Université Paris Diderot *Samedi 11 janvier 2014*

Corrigé du devoir N° 8

(Agrégation 1998 - 2ème épreuve de mathématiques)

Partie I

A. Suites presque convergentes et moyennes de Cesáro

1. Le nombre de carrés de nombres entiers dans $[1, n]$ est $\sqrt{n}$, donc $\dfrac{|P_n|}{n} \to 0$.
2. a) La suite (a_n) coïncide en dehors de l'ensemble négligeable P, avec la suite $(1/n)$ qui converge vers 0.

   b) La suite (a_{n^2}) extraite de la suite a_n tend vers $+\infty$; elle n'est pas presque convergente.
3. a) Si $a_n = 0$ pour tout n on peut prendre $u_n = 1/n!$.
   Sinon, b_n ne s'annule pas. Posons $v_n = \sup\limits_{k \geqslant n} b_k$ et $u_n = \sqrt{v_n}$; alors (u_n) est une suite décroissante de limite nulle. Comme $b_n \leqslant v_n$, la suite $\left(\dfrac{b_n}{u_n}\right)$ tend vers 0 aussi.

   b) On a $nb_n \geqslant \sum\limits_{k \in T_n} a_k \geqslant \sum\limits_{k \in T_n} u_k \geqslant |T_n| u_n$, donc $\dfrac{|T_n|}{n} \leqslant \dfrac{b_n}{u_n}$ et T est négligeable.

   c) Posons $a'_n = \inf(a_n, u_n)$. La suite (a'_n) tend vers 0. La suite (a_n) coïncide avec (a'_n) en dehors de l'ensemble négligeable T, donc $a_n \overset{ps}{\to} 0$.

   d) Posons $a_n = (-1)^n$. On a $|a_n| = 1$. On trouve $b_{2n} = 0$ et $b_{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1}$, donc $(b_n) \to 0$.

B. Sur la fonction Γ

On démontre directement la question 2 : la question 1 est le cas particulier $\beta = 0$.
Pour $0 < u < v < 1$, faisant le changement de variable $y = -\ln r$, donc $r = e^{-y}$ et $dr = -e^{-y}dy$, on trouve $\displaystyle\int_u^v |\ln r|^{\alpha-1} r^\beta dr = \int_{-\ln v}^{-\ln u} y^{\alpha-1} e^{-y(\beta+1)} dy$. On effectue alors le changement de variable $x = (\beta+1)y$. Il vient $\displaystyle\int_u^v |\ln r|^{\alpha-1} r^\beta dr = (\beta+1)^{-\alpha} \int_{-(\beta+1)\ln v}^{-(\beta+1)\ln u} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-t}\, dt$ converge, en faisant tendre u vers 0 et v vers 1, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \big|\ln r\big|^{\alpha-1} r^\beta dr$ est convergente et que l'on a l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \big|\ln r\big|^{\alpha-1} r^\beta dr = (\beta+1)^{-\alpha}\Gamma(\alpha)$.

C. Encadrement d'une fonction définie par une intégrale

1. Puisque $|r^n \cos(nt)| \leqslant r^n$ et que $0 \leqslant r < 1$, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(nt)$ est normalement convergente. Elle est donc convergente et sa somme P_r est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Elle est clairement périodique de période 2π. Comme la convergence est normale, on peut intervertir la somme et l'intégrale. On a donc

$$2\pi c_k(P_r) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} P_r(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \int_{-\pi}^{\pi} (e^{i(n-k)t} + e^{i(-n-k)t}) dt.$$

   Or, pour $\ell \in \mathbb{Z}$ on a $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\ell t} dt = 2\pi$ si $\ell = 0$ et 0 sinon ; il vient $c_k(P_r) = r^{|k|}$.

2. a) On a $P(r,t) = 1 + 2Re \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (re^{it})^n = 1 + 2Re \dfrac{re^{it}}{1 - re^{it}} = \dfrac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos t}$.
   Or $1 + r^2 - 2r\cos t = (1-r)^2 + 2r(1 - \cos t) = (1-r)^2 + 4r \sin^2(\dfrac{t}{2})$.

b) Pour $|t| < \pi$ et $r \in [0,1[$, on a $t^2 \leqslant 4\sin^2\dfrac{t}{2} \leqslant \dfrac{4}{\pi^2}t^2 \leqslant \dfrac{t^2}{3}$ donc

$$\frac{(1-r)^2 + rt^2}{3} \leqslant (1-r)^2 + 4r\sin^2(\frac{t}{2}) \leqslant (1-r)^2 + t^2.$$

De plus $1 - r \leqslant 1 - r^2 = (1-r)(1+r) \leqslant 2(1-r)$.
Il vient $\dfrac{1-r}{(1-r)^2+t^2} \leqslant P(r,t) \leqslant \dfrac{6(1-r)}{(1-r)^2+rt^2}$.

