Université Denis Diderot (Paris 7) *Samedi 11 janvier 2014*

Devoir N^{o} 8

(Agrégation 1998 - 2ème épreuve de mathématiques)

NOTATIONS

On désigne
* par $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, et $\mathbb{C}$ respectivement les ensembles des entiers naturels, des entiers relatifs, des nombres réels et des nombres complexes.
* par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels privé de 0.
* par $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.
* par ln la fonction logarithme népérien.
* par E l'espace vectoriel des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues et 2π-périodiques ; pour $f \in E$, on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)| \qquad \text{et} \qquad \|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt.$$

Toutes les suites (u_n) considérées sont indexées par $\mathbb{N}^*$. Si la suite (u_n) a pour limite ℓ, on écrit $u_n \to \ell$.

Le but du problème est l'étude des sommes partielles $S_n(f, x_0)$ de la série de Fourier d'une fonction f de E en un point fixé x_0 de $\mathbb{R}$:

$$S_n(f, x_0) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx_0} \qquad \text{avec} \qquad c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt.$$

On sait que $S_n(f, x_0)$ peut ne pas avoir de limite ; on se propose de démontrer que cependant, sous une forme affaiblie, on a une convergence de $S_n(f, x_0)$ vers $f(x_0)$. On étudie pour cela les moyennes de Cesáro

$$T_N(f) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |S_n(f, x_0) - f(x_0)| \quad (N \in \mathbb{N}^*)$$

Le problème se compose de trois parties :

* la partie I établit deux résultats préliminaires A et C ;
* la partie II, qui n'utilise que A, conclut à la convergence affaiblie annoncée ;
* la partie III, qui utilise C, étudie la convergence affaiblie de sous-suites de la suite des sommes partielles.

L'attention des candidats est attirée sur le fait que les constantes utilisées dans les inégalités sont en général loin d'être les meilleures possibles.

Partie I

A. Suites presque convergentes et moyennes de Cesáro

Une partie T de $\mathbb{N}^*$ est dite *négligeable* si $\dfrac{|T_n|}{n} \to 0$, où $T_n = T \cap [1, n]$ et $|T_n|$ désigne le cardinal de T_n.

Une suite de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dite *presque convergente* vers $\ell \in \mathbb{C}$ (en abrégé $a_n \stackrel{ps}{\to} \ell$) s'il existe $T \subset \mathbb{N}^*$ négligeable telle que :

$$(\forall\varepsilon > 0)\ (\exists p \in \mathbb{N}^*),\ (\forall n \in \mathbb{N}^*),\ ((n \geqslant p \text{ et } n \notin T) \Rightarrow |a_n - \ell| \leqslant \varepsilon) :$$

(ℓ est alors unique, on ne demande pas de le vérifier).

1. Montrer que l'ensemble $P = \{n \in \mathbb{N}^*,\ \ \exists m \in \mathbb{N}^*, n = m^2\}$ des carrés parfaits est négligeable.
2. a) Montrer que (a_n) définie par $a_n = \begin{cases} n & \text{si } n \in P \\ \dfrac{1}{n} & \text{sinon} \end{cases}$ est presque convergente vers 0.

b) Une sous-suite d'une suite presque convergente est-elle presque convergente ?

3. Soit (a_n) une suite de nombres réels positifs ou nuls ; on pose $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ et on suppose que $b_n \to 0$.

   a) Montrer qu'il existe une suite décroissante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels positifs telle que $u_n \to 0$ et $\dfrac{b_n}{u_n} \to 0$.

   b) Soit $T = \{j \in \mathbb{N}^*;\ a_j \geqslant u_j\}$. Montrer que T est négligeable.

   c) En déduire que $a_n \overset{ps}{\to} 0$.

   d) Montrer que l'hypothèse de positivité est essentielle en donnant un exemple de suite (a_n) de réels pour laquelle $|a_n| \to 1$ alors que $b_n \to 0$.

