5.2 Corrigé de la deuxième épreuve écrite

PARTIE I.

1. C'est l'identité du parallélogramme, obtenue par bilinéarité du produit scalaire.

2.a) Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on a

$$|v(n)_k - v(l)_k| \leqslant \|v(n) - v(l)\|$$

d'où le résultat si $n, l \geqslant N(\epsilon)$.

2.b) La suite $(v(n)_k)_{n \geqslant 0}$ est de Cauchy dans $\mathbf{R}$ qui est complet, et donc elle converge.

2.c) C'est une conséquence immédiate du fait que $v(N(\epsilon)) \in l^2(\mathbf{Z})$.

2.d) Pour tout $n \geqslant N(\epsilon)$ et tout $L \geqslant K$, on a d'après l'inégalité de Minkowski

$$[\sum_{L \geqslant |k| \geqslant K} v(n)_k^2]^{1/2} \leqslant [\sum_{L \geqslant |k| \geqslant K} (v(n)_k - v(N(\epsilon))_k)^2]^{1/2} + [\sum_{L \geqslant |k| \geqslant K} v(N(\epsilon))_k^2]^{1/2}$$

et donc

$$[\sum_{L \geqslant |k| \geqslant K} v(n)_k^2]^{1/2} \leqslant \|v(n) - v(N(\epsilon)\| + \epsilon \leqslant 2\epsilon.$$

En passant à la limite en n, on en déduit

$$[\sum_{L \geqslant |k| \geqslant K} v_k^2]^{1/2} \leqslant 2\epsilon.$$

2.e) D'après d), la série

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} v_k^2$$

est convergente, donc $v = (v_k) \in l^2(\mathbf{Z})$. Si $K \geqslant 0$ et $n, l \geqslant N(\epsilon)$, on a

$$[\sum_{|k| \leqslant K} (v(n)_k - v(l)_k)^2]^{1/2} \leqslant \epsilon$$

donc en passant à la limite en n, on a

$$[\sum_{|k| \leqslant K} (v_k - v(l)_k)^2]^{1/2} \leqslant \epsilon$$

puis en passant à la limite en K,

$$\|v - v(l)\| \leqslant \epsilon$$

pour tout $l \geqslant N(\epsilon)$, ce qui montre que la suite $v(n)$ converge vers v dans $l^2(\mathbf{Z})$ et donc que cet espace est complet.

3.a) Notons d'abors que l'existence de la suite $v(n)$ s'ensuit de la définition de d comme borne inférieure. D'après le 1), on a pour tous u, v dans $l^2(\mathbf{Z})$ que

$$\|\frac{u+v}{2}\|^2 + \|\frac{u-v}{2}\|^2 = \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Si $(u, v) \in C^2$, on a $\frac{u+v}{2} \in C$ puisque cet ensemble est convexe, d'où $\|\frac{u+v}{2}\| \geqslant d$, et le résultat s'ensuit.

3.b) Il s'ensuit du a) que la suite $v(n)$ est de Cauchy, donc converge dans $l^2(\mathbf{Z})$ puisque cet espace est complet. Sa limite v appartient à C puisque cet ensemble est fermé, et la continuité de l'application norme montre que $\|v\| = d$. Si v et w sont deux points de C, on a comme au a) que

$$\|\frac{v-w}{2}\|^2 \leqslant \frac{1}{2}(\|v\|^2 + \|w\|^2) - d^2$$

et donc si $\|v\| = \|w\| = d$, on a $v = w$.

4.a) Soit $x \in C\backslash\{0\}$. La droite vectorielle D engendrée par x est d'intérieur vide dans $l^2(\mathbf{Z})$, donc elle ne contient pas l'ouvert non vide $l^2(\mathbf{Z})\backslash C$. Soit donc $y \in l^2(\mathbf{Z})\backslash(C \cup D)$. Le segment $[x, y]$ rencontre C en $z \neq 0$ puisque $y \notin D$. (Remarque : dans cette question comme dans les suivantes, une figure précise peut constituer un argument acceptable).