3. a) Pour $(r,t) \in \Omega = (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \setminus (\{1\} \times 2\pi\mathbb{Z})$, posons encore $P(r,t) = \dfrac{1-r^2}{(1-r)^2 + 4r\sin^2(\frac{t}{2})}$. La fonction P ainsi définie est continue sur Ω. Pour $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$ fixé, la fonction $r \mapsto P(r,t)$ est continue donc bornée sur $[0,1]$. D'après I.B.1, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 P(r,t)|\ln r|^{\alpha-1}\,dr$ est convergente.

b) Si J est un segment conenu dans $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, la fonction P étant (positive et) continue sur le compact $[0,1]\times J$ elle est majorée. Notons M un majorant. On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée puisque $P(r,t)|\ln r|^{\alpha-1}$ est continue sur $]0,1[\times J$ et dominée par $r \mapsto M|\ln r|^{\alpha-1}$.

4. a) La dérivée de $\varphi : u \mapsto \ln(1-u) + 2u$ est positive sur $[0,1/2]$ et $\varphi(0) = 0$, donc $\ln(1-u) \geqslant -2u$, donc $|\ln(1-u)| \leqslant 2u$ et $|\ln(1-u)|^{\alpha-1} \geqslant (2u)^{\alpha-1}$. Effectuant le changement le variable $u = 1-r$, on a (d'après 2.b)

$$\psi(t) \geqslant \int_0^1 \frac{u|\ln(1-u)|^{\alpha-1}}{u^2+t^2}\,du \geqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{u(2u)^{\alpha-1}}{u^2+t^2}du = 2^{\alpha-1}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{r^\alpha}{r^2+t^2}dr \geqslant \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{r^\alpha}{r^2+t^2}dr.$$

b) On a $|\ln(1-u)| \geqslant u$ pour $u \in]0,1[$; donc $\psi(t) \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{6u\,u^{\alpha-1}\,du}{u^2+(1-u)t^2}$. Sur $]1,1/2[$ on a $(1-u) \geqslant 1/2$ donc $u^2 + (1-u)t^2 \geqslant \dfrac{u^2+t^2}{2}$ et on obtient l'inégalité $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{6\,u^\alpha\,du}{u^2+(1-u)t^2} \leqslant 12\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{r^\alpha}{r^2+t^2}dr$. Enfin $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{6\,u^\alpha\,du}{u^2+(1-u)t^2} \leqslant \int_{\frac{1}{2}}^1 6u^{\alpha-2}\,du \leqslant \int_{\frac{1}{2}}^1 6u^{-2}\,du \leqslant 12.$

c) Posant $r = u|t|$, on a $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{u^\alpha}{r^2+t^2}dr = |t|^{\alpha-1}\int_0^{1/2|t|} \frac{u^\alpha\,du}{1+u^2}$. On a donc

$$|t|^{\alpha-1}\int_0^{1/2\pi} \frac{u^\alpha\,du}{1+u^2} \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{u^\alpha}{r^2+t^2}dr \leqslant |t|^{\alpha-1}\int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha\,du}{1+u^2}$$

On a donc $a|t|^{\alpha-1} \leqslant \psi(t) \leqslant b|t|^{\alpha-1}$ avec $a = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{1/2\pi} \frac{u^\alpha\,du}{1+u^2}$ et $b = 12\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha\,du}{1+u^2} + 12\pi^{1-\alpha}$ d'après 4.b) (on remarque que $|t|^{\alpha-1} \geqslant \pi^{\alpha-1}$ puisque $|t| \leqslant \pi$ et $\alpha < 1$).

