir d'un certain rang si et seulement si u_0 est rationnel.
6. Prenons $u_0 = 0,1234567891011121314....$ Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ d'écriture décimale $k = b_1 \ldots b_s$, il existe donc $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que le développement décimal de $u_{\varphi(k)}$ soit $0, b_1 \ldots b_s \ldots$ Démontrons que $\{u_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0,1]$. Soit $\alpha \in [0,1]$ et $\alpha = 0, a_1 a_2 \ldots a_m \ldots$ un développement décimal de α. Pour $m \in \mathbb{N}$, posons $k_m = 10^m + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k 10^{m-k}$. Le développement décimal de $u_{\varphi(k_m)}$ est $0, 1a_1 a_2 \ldots a_m \ldots$, donc celui de $u_{\varphi(k_m)+1}$ est $0, a_1 a_2 \ldots a_m \ldots$. On en déduit que $|u_{\varphi(k_m)+1} - \alpha| \leqslant 10^{-m}$, donc la suite $(u_{\varphi(k_m)+1})$ converge vers α.

Remarques

a) Le fait de considérer le nombre $10^m + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k 10^{m-k}$ et non $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k 10^{m-k}$ n'est vraiment utile que si $a_1 = 0$, *i.e.* pour $\alpha < 0,1$.

b) On parle d'*un* développement décimal de α afin de pouvoir traiter en même temps le cas $\alpha = 1$.

Exercice 1.8. Puisque φ est injective, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n) = +\infty$. En effet, soit $M \in \mathbb{N}$; puisque φ est injective, l'ensemble $\varphi^{-1}\{0, \ldots, M\}$ est fini : il a au plus $M+1$ éléments ; posons $N = \max\Big(\varphi^{-1}\{0, \ldots, M\}\Big)$. Si $n > N$, il vient $n \notin \varphi^{-1}\{0, \ldots, M\}$, donc $\varphi(k) > M$.

Par le théorème de composition de limites, il vient $\lim\limits_{n\to\infty} u_{\varphi(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 1.9. Soit $\varepsilon > 0$. Comme (u_n) a pour limite ℓ, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Posons $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} (u_k - \ell)(v_k - v_{k-1})$. Pour $n \geqslant N$ on a donc

$$\begin{aligned} |w_n - \ell| &\leqslant \frac{|S|}{v_n} + \frac{1}{v_n} \sum_{k=N+1}^{n} |u_k - \ell|(v_k - v_{k-1}) \\ &\leqslant \frac{|S|}{v_n} + \left(\frac{v_n - v_N}{v_n}\right) \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{|S|}{v_n} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Puisque $\dfrac{S}{v_n}$ tend vers 0, il existe $N' \in \mathbb{N}$, que l'on peut supposer $\geqslant N$ tel que pour tout $n \geqslant N'$ on ait $\dfrac{|S|}{v_n} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, donc $|w_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Exercice 1.10. Par récurrence sur k, on démontre que, pour tout, $m, k \in \mathbb{N}^*$ on a $u_{kn} \leqslant k u_n$.
Posons $\ell = \inf\left\{\dfrac{u_n}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ $(\in \mathbb{R} \cup \{-\infty\})$. Soit $M > \ell$; puisque M ne minore pas la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{u_N}{N} < M$. Posons $a = \dfrac{u_N}{N}\cdot$
Soit $n \geqslant N$. Effectuons la division euclidienne de n par N : on a $n = kN + r$. On a donc $u_n \leqslant k u_N + r u_1 = na + r(u_1 - a) \leqslant na + N|u_1 - a|$. Pour n assez grand, on a $N|u_1 - a| < n(M - a)$, donc $\ell \leqslant \dfrac{u_n}{n} < M$.

Exercice 1.11.