4.b) Soit $z \in C\backslash\{0\}$. Puisque $\|z\|/3 > 0$ et que $z \in C$, il existe $v \notin C$ tel que $\|v - z\| < \|z\|/3$, et donc

$$\|v\| \geqslant \frac{2}{3}\|z\| > \|v - z\| \geqslant inf\{\|v - x\|;\ x \in C\} > 0.$$

4.c) En appliquant la question 3.b) au convexe $(C - v)$, on trouve $p \in C$ tel que

$$\|v - p\| = inf\{\|v - x\|;\ x \in C\}.$$

L'égalité ci-dessus montre que $[v, p] \cap C = \{p\}$ et donc $p \in C$. Enfin, $p \neq 0$ puisque $\|v\| > inf\{\|v - x\|;\ x \in C\}$.

4.d) On a

$$< v - p, q - p >= \|v - p\|^2 - < v - p, v - q >$$

et d'autre part la forme polaire du produit scalaire montre que

$$4 < v - p, v - q >= \|2v - p - q\|^2 + \|q - p\|^2$$

donc

$$4 < v - p, v - q >\geqslant 4\|v - \frac{p+q}{2}\|^2$$

et puisque $\frac{p+q}{2} \in C$, on a

$$< v - p, v - q >\geqslant \|v - p\|^2$$

et par conséquent $< v - p, q - p >\leqslant 0$. (Remarque : on peut aussi utiliser le fait que la fonction $F(t) = \|v - p + t(p - q)\|^2$ atteint son minimum sur $[0, 1]$ en $t = 0$, donc que sa dérivée en $t = 0$ est positive, et cette dérivée vaut $< v - p, p - q >$).

PARTIE II.

1. Il est évident que (i) implique (ii). D'après (ii), il existe $a > 0$ tel que $\|T(x)\| \leqslant 1$ dès que $\|x\| \leqslant a$, donc par homogénéité on a $\|T(x)\| \leqslant 1/a$ dès que $\|x\| \leqslant 1$, d'où (iii). Enfin, si

$$\|T(x)\| \leqslant M$$

dès que $\|x\| \leqslant 1$, l'application T est M-Lipschitzienne par linéarité, donc en particulier continue en tout point et on a (i).

2.a) Une combinaison linéaire d'applications linéaires (continues) est linéaire (continue), donc $L(l^2(\mathbf{Z}))$ est un espace vectoriel. L'homogénéité de la fonctionnelle $\| \, . \, \|_L$ est claire, et l'inégalité triangulaire se vérifie directement par passage au sup. Si $\|T\|_L = 0$, on a $\|T(x)\| = 0$ si $\|x\| \leqslant 1$, donc pour tout x par homogénéité.
2.b) Pour tout $T \in L(l^2(\mathbf{Z}))$ et tout $x \in l^2(\mathbf{Z})$, on a

$$\|T(x)\| \leqslant \|T\|_L \|x\|$$

donc en particulier

$$\|T_p(x) - T_q(x)\| \leqslant \|T_p - T_q\|_L \|x\|$$

d'où il s'ensuit que la suite $(T_n(x))$ est de Cauchy.
2.c) On définit $T(x) = lim \ T_n(x)$, qui existe bien puisque $l^2(\mathbf{Z})$ est complet. L'application T ainsi définie est linéaire puisque la linéarité est conservée par limite ponctuelle. Si $\epsilon > 0$ et $\|T_p - T_q\|_L \leqslant \epsilon$ si $p, q \geqslant N$, on a $\|T(x) - T_q(x)\| \leqslant \epsilon \|x\|$ pour tout x et tout $q \geqslant N$, d'où il s'ensuit que $T \in L(l^2(\mathbf{Z}))$ (plus précisément, $\|T\|_L \leqslant \|T_N\|_L + \epsilon$) et que $\|T - T_q\|_L \leqslant \epsilon$ pour tout $q \geqslant N$, ce qui montre le résultat.
3.a) Pour tout x, on a

$$\|TS(x)\| \leqslant \|T\|_L \|S(x)\| \leqslant \|T\|_L \|S\|_L \|x\|.$$

3.b) Pour tous $p < q$, on a

$$\| \sum_{j=p}^{j=q} \frac{1}{j!} T^j \|_L \leqslant \sum_{j=p}^{j=q} \frac{1}{j!} \|T^j\|_L \leqslant \sum_{j=p}^{j=q} \frac{1}{j!} \|T\|_L^j$$

et par conséquent la suite $S_K(T)$ est de Cauchy dans $L(l^2(\mathbf{Z}))$ puisque la série de réels positifs qui définit $e^{\|T\|_L}$ est convergente, et donc elle converge dans cet espace par complétude.
3.c) Puisque A et B commutent, on peut appliquer la formule du binôme. Nous avons donc

$$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} (A+B)^k = \sum_{0 \leqslant j+l \leqslant n} \frac{1}{j!l!} A^j B^l$$

et par conséquent nous avons donc

$$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} (A+B)^k - (\sum_{j=0}^{j=n} \frac{1}{j!} A^j)(\sum_{l=0}^{l=n} \frac{1}{l!} B^l) = - \sum_{n < j+l \leqslant 2n} \frac{1}{j!l!} A^j B^l. \qquad (*)$$