5. a) Puisque $P(r, 2\pi - t) = P(r,t)$, il vient $\psi(2\pi - t) = \psi(t)$. On peut donc se restreindre à $]0,\pi]$. Or, sur cet intevalle, $\psi(t) \leqslant bt^{\alpha-1}$ qui est intégrable puisque $\alpha - 1 > -1$.

b) On applique le théorème de Fubini-Tonnelli à la fonction positive et continue $(r,t) \mapsto |\ln r|^{\alpha-1}P(r,t)$ définie sur $[0,1]\times]0,2\pi[$. On a

$$\iint_{]0,1[\times]0,2\pi[} |\ln r|^{\alpha-1}P(r,t)\,dr\,dt = \int_0^{2\pi} \psi(t)\,dt < +\infty.$$

c) D'après a), la fonction $t \mapsto e^{-ikt}\psi(t)$ est absolument convergente, donc convergente. D'après (b), la fonction $(r,t) \mapsto e^{-ikt}|\ln r|^{\alpha-1}P(r,t)$ est intégrable sur $[0,1]\times]0,2\pi[$, donc on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt}\psi(t) &= \int_0^1 |\ln r|^{1-\alpha}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,t)e^{-ikt}\,dt\Big)dr \\ &= \int_0^1 |\ln r|^{1-\alpha}r^{|k|}\,dr \\ &= (|k|+1)^{-\alpha}\Gamma(\alpha).\end{aligned}$$

Partie II

Sommes partielles de séries de Fourier

1. a) Pour $k,\ell\in\mathbb{N}$ on a $\displaystyle\int_0^\pi \overline{\varepsilon_k}\varepsilon_\ell \sin kt\sin \ell t\,dt=\frac{\pi}{2}\delta_{k,\ell}$, donc

$$\int_0^\pi \Big|\sum_{n=1}^N \varepsilon_n \sin nt\Big|^2 dt=\int_0^\pi \sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant N} \overline{\varepsilon_k}\varepsilon_\ell \sin kt\sin \ell t\,dt=N\frac{\pi}{2}.$$

b) On a $\displaystyle\int_\delta^\pi \Big|\sum_{n=1}^N \varepsilon_n \frac{\sin nt}{t}\Big|dt\leqslant\Big(\int_\delta^\pi\frac{dt}{t^2}\Big)^{\frac12}\Big(\int_\delta^\pi\Big|\sum_{n=1}^N\varepsilon_n\sin nt\Big|^2dt\Big)^{\frac12}$ (inégalité de Cauchy-Schwarz).

Or $\displaystyle\int_\delta^\pi\frac{dt}{t^2}=\frac1\delta-\frac1\pi\leqslant\frac1\delta$ et $\displaystyle\int_\delta^\pi\Big|\sum_{n=1}^N\varepsilon_n\sin nt\Big|^2dt\leqslant\int_0^\pi\Big|\sum_{n=1}^N\varepsilon_n\sin nt\Big|^2dt.$

c) Pour $t\in\mathbb{R}$, comme $|\sin s|\leqslant|s|$, on a $\displaystyle\Big|\sum_{n=1}^N\varepsilon_n\frac{\sin nt}{t}\Big|\leqslant\sum_{n=1}^N\Big|\varepsilon_n\frac{\sin nt}{t}\Big|\leqslant\sum_{n=1}^N n\leqslant N^2$. Donc, pour tout $\delta\in\,]0,\pi[$, on a

$$\int_0^\pi\Big|\sum_{n=1}^N\varepsilon_n\frac{\sin nt}{t}=\Big|\leqslant\int_0^\delta\Big|\sum_{n=1}^N\varepsilon_n\frac{\sin nt}{t}\Big|+\int_\delta^\pi\Big|\sum_{n=1}^N\varepsilon_n\frac{\sin nt}{t}\Big|\leqslant N^2\delta+\sqrt{\frac{N\pi}{2\delta}}.$$

Prenant $\delta=1/N$, comme $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\leqslant 2$, il vient $\displaystyle\int_0^\pi\Big|\sum_{n=1}^N\varepsilon_n\frac{\sin nt}{t}\Big|dt\leqslant 3N.$

d) Posons $k_n(t)=2\dfrac{\sin nt}{t}$. On a $D_n=k_n+r_n$, donc $\displaystyle\Big\|\sum_{n=1}^N\varepsilon_nD_n\Big\|_1\leqslant\Big\|\sum_{n=1}^N\varepsilon_nk_n\Big\|_1+\sum_{n=1}^N\|r_n\|_1$. Or, par parité, $\displaystyle\Big\|\sum_{n=1}^N\varepsilon_nk_n\Big\|_1=\frac2\pi\int_0^\pi\Big|\sum_{n=1}^N\varepsilon_n\frac{\sin nt}{t}\Big|dt\leqslant 3N$ et, puisque $\|r_n\|_1\leqslant\|r_n\|_\infty\leqslant 2$, il vient $\displaystyle\Big\|\sum_{n=1}^N\varepsilon_nD_n\Big\|_1\leqslant 5N.$