Démontrons par récurrence sur n que, pour tout n, on a $0 < b_n < a_n$.
- C'est vrai par hypothèse pour $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$, et supposons que $0 < b_n < a_n$, on a $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} > 0$, et

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n - 2\sqrt{a_n b_n} + b_n}{2} = \frac{\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2}{2} > 0.$$

Puisque $0 < b_n < a_n$, $a_n - a_{n+1} = \dfrac{a_n - b_n}{2} < 0$ et $b_n^2 < a_n b_n$; prenant les racines carrées, il vient $b_n < b_{n+1}$; donc la suite (b_n) est croissante et la suite (a_n) décroissante. Enfin

$$\frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{a_n - b_n} = \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}}{2\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}\right)} < \frac{1}{2},$$

d'où l'on déduit que $(a_n - b_n)$ converge au moins géométriquement vers 0.

Remarquons que $\dfrac{a_{n+1} - b_{n+1}}{(a_n - b_n)^2} = \dfrac{1}{2\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}\right)^2}$ a une limite non nulle donc la convergence de $a_n - b_n$ vers 0 est quadratique.

Exercice 1.12.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ deux valeurs d'adhérence de la suite (u_n) et $c \in \mathbb{R}$ tels que $a < c < b$. On veut démontrer que c est valeur d'adhérence de la suite (u_n), en d'autres termes que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n_0 \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant n_0$ tel que $|u_n - c| < \varepsilon$.
   Fixons donc $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. Puisque $u_{n+1} - u_n \to 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$, que l'on peut supposer $\geqslant n_0$ tel que, pour $n \geqslant n_1$ on ait $|u_{n+1} - u_n| < 2\varepsilon$.
   - Si $c - \varepsilon < u_{n_1} < c + \varepsilon$, on prendra $n = n_1$.
   - Si $u_{n_1} \leqslant c - \varepsilon$, posons $A = \{k \geqslant n_1,\ u_n > c - \varepsilon\}$; puisque b est valeur d'adhérence de la suite (u_n), il existe $n_2 \geqslant n$ tel que $|u_{n_2} - b| < \varepsilon$, donc $u_{n_2} > b - \varepsilon > c - \varepsilon$, donc $A \neq \emptyset$. Comme A est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle possède un plus petit élément ; posons $n = \inf A$. Or $n_1 \notin A$, donc $n - 1 \geqslant n_1$ et puisque $n - 1 \notin A$, il vient $u_{n-1} \leqslant c - \varepsilon$. De plus $|u_{n-1} - u_n| < 2\varepsilon$. On a donc $c - \varepsilon < u_n < u_{n-1} + 2\varepsilon \leqslant c + \varepsilon$.
   - Si $u_{n_1} \geqslant c + \varepsilon$, on posera $A = \{k \geqslant n_1,\ u_n < c + \varepsilon\}$ qui n'est pas vide puisque a est valeur d'adhérence de (u_n) et $n = \inf A$.
2. On note F l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n). C'est une partie fermée non vide de X.
   Soient F_1, F_2 deux parties fermées de F disjointes et non vides. On doit démontrer que $F \neq F_1 \cup F_2$. Comme F_1 et F_2 sont compacts, la fonction distance atteint son minimum sur $F_1 \times F_2$: il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $y_1 \in F_1$ et tout $y_2 \in F_2$ on ait $d(y_1, y_2) \geqslant k$.
   Posons $K = \{y \in X ;\ d(y, F_1 \cup F_2) \geqslant k/3\}$ et démontrons que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} ;\ u_n \in K\}$ est infini - donc la suite (u_n) possède des valeurs dans le compact K, ce qui prouvera que $K \cap F \neq \emptyset$.
   Il existe n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, on ait $d(u_n, u_{n+1}) < k/3$.
   Soit $m \in \mathbb{N}$ et démontrons qu'il existe $n \geqslant m$ tel que $u_n \in K$. On peut supposer que $m \geqslant n_0$.