Notons que le calcul qui établit l'équation $(*)$ peut être effectué dans $\mathbf{R}$ où il établit donc une équation identique. D'aprés $(*)$, le a) et l'inégalité triangulaire, on a

$$\| \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} (A+B)^k - (\sum_{j=0}^{j=n} \frac{1}{j!} A^j)(\sum_{l=0}^{l=n} \frac{1}{l!} B^l) \|_L \leqslant \sum_{n < j+l \leqslant 2n} \frac{1}{j!l!} \|A\|_L^j \|B\|_L^l$$

et l'inégalité $(*)$ dans $\mathbf{R}$ montre que le membre de droite de l'inégalité ci-dessus est identique au membre de droite de l'inégalité à établir, qui est ainsi montrée.

La formule $e^{\|A\|_L} e^{\|B\|_L} = e^{\|A\|_L + \|B\|_L}$ et un passage à la limite dans l'inégalité montrent alors le résultat, puisque l'opération de produit est continue dans $L(l^2(\mathbf{Z}))$, d'aprés l'inégalité

$$\|UV - TS\|_L \leqslant \|U - T\|_L \|S\|_L + \|U\|_L \|V - S\|_L.$$

PARTIE III.

1. Si $T(v)_k = t_k v_k$ et $S(v)_k = s_k v_k$, on a clairement $(T+S)(v)_k = (t_k+s_k)v_k$ et $(TS)(v)_k = (t_k s_k)v_k$. La formule de multiplication par un scalaire est également claire.

2. Si $T(v)_k = t_k v_k$, soit $M = sup\{|t_k|;\ k \in \mathbf{Z}\}$. En prenant $\lambda = M$, on voit que (i) implique (ii). Notons $\delta_n(k) = 1$ si $n = k$ et 0 sinon. Il est clair que $\delta_n \in P$. En appliquant (ii) à δ_n, on voit que si $k \neq n$, on a $-T(\delta_n)_k \geqslant 0$ et $T(\delta_n)_k \geqslant 0$, et donc il existe $t_n \in \mathbf{R}$ tel que $T(\delta_n) = t_n \delta_n$. En appliquant (ii) à δ_n en $k = n$, on voit que $|t_n| \leqslant \lambda$ pour tout n et (i) s'ensuit.

3. Soient $T \in \mathbf{A}_Q$ et $S \in \mathbf{A}_Q$, et soient λ et μ tels que $T \pm \lambda I(Q) \subset Q$ et $S \pm \mu I(Q) \subset Q$. On calcule :

$$(S + \mu I)(T + \lambda I) = ST + \mu T + \lambda S + \mu\lambda I$$

$$(S - \mu I)(T - \lambda I) = ST - \mu T - \lambda S + \mu\lambda I$$

Les operateurs considérés dans les deux lignes ci-dessus envoient Q dans lui-même, ainsi que leur demi-somme puisque Q est convexe. Or cette demi-somme vaut $ST + \lambda\mu I$. De même, on calcule

$$(S + \mu I)(T - \lambda I) = ST + \mu T - \lambda S - \lambda\mu I$$

$$(S - \mu I)(T + \lambda I) = ST - \mu T + \lambda S - \lambda\mu I$$

et la demi-somme de ces opérateurs vaut $ST - \lambda\mu I$. On voit ainsi que $ST \in \mathbf{A}_Q$, la constante correspondante étant $\lambda\mu$. Il est plus simple de vérifier que $\mathbf{A}_Q$ est un espace vectoriel, en utilisant l'obsevation que si x et y sont dans Q alors leur somme $(x + y)$ est également dans Q.

4. a) Le cône Q est stable par somme et par multiplication par un réel positif. Avec les notations de la question II. 3, il s'ensuit que si $S(Q) \subset Q$, alors $S_K(S)(Q) \subset Q$. Mais comme Q est fermé, on trouve en passant à la limite que $Exp(S)(Q) \subset Q$.