2. Soit $h\in E$. Pour tout $n\in[[1,N]]$, il existe ε_n tel que $|S_n(h,x_0)-h(x_0)|=\varepsilon_n(S_n(h,x_0)-h(x_0))$. Donc

$$T_N(h)=\frac1N\sum_{n=1}^N\varepsilon_n(S_n(h,x_0)-h(x_0))=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi h(x_0-t)\Big(\sum_{n=1}^N\varepsilon_n\frac{D_n(t)}{N}\Big)dt-\frac1N\sum_{n=1}^N\varepsilon_nh(x_0).$$

Il vient $\displaystyle T_N(h)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi\|h\|_\infty\Big|\sum_{n=1}^N\varepsilon_n\frac{D_n(t)}{N}\Big|dt+\frac1N\sum_{n=1}^N\|h\|_\infty\leqslant 6\|h\|_\infty.$

3. a) Soit F une primitive de f. Alors F est de classe C^1 ainsi que l'application $x\mapsto F\Big(x+\dfrac1n\Big)$. Donc l'application $f_n:x\mapsto n\Big(F\Big(x+\dfrac1n\Big)-F(x)\Big)$ est de classe C^1.

b) L'application continue et périodique f est uniformément continue. Donc, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tous $x,t\in\mathbb{R}$ satisfaisant $|t|\leqslant\dfrac1N$ on ait $|f(x+t)-f(x)|\leqslant\varepsilon$. Alors, pour $n\geqslant N$ et $x\in\mathbb{R}$, on a $\displaystyle|f_n(x)-f(x)|=n\Big|\int_0^{\frac1n}f(x+t)-f(x)\,dt\Big|\leqslant\varepsilon$. Cela prouve que $\|f_n-f\|_\infty\to0$.

4. Une fonction $g\in E$ de classe C^1 est, d'après le théorème de Dirichlet, limite de sa série de Fourier. En d'autres termes, la suite $(|S_n(g,x_0)-g(x_0)|)\to0$. Donc la moyenne de Cesáro $(T_N(g))$ de cette suite tend aussi vers 0.

5. a) Par la question 2., il vient $T_N(f-g)\leqslant 6\|f-g\|_\infty$. Or on a immédiatement $T_N(f)\leqslant T_N(f-g)+T_N(g)$.

b) Soient $f\in E$ et $\varepsilon>0$. Il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\|f-f_n\|_\infty\leqslant\varepsilon/7$. La fonction $f_n\in E$ étant de classe C^1, il existe $N_0\in\mathbb{N}$ tel que, pour $N>N_0$, on ait $T_N(f_n)\leqslant\varepsilon/7$. Alors, pour $N>N_0$, on a $\displaystyle T_N(f)=\frac1N\sum_{k=1}^N|S_k(f-g,x_0)+S_k(g,x_0)-(f-g)(x_0)-g(x_0)|\leqslant T_N(f_n)+6\|f-f_n\|_\infty\leqslant\varepsilon$. Donc $T_N(f)\to0$.

En d'autres termes, la suite positive $(|S_n(f,x_0)-f(x_0)|)$ tend vers 0 en moyenne de Cesáro. D'après I.A, elle est presque convergente vers 0, donc $(S_n(f,x_0))\xrightarrow{ps}f(x_0)$.

Partie III

Sous-suites de la suite des sommes partielles

1. On peut reprendre la fin du II :

   * Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour $f \in E$, posons $T_{N,\lambda}(f) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=1}^{N} |S_{\lambda_n}(f, x_0) - f(x_0)|$. De même qu'en II.2, on démontre que, si la condition (**) est satisfaite, on a $T_{N,\lambda}(f) \leqslant (c+1)\|f\|_\infty$.
   * Or $S_{\lambda_n}(f_n, x_0) \to f_n(x_0)$ (c'est une suite extraite d'une suite convergente), donc $T_{N,\lambda}(f_n) \to 0$.
   * On a $T_{N,\lambda}(f) \leqslant T_{N,\lambda}(f - f_n) + T_{N,\lambda}(f_n)$ et comme ci-dessus on en déduit que $T_{N,\lambda}(f) \to 0$.
   * Enfin, $(|S_{\lambda_n}(f, x_0) - f(x_0)|)$ tend vers 0 en moyenne de Cesáro, donc, d'après I.A, $(S_n(f, x_0)) \stackrel{ps}{\to} f(x_0)$.