- Si $u_m \in K$, on posera $m = n$.
- Sinon, $d(u_m, F_1 \cup F_2) = \inf\{d(x, u_m);\ x \in F_1 \cup F_2\} < k/3$. Quitte à échanger les rôles de F_1 et F_2, on peut supposer que c'est un point de F_1 qui réalise ce minimum. Posons $A = \{n \in \mathbb{N};\ n \geqslant m,\ d(u_n, F_2) \leqslant 2k/3\}$. Puisque F_2 possède des points d'adhérence de la suite (u_n), l'ensemble A n'est pas vide. Notons n son plus petit élément. Remarquons que puisque $d(F_1, F_2) = k$, il vient $d(u_n, F_1) \geqslant k/3$. En particulier $m \neq n$. Puisque $n-1 \notin A$, on a $d(u_{n-1}, F_2) > 2k/3$. Comme $d(u_{n-1}, u_n) < k/3$, il vient $d(u_n, F_2) \geqslant k/3$. Cela prouve que $u_n \in K$.

3. Considérons la suite $u_n = (n^{1/3}\cos n^{1/3}, \sin n^{1/3}) = (x_n, y_n)$.

   Fixons $x \in \mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $g(t) = t\cos t$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $g(k\pi) = (-1)^k k\pi$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $|x| \leqslant k\pi$, il existe $t_{x,k} \in [k\pi, (k+1)\pi[$ tel que $g(t_{x,k}) = x$. Notons n_k la partie entière de $t_{x,k}^3$. Comme la dérivée de la fonction $F : t \mapsto t^{1/3}\cos t^{1/3}$ tend vers 0 quand $t \to \infty$, et que $|x - x_{n_k}| = |F(t_{x,k}^3) - F(n_k)| \leqslant |t_{x,k}^3 - n_k| \sup\{|F'(t)|,\ t \in [n_k, t_{x,k}^3]\}$, la suite (x_{n_k}) tend vers x. De même, $y_{n_k} - \sin t_{x,k} \to 0$.

   Enfin, toujours en considérant cette dérivée, il vient $\|u_{n+1} - u_n\| \to 0$.

   Comme la suite $n_k^{1/3}\cos n_k^{1/3}$ est bornée, on a $\cos n_k^{1/3} \to 0$. On en déduit que $y_{n_k}^2 \to 1$. Or $\sin t_{x,k}$ est du signe de $(-1)^k$. On en déduit que $(u_{n_{2k}}) \to (x, 1)$ et $(u_{n_{2k+1}}) \to (x, -1)$.

   Par ailleurs si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une suite strictement croissante telle que $u_{\varphi(n)}$ converge vers $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on trouve que $\varphi(n)^{1/3} \to \infty$, puis $\cos\varphi(n)^{1/3} \to 0$ et enfin $\sin^2\varphi(n)^{1/3} \to 1$, donc $y = \pm 1$. On en déduit que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est $\mathbb{R} \times \{-1, 1\}$ et n'est donc pas connexe.

2 Approximation

2.1 Rapidité de convergence

Un nombre réel est donc défini comme une limite de suite. On peut cependant essayer de bien choisir une suite convergeant vers un nombre réel donné...

Pour cela on introduit la notion de *rapidité de convergence.*

Définition. Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de nombres réels. Notons x et y leurs limites respectives. On dit que (v_n) converge plus vite que (u_n) si $(v_n - y) = o(u_n - x)$, c'est à dire si $\lim \dfrac{v_n - y}{u_n - x} = 0$.

Plus une suite convergera rapidement, meilleure sera l'approximation qu'elle donne. Notons cependant qu'il faut ternir compte d'une deuxième donnée : la quantité de calculs que représente l'évaluation de (u_n). Par exemple, on pourrait trouver artificiellement une suite (v_n) qui converge *a priori* plus vite que la suite u_n en posant $v_n = u_{2n}$ voire $v_n = u_{2^n}$...

Dans les exercices, nous étudierons des suites convergent vers e, vers π, et comparerons leurs vitesses de convergence.