B. Sur la fonction Γ

1. Pour $\alpha \in]0, +\infty[$, démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \big|\ln r\big|^{\alpha-1} dr$ est convergente et que l'on a l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \big|\ln r\big|^{\alpha-1} dr = \Gamma(\alpha)$ (où $\displaystyle\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt$).

2. Démontrer que, pour $\alpha \in]0, +\infty[$ et $\beta \in]-1, +\infty[$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \big|\ln r\big|^{\alpha-1} r^\beta dr$ converge et que l'on a $\displaystyle\int_0^1 \big|\ln r\big|^{\alpha-1} r^\beta dr = \Gamma(\alpha)(1+\beta)^{-\alpha}$.

C. Encadrement d'une fonction définie par une intégrale

1. Montrer que, pour $r \in [0, 1[$ fixé, la formule :

$$P_r(t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(nt)$$

   définit un élément P_r de E tel que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $c_k(P_r) = r^{|k|}$; on pose $P(r,t) = P_r(t)$.

2. a) Montrer que : $P(r,t) = \dfrac{1-r^2}{1 - 2r\cos t + r^2} = \dfrac{1-r^2}{(1-r)^2 + 4r\sin^2(\frac{t}{2})}$.

   b) Montrer que, pour $|t| \leqslant \pi$, on a $\dfrac{1-r}{(1-r)^2+t^2} \leqslant P(r,t) \leqslant \dfrac{6(1-r)}{(1-r)^2 + rt^2}$ (on rappelle que, pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin x \geqslant \frac{2}{\pi} x$).

3. On suppose que $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Soit $\alpha \in]0, 1[$.

   a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\psi(t) = \int_0^1 P(r,t)|\ln r|^{\alpha-1} dr$ est convergente.

   b) Démontrer que la fonction ψ est continue sur chacun des intervalles $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$.

4. On suppose que $0 < |t| \leqslant \pi$.

   a) Montrer que, pour $0 \leqslant u \leqslant \frac{1}{2}$, on a $\ln(1-u) \geqslant -2u$; en déduire que $\displaystyle\psi(t) \geqslant \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{r^\alpha}{r^2+t^2} dr$.

   b) Montrer que on a $\displaystyle\psi(t) \leqslant 12 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{r^\alpha}{r^2+t^2} dr + 12$.

   c) Montrer qu'il existe deux réels a et b strictement positifs ne dépendant que de α tels que l'on ait : $a|t|^{\alpha-1} \leqslant \psi(t) \leqslant b|t|^{\alpha-1}$.

5. a) Démontrer que que l'intégrale de ψ sur $]0, 2\pi[$ est convergente.
   b) Démontrer que l'intégrale double sur $]0,1[\times]0,2\pi[$ de la fonction (continue positive) $(r,t) \mapsto P(r,t)|\ln r|^{\alpha-1}$ est finie.
   c) Démontrer que l'on a $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \psi(t)e^{-ikt}\,dt = \Gamma(\alpha)(1+|k|)^{-\alpha}$ (on justifiera la convergence de cette intégrale).

Partie II

Sommes partielles de séries de Fourier

On rappelle que, pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_n(f, x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x_0 - t)D_n(t)dt$$

où D_n appartenant à E est le noyau de Dirichlet donné pour $0 < |t| \leqslant \pi$ par

$$(*) \qquad D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}} = 2\frac{\sin nt}{t} + r_n(t) \quad \text{avec} \quad |r_n(t)| \leqslant 2$$

(on ne demande pas de vérifier ces inégalités.)

1. Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N) \in \mathbb{U}^N$.
   a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} \Big|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n \sin nt\Big|^2 dt = N\frac{\pi}{2}\cdot$
   b) Soit $\delta \in]0, \pi[$; montrer l'inégalité : $\displaystyle\int_\delta^{\pi} \Big|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n \frac{\sin nt}{t}\Big|dt \leqslant \frac{1}{\sqrt{\delta}}\Big(\int_0^{\pi}\Big|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n \sin nt\Big|^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}}.$
   c) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} \Big|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n \frac{\sin nt}{t}\Big|dt \leqslant 3N.$
   d) En utilisant (*), montrer que $\displaystyle\Big\|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n D_n\Big\|_1 \leqslant 5N.$
2. Soit $h \in E$. Montrer qu'il existe $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)$ appartenant à $\mathbb{U}^N$, dépendant de h, x_0 et N, tels que :
   $$T_N(h) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x_0 - t)\Big(\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n \frac{D_n(t)}{N}\Big)dt - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n h(x_0).$$
   En déduire que : $T_N(h) \leqslant 6\|h\|_\infty$.
3. Pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit f_n par : $f_n(x) = n\displaystyle\int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt.$
   a) Montrer que f_n est de classe C^1.
   b) Montrer que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.
4. Montrer que, pour $g \in E$ de classe C^1, on a $T_N(g) \to 0$.
5. a) Montrer que, pour $f, g \in E$, on a $T_N(f) \leqslant T_N(g) + 6\|f - g\|_\infty$.
   b) En déduire que pour tout $f \in E$ on a $(S_n(f, x_0)) \xrightarrow{ps} f(x_0)$.

Partie III

Sous-suites de la suite des sommes partielles

1. Soit (λ_n) une suite strictement croissante d'éléments de $\mathbb{N}^*$ telle qu'il existe un réel $c > 0$ vérifiant la condition suivante :

$$(**) \qquad \forall N \in \mathbb{N}^*, \forall (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N) \in \mathbb{U}^N ; \left\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n D_{\lambda_n} \right\|_1 \leqslant cN.$$

Montrer que, pour toute fonction $f \in E$, on a $(S_{\lambda_n}(f, x_0)) \xrightarrow{ps} f(x_0)$.

Dans toute la fin du problème la suite (λ_n) et le réel $\alpha \in \,]0, 1[$ vérifiant les trois conditions suivantes :

(i) $\lambda_1 = 1$;

(ii) $\forall (u, v) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a $\lambda_{u+v} \geqslant \lambda_u + \lambda_v$;

(iii) Il existe un réel $A > 0$ tel que : $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \lambda_n^{-\alpha} \leqslant AN\lambda_N^{-\alpha}$.

(La suite (λ_n) définie par $\lambda_n = n^2$, par exemple, vérifie ces conditions avec $\alpha = \dfrac{1}{3}$ et $A = 3$).

2. On reprend la fonction ψ définie en I.B. On pose

$$c_k(\psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(t) e^{-ikt} dt = \Gamma(\alpha)(1 + |k|)^{\alpha - 1}.$$

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N) \in \mathbb{U}^N$ et posons $I_N = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \Big| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n e^{i\lambda_n t} \Big|^2 \psi(t) dt$.

a) Montrer que : $I_N = N\,\Gamma(\alpha) + \displaystyle\sum_{1 \leqslant j \neq k \leqslant N} \varepsilon_j \overline{\varepsilon_k} c_{\lambda_k - \lambda_j}(\psi)$. En déduire que : $I_N \leqslant 3AN^2\Gamma(\alpha)\lambda_N^{-\alpha}$.

b) Vérifier que $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \Big| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n \sin \lambda_n t \Big|^2 \psi(t) dt \leqslant I_N$.

c) Établir l'inégalité : $\displaystyle\int_0^{\pi} \Big| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n \frac{\sin \lambda_n t}{t} \Big| dt \leqslant \delta N \lambda_N + B\delta^{-\alpha/2}\sqrt{I_N}$ où B est une constante strictement positive et δ un élément arbitraire de $]0, \pi[$.

3. Montrer qu'il existe une constante c telle que la relation (**) ait lieu.