2. a) Cette intégrale est bien sûr convergente, puisque $\left|\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n e^{i\lambda_n t}\right|^2 \leqslant N^2$ et que l'intégrale de ψ converge. On a $I_N = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{1\leqslant j,k\leqslant N} \varepsilon_j \overline{\varepsilon_k} \int_0^{2\pi} e^{i(\lambda_k-\lambda_j)t}\psi(t)\,dt = Nc_0(\psi) + \sum_{1\leqslant j\neq k\leqslant N} \varepsilon_j\overline{\varepsilon_k} c_{\lambda_k-\lambda_j}(\psi)$.
   Pour $k \neq j$, on a $|\lambda_k - \lambda_j| \geqslant \lambda_{|k-j|}$ (condition (ii)) donc $c_{\lambda_k-\lambda_j} = \Gamma(\alpha)(|\lambda_k - \lambda_j| + 1)^{-\alpha} \leqslant \Gamma(\alpha)\lambda_{|k-j|}^{-\alpha}$.
   Pour $n \in [[1, N]]$ il y a $2(N-n)$ couples (j,k) tels que $|k-j| = n$. Donc on a

$$\begin{aligned}
I_N &\leqslant \Gamma(\alpha)(N + 2\sum_{n=1}^{N}(N-n)\lambda_n^{-\alpha}) \\
&\leqslant \Gamma(\alpha)N(1 + 2\sum_{n=1}^{N}\lambda_n^{-\alpha}) \\
&\leqslant 3\Gamma(\alpha)N\sum_{n=1}^{N}\lambda_n^{-\alpha} \qquad \text{puisque } \lambda_1 = 1; \\
&\leqslant 3\Gamma(\alpha)AN^2\lambda_N^{-\alpha} \qquad \text{condition (iii).}
\end{aligned}$$

   b) Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $F(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n \cos\lambda_n t$ et $G(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n \sin\lambda_n t$. Les fonctions F, G et ψ sont périodiques de période 2π, les fonctions F et ψ sont paires et G est impaire, donc $\displaystyle\int_0^{2\pi} F(t)\overline{G(t)}\psi(t)\,dt = 0$ (en effet $\displaystyle\int_\pi^{2\pi} F(t)\overline{G(t)}\psi(t)\,dt = \int_{-\pi}^{0} F(t)\overline{G(t)}\psi(t)\,dt = -\int_0^{\pi} F(t)\overline{G(t)}\psi(t)\,dt$). Il vient

$$I_N = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big|\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n\cos\lambda_n t\Big|^2\psi(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big|\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n\sin\lambda_n t\Big|^2\psi(t)dt.$$

   c) On a $\displaystyle\int_\delta^\pi \Big|\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n\frac{\sin\lambda_n t}{t}\Big|dt \leqslant \Big(\int_\delta^\pi\Big|\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n\sin\lambda_n t\Big|^2\psi(t)\,dt\Big)^{1/2}\Big(\int_\delta^\pi\frac{dt}{t^2\psi(t)}\Big)^{1/2} \leqslant \sqrt{\pi I_N}\Big(\int_\delta^\pi\frac{dt}{at^{\alpha+1}}\Big)^{1/2}$ où a est la constante définie en I.C.4.c). Donc $\displaystyle\int_\delta^\pi\Big|\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n\frac{\sin\lambda_n t}{t}\Big|dt \leqslant B\delta^{-\alpha/2}\sqrt{I_N}$ où B est une constante strictement positive. De plus $\displaystyle\int_0^\delta\Big|\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n\frac{\sin\lambda_n t}{t}\Big|dt \leqslant \delta\sum_{n=1}^{N}\lambda_n \leqslant \delta N\lambda_N$.

3. Prenant $\delta = \lambda_N^{-1}$ dans 2.c), il vient $\displaystyle\int_0^\pi\Big|\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n\frac{\sin\lambda_n t}{t}\Big|dt \leqslant c'N$ donc $\Big\|\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n D_{\lambda_n}\Big\|_1 \leqslant \Big(\frac{2c'}{\pi} + 2\Big)N$ d'après la relation (*).