La comparaison avec les suites géométriques donne :

Définition. Soit (u_n) une suite convergente de nombres réels ; notons x sa limite. Si la suite $\left(\dfrac{u_{n+1} - x}{u_n - x}\right)$ converge vers un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$, alors ce nombre λ s'appelle *coefficient de convergence* de la suite. Dans ce cas :

- Si $|\lambda| = 1$ on dira que la convergence de la suite (u_n) vers x est *lente.*
- Si $0 < |\lambda| < 1$ on dira que la convergence de la suite (u_n) vers x est *géométrique* (d'ordre λ).
- Si $\lambda = 0$ on dira que la convergence de la suite (u_n) vers x est *rapide.*

On vérifie aisément que la convergence est d'autant plus rapide (au sens de la définition 2.1) que le coefficient de convergence $|\lambda|$ est petit.

2.2 Accélération de convergence

Le principe de l'accélération de convergence est, étant donnée une suite convergente (u_n), d'essayer de fabriquer une suite (v_n) qui se calcule facilement à partir de la suite (u_n) et qui converge plus vite que (u_n) vers la même limite.

Accélération au moyen d'un équivalent. Notons x la limite. Si on connait un équivalent simple de $(x - u_n)$, il suffit de l'ajouter à u_n... Par exemple, si on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, de limite $\dfrac{\pi^2}{6}$, on a $\dfrac{\pi^2}{6} - u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Écrivant $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{k(k+1)} \leqslant \dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$, il vient $\dfrac{\pi^2}{6} - u_n \sim \dfrac{1}{n}$.

En posant $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$, on aura accéléré la convergence.

NB. Dans certains cas, un développement limité, nous permettra d'accélérer encore plus la convergence.

Accélération de Richardson-Romberg. Si la convergence de (u_n) vers x est géométrique d'ordre λ avec $\lambda \in]-1,0[\cup]0,1[$, on posera $v_n = \dfrac{u_{n+1} - \lambda u_n}{1-\lambda}$. Notons que cela marche aussi pour $\lambda = -1$ (et aussi, pour $\lambda = 0$, mais cela n'a aucun intérêt...).

Dans plusieurs exemples importants (que l'on rencontre dans des suites récurrentes ou des évaluations d'intégrales), la suite (v_n) ainsi construite converge aussi géométriquement avec un ordre plus petit. On pourra alors répéter cette méthode.

Par exemple, si $u_n = x + a_1\lambda_1^n + a_2\lambda_2^n + o(\lambda_2^n)$ où $|\lambda_2| < |\lambda_1| < 1$, on va poser $v_n = \dfrac{u_{n+1} - \lambda_1 u_n}{1-\lambda_1}$, puis $w_n = \dfrac{v_{n+1} - \lambda_2 v_n}{1-\lambda_2}$ et on aura $x - w_n = o(\lambda_2^n)$ (on remarque que, si a_1 et a_2 sont non nuls, (u_n) est géométrique d'ordre λ_1 et (v_n) est géométrique d'ordre λ_2).

Méthode d'Aitken. Il arrive que l'on sache que la convergence est géométrique mais qu'on ne connaisse pas l'ordre λ : c'est souvent le cas pour les suites récurrentes. Dans ce cas, on remplace λ par $\dfrac{u_{n+2} - u_{n+1}}{u_{n+1} - u_n}$ qui converge vers λ. Ainsi, on va poser $v_n = \dfrac{u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2}{u_n + u_{n+2} - 2u_{n+1}}$.

2.3 Suites données par une formule de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ une application. Soit $u_0 \in I$ On pose $u_n = f^n(u_0)$.

Rappelons deux faits importants :

Proposition. *Si (u_n) converge vers $x \in I$ et f est continue en x, alors $f(x) = x$.*

Théorème du point fixe. *Toute application contractante f d'un espace métrique* complet *X non vide dans lui-même admet un unique point fixe. Pour tout $u \in X$, la suite $(f^n(u))$ converge vers cet unique point fixe.*

Rappelons que f est dite contractante s'il existe $k \in [0,1[$ tel que l'on ait $d(f(x), f(y)) \leqslant kd(x,y)$ pour tous $x, y \in X$.