4. b) Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $(T + \lambda I)(Q) \subset Q$. D'après la question II.3, on a $Exp(T + \lambda I) = e^{\lambda} Exp(T)$. D'après le a), on a $Exp(T + \lambda I)(Q) \subset Q$. Mais $e^{-\lambda} Q = Q$, et donc $Exp(T)(Q) \subset Q$.

PARTIE IV.

1. Cela a en fait été montré à la question III.4.

2. a) Il suffit d'utiliser la question I.4. d), en remarquant que puisque $v \notin C_0$, on a $w = v - p \neq 0$.

2. b) D'après la continuité du produit scalaire, en peut écrire pour tout $s \in \mathbf{R}$ que

$$\phi_T(s) =< w, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} T^n(p) >= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} < w, T^n(p) > .$$

2. c) On a $< w, p > \geqslant < w, x >$ pour tout $x \in C_0$, d'où la conclusion puisque $\phi_T(0) =< w, p >$ et $Exp(sT)(p) = x \in C_0$ pour tout $s \in \mathbf{R}$.

2. d) D'après le c), on a $\phi_T'(0) = 0$ et le développement en série établi en b) montre que $\phi_T'(0) =< w, T(p) >$.

3. L'application $T \to T(p)$ est linéaire et donc l'image de l'espace vectoriel $\mathbf{A}$ est un espace vectoriel. Il s'ensuit que M_0 est un espace vectoriel fermé, puisque par continuité des combinaisons linéaires

l'adhérence d'un espace vectoriel est un espace vectoriel. On a aisément $S(M_0) \subset M_0$ pour tout $S \in \mathbf{A}$ puisque $\mathbf{A}$ est une sous-algèbre. Enfin, M_0 n'est pas réduit à $\{0\}$ pusque $T(p) \neq 0$, et est différent de l'espace entier puisque d'après la question 2. d) il est contenu dans l'hyperplan orthogonal à w.

4. On a évidemment $T(D) = \{0\} \subset D$ pour tout $T \in \mathbf{A}$.

5. Il suffit de récapituler les conclusions obtenues aux questions 3) et 4).

PARTIE V.

1. La condition de bornitude (B) implique facilement que S envoie l'espace $l^2(\mathbf{Z})$ dans lui-même, et définit une application linéaire continue, dont la norme est $sup\{\lambda_n;\ n \in \mathbf{Z}\}$. Son inverse S^{-1} est donné par

$$(S^{-1}(x))_k = \frac{1}{\lambda_k} x_{k+1}$$

et les mêmes considérations s'appliquent à S^{-1} (remarque : l'inverse d'un opérateur linéaire continu inversible sur un espace de Banach est automatiquement continu par le théorème du graphe fermé, mais la vérification directe est ici très facile).

2. On note toujours $\delta_n(k) = 1$ si $n = k$ et 0 sinon. Dans cette notation, on a $S_1(\delta_k) = \delta_{k+1}$ et $WS_1(\delta_k) = w_{k+1}\delta_{k+1}$, cependant que $W(\delta_k) = w_k\delta_k$ et $SW(\delta_k) = \lambda_k w_k \delta_{k+1}$. Comme $w_{k+1} = \lambda_k w_k$, le résultat s'ensuit.

3. a) C'est une vérification directe par récurrence.

3. b) Le caractère orthonormé de la suite $(\epsilon(j))_{j\in\mathbf{Z}}$ se vérifie par un calcul simple et direct. Pour tous les réels a et b et tout $k \in \mathbf{Z}$, on a d'autre part

$$(a + ib)\delta_k + (a - ib)\delta_{-k} = a(\delta_k + \delta_{-k}) + b(i\delta_k - i\delta_{-k})$$

d'où

$$(a + ib)\delta_k + (a - ib)\delta_{-k} = \sqrt{2}.a\epsilon(k) + \sqrt{2}.b\epsilon(-k)$$

On vérifie immédiatement que E est un espace vectoriel réel. Si $x = (x_k) \in E$, on a

$$\|x\|^2 = |x_0|^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = |x_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |\sqrt{2}Re(x_k)|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |\sqrt{2}Im(x_k)|^2.$$

Cette formule et l'équation précedente montrent clairement que