Dans le cas d'une fonction f dérivable définie sur un intervalle I, remarquons que f est contractante, si et seulement s'il existe $k \in [0,1[$ tel que pour tout $x \in I$ on ait $|f'(x)| \leqslant k$ (on utilise le théorème des accroissements finis).

Enfin, si $f : I \to I$ et si une suite (u_n) vérifie la formule de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et converge vers un point x sans être stationnaire et f est dérivable en x, alors $\dfrac{u_{n+1} - x}{u_n - x} \to f'(x)$. En particulier, $|f'(x)| \leqslant 1$, et si $|f'(x)| \neq 1$, on pourra donc appliquer les méthodes d'accélération de convergence vues ci-dessus. Notons qu'*a priori* on ne connait pas $f'(x)$ puisqu'on ne connait pas x... On appliquera alors la méthode d'Aitken.

2.4 Solution d'une équation $g(x) = 0$

Enfin cherchons à approcher une solution ℓ d'une équation $g(x) = 0$.

Dichotomie. Si $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et $g(a)$, $g(b)$ sont de signes opposés, alors par le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule sur $[a,b]$. Pour localiser un zéro de g, on pourra procéder par dichotomie : on considérera le signe de $g((a+b)/2)$; en fonction de ce signe, on saura s'il y a un point ℓ où g s'annule dans $[a,(a+b)/2]$ ou dans $[(a+b)/2, b]$. Ainsi, on aura divisé l'incertitude sur ℓ par 2... et on continue.

En pratique, on pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Si a_n et b_n sont construits $g(a_n)g(b_n) \leqslant 0$, on construit a_{n+1} et b_{n+1} de la manière suivante : posons $c_n = (a_n + b_n)/2$; si $g(a_n)g(c_n) \leqslant 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$; si $g(a_n)g(c_n) > 0$, alors $g(b_n)g(c_n) \leqslant 0$ et l'on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$. Dans tous les cas, on a $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$, $b_{n+1} - a_{n+1} = (b_n - a_n)/2$ et $g(a_{n+1})g(b_{n+1}) \leqslant 0$. Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et g s'annule en leur limite commune.

Méthode de la sécante. Si g est plus régulière, au moins de classe C^1, on peut sur un petit intervalle l'assimiler à une fonction affine. Ainsi, si on a deux points a et b proches tels que $g(a)/g(b)$ loin de 1, on s'approchera d'une solution ℓ de $g(x) = 0$ en se basant sur la sécante : on posera $c = \dfrac{ag(b) - bg(a)}{g(b) - g(a)}\cdot$

Retour sur les suites récurrentes. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et posons $f(x) = x + \alpha g(x)$. On remarque alors que $g(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = x$. On sera amené à considérer une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour que la méthode soit efficace, on choisira α de sorte à ce que $|f'|$ soit la plus petite possible - du moins autour du point ℓ cherché, soit $1 + \alpha g'(\ell)$ petit. Idéalement $\alpha = -\dfrac{1}{g'(\ell)}\cdot$

Méthode de Newton. Le calcul ci-dessus, nous incite à poser $f(x) = x - \dfrac{g(x)}{g'(x)}\cdot$ Le point ainsi défini est l'abscisse de l'intersection de la tangente en x au graphe de g avec l'axe des x. Si g est de classe C^2 et g' ne s'annule pas, alors f est de classe C^1 et l'on a $f'(x) = 1 - \dfrac{g'(x)^2 - g(x)g''(x)}{g'(x)^2} = \dfrac{g(x)g''(x)}{g'(x)^2}\cdot$ En particulier, $f'(\ell) = 0$; donc une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ avec u_0 suffisamment proche de ℓ va converger rapidement vers ℓ. Elle sera (au moins) quadratique : la suite $\dfrac{u_{n+1} - \ell}{(\ell - u_n)^2}$ a une limite finie $\dfrac{g''(\ell)}{2g'(\ell)}$, donc, si cette limite n'est pas nulle, $u_{n+1} - \ell$ est du même ordre que $(\ell - u_n)^2$: le nombre de décimales exactes de u_n double (en gros) à chaque nouvelle étape.

Remarque. Si g est convexe, en partant d'un point u_0 tel que $g(u_0) > 0$, la méthode de Newton va donner une suite $f^n(u_0)$ qui converge toujours (car monotone). De même si g est concave et $g(u_0) < 0$. Notons cependant que (si on part de u_0 suffisamment proche de ℓ) et $g''(\ell) = 0$, la convergence sera cubique : le nombre de décimales exactes de u_n triplera (en gros) à chaque nouvelle étape.

> Notons cependant que toutes ces méthodes ne marchent pas bien si $|g'|$ est trop petit, et en particulier si $g'(\ell) = 0$. Pour appliquer ce type de méthodes, il faut commencer par éliminer les points où g et g' s'annulent simultanément. En particulier, si g est un polynôme, on « chassera » les racines multiples en regardant les racines de $PGCD(g, g')$.

2.5 Exercices

2.1 Exercice. Posons $u_0 = 2$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n}$. Démonter que la suite u_n converge vers $\sqrt{2}$. Démontrer que $u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$; en déduire une majoration de $u_n - \sqrt{2}$. Combien de termes de la suite doit on utiliser pour approcher $\sqrt{2}$ avec 100 décimales ?

Questions subsidiaires :
- Quelle est ici la méthode utilisée pour approcher $\sqrt{2}$?
- Approcher de même $a^{1/b}$ où $a, b \in \mathbb{N}^*$ $(a, b \geqslant 2)$.

2.2 Exercice. On considère les suites $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ qui convergent vers e. Donner un équivalent de $e - u_n$ et de $e - v_n$. Quelle suite utiliseriez-vous pour approcher e ? Comment accélérer la convergence de u_n vers e ?

2.3 Exercice. On approche le cercle de rayon 1 par un polygone régulier à n côtés ($n \geqslant 2$). On note a_n l'aire de ce polygone et b_n sa demi-circonférence.

1. Exprimer a_n, b_n à l'aide d'un sinus.
2. On pose $c_n = \cos \dfrac{\pi}{n}$. Exprimer a_{2n}, b_{2n}, c_{2n} en fonction de a_n, b_n, c_n. En déduire des méthodes d'approximations de π.

2.4 Exercice. 1. Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}\cdot$

2. Combien faut il de termes pour obtenir une approximation de π à 10^{-6} près ?
3. On pose $v_n = \displaystyle\sum_{k=2n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \frac{1}{8n}$ et $w_n = \displaystyle\sum_{k=2n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \frac{1}{8n+1}$; étudier le sens de variation de ces suites et en déduire un encadrement de π. Combien de termes faut il utiliser maintenant pour obtenir une approximation de π à 10^{-6} près ?
4. Démontrer que l'on a $\dfrac{\pi}{4} = 4 \arctan \dfrac{1}{5} - \arctan \dfrac{1}{239}$ (formule de Machin). En déduire une méthode d'approximation de π. Combien de termes faudra-t-il utiliser pour obtenir une approximation de π à 10^{-6} près ?

2.6 Solutions

Exercice 2.1. Par récurrence sur n, on a $u_n > 0$. Par ailleurs,

$$\frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} = \frac{u_n^2 - 2\sqrt{2}u_n + 2}{2u_n} = \frac{u_n}{2} - \sqrt{2} + \frac{1}{u_n} = u_{n+1} - \sqrt{2}.$$

On en déduit que pour tout n on a $u_n > \sqrt{2}$, donc $u_n^2 > 2$, donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{u_n}{2} < 0$. La suite u_n est donc décroissante, minorée par $\sqrt{2}$ donc convergente. Enfin, sa limite ℓ est positive et vérifie $\ell = \dfrac{\ell}{2} - \dfrac{1}{\ell}$, donc $\ell = \sqrt{2}$.

Puisque $u_n \geqslant \sqrt{2}$, il vient $u_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant \dfrac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}}$. Posons $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$; on a donc $v_{n+1} \leqslant v_n^2$. Il vient, $v_n \leqslant v_1^{2^{n-1}}$ (pour $n \geqslant 1$). Or $v_1 = \dfrac{1,5 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} < 0,031$. Donc $u_n - \sqrt{2} \leqslant 2\sqrt{2}.(0,031)^{2^{n-1}}$. Pour avoir 100 décimales exactes, on doit avoir $u_n - \sqrt{2} < 10^{-100}$. Il suffit donc d'avoir $2^{n-1} \log_{10}(0,031) > 100 + \log_{10}(2\sqrt{2})$. Donc $n = 8$ convient (à noter que le nombre de décimales exactes double à chaque itération).

Exercice 2.2. On a $\ln u_n = n \ln\Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big) = n\Big(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o(n^{-2})\Big) = 1 - \dfrac{1}{2n} + o(n^{-1})$, donc $u_n = e\Big(1 - \dfrac{1}{2n}\Big) + o(n^{-1})$. En d'autres termes $e - u_n \sim \dfrac{e}{2n}\cdot$

La suite (v_n) est croissante et la suite (w_n) définie par $w_n = v_n + \dfrac{1}{n \cdot n!}$; on a $v_{n+1} \leqslant e \leqslant w_n$, donc $\dfrac{1}{(n+1)!} \leqslant e - v_n \leqslant \dfrac{1}{n \cdot n!}$, ce qui prouve que $e - v_n \sim \dfrac{1}{(n+1)!}\cdot$

Bien sûr, la suite (v_n) converge bien plus vite que la suite (u_n).

Pour « accélérer » (u_n), commençons par remarquer que le calcul de u_{2^n} n'utilise pas 2^n opérations mais juste n : en effet, pour élever un nombre à la puissance 2^n, on procède à n élévations au carré ! ([3])

La vitesse de convergence est maintenant géométrique d'ordre $\dfrac{1}{2}$ et on peut donc utiliser la méthode de Richardson-Romberg.

Remarquons que l'on a'accélère aussi la convergence en remplaçant u_N par $\left(1+\dfrac{1}{N}+\dfrac{1}{2N^2}\right)^N$ (on pourra prendre encore $N = 2^n$).

En continuant cette idée, on finit par mélanger les deux suites en posant $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!N^k}\right)^N$.

Exercice 2.3.

1. La longueur du côté opposé d'un triangle isocèle dont les deux côtés égaux sont de longueur 1 et d'angle au sommet α vaut $2\sin(\alpha/2)$ et son aire vaut $\dfrac{\sin\alpha}{2}$. On en déduit que $a_n = \dfrac{n\sin(2\pi/n)}{2}$ et $b_n = n\sin\pi/n$.
   Remarquons que $b_n = a_{2n}$.
2. On a $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$ et $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, donc pour $\alpha \in [0, \pi/2]$, il vient $\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{\cos 2\alpha + 1}{2}}$ et $\sin\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}\cdot$ On a donc $c_{2n} = \sqrt{\dfrac{c_n+1}{2}}$, $a_{2n} = \dfrac{a_n}{c_n}$ et $b_{2n} = \dfrac{b_n}{c_{2n}}$
   On a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \pi$. On définit alors des suites (u_n) et (v_n) vérifiant les propriétés de récurrence $v_{n+1} = \sqrt{\dfrac{v_n+1}{2}}$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{v_{n+1}}$; on peut commencer par $u_0 = b_6 = 3$ et $v_0 = c_6 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ on aura $u_n = b_{6.2^n}$ qui conduit aux approximations d'Archimède ; prenant $u_0 = b_2 = 2$ et $v_0 = c_2 = 0$, on trouve la formule de Viète
   $$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$$
   NB. Notons que l'on a $\alpha - \sin\alpha \sim \alpha^3/6$, d'où une estimation de l'erreur : la convergence est géométrique d'ordre $1/4$ (et une accélération de la convergence en utilisant la méthode de Richardson-Romberg).
   On peut encadrer π en utilisant l'encadrement $\sin\alpha < \alpha < \tan\alpha$, qui va donner $b_n < \pi < \dfrac{b_n}{c_n}\cdot$

Exercice 2.4.

1. Pour $x \in [0, 1[$, on a $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-x^2)^k$, d'où par intégration
   $$\arctan x = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}\cdot$$
   Pour $x \in [0, 1]$, cette dernière série est alternée donc convergente. Notons $f(x)$ sa somme. Pour $x \in [0, 1[$, on a donc $f(x) = \arctan x$. Or, encore par le théorème spécial des séries alternées, on a, pour tout $x \in [0, 1]$,
   $$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}\right| \leqslant \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \leqslant \frac{1}{2n+3}\cdot$$

3. Et donc, pour élever un nombre à la puissance N, il faut en gros $\log_2 N$ opérations. Cette idée est très importante en algorithmique. Elle est par exemple à la base du code RSA.

En d'autres termes, la convergence de la série est uniforme sur $[0,1]$ (on vient de démontrer dans notre cas le *critère d'Abel uniforme*).

On en déduit que f est limite uniforme d'une suite de fonctions continues : elle est continue sur tout l'intervalle $[0,1]$. On a donc $f(1) = \lim_{t\to 1^-} f(t) = \lim_{t\to 1^-} \arctan t = \arctan 1 = \pi/4$.

2. Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. La majoration de l'erreur pour une série alternée donne $\left|\frac{\pi}{4} - S_n\right| \leqslant \frac{1}{2n+3}\cdot$ On veut donc $\frac{4}{2n+3} \leqslant 10^{-6}$, on dot prendre n ne de l'ordre de 2.10^6 (deux millions de termes)...

   NB. En regroupant les termes 2 par 2, on peut écrire $S_{2m-1} = \sum_{\ell=0}^{m-1} \frac{2}{(4\ell+1)(4\ell+3)}$. On trouve un équivalent de l'erreur $\pi - 4S_{2m-1} \sim \frac{1}{2m-1}\cdot$ Donc un million de termes suffisait... On peut aussi accélérer la convergence approchant π par $4S_{2m-1} + \frac{1}{2m}$ - et dans ce cas un millier de termes fera l'affaire...

3. Rappelons la formule $\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}\cdot$

   Posons $a = \arctan \frac{1}{5}$ et $b = \arctan \frac{1}{239}$; remarquons que $0 < b < a < \arctan 1 = \frac{\pi}{4}\cdot$

   On a $\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a} = \frac{5}{12}\cdot$

   Enfin, on a $\tan 4a = \frac{2\tan 2a}{1-\tan^2 2a} = \frac{120}{119} = \frac{1+\frac{1}{239}}{1-\frac{1}{239}} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + b\right)$; puisque $4a$ et $\frac{\pi}{4} + b$ sont tous deux dans l'intervalle $]0,\pi[$ et ont même image par « tan », ils sont égaux.

4. On approche $\arctan \frac{1}{5} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{5^{2k+1}(2k+1)}$ et $\arctan \frac{1}{239} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{239^{2k+1}(2k+1)}\cdot$ Il vient

$$16\sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{5^{2k+1}(2k+1)} - \frac{4}{239} + \frac{4}{3\times 239^3} > \pi > 16\sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{5^{2k+1}(2k+1)} - \frac{4}{239} - \frac{16}{11\times 5^{11}}.$$

   Or $11 \times 5^{11} > \frac{16\times 10^8}{3}$ et $3\times 239^3 > 4\times 10^7$, donc $S - 3\times 10^{-8} < \pi < S + 10^{-7}$ où l'on a posé $S = 16\sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{5^{2k+1}(2k+1)} + \frac{4}{239} \simeq 3,1415925847$.

   Avec six termes, on a obtenu une approximation meilleure qu'avec notre million de termes plus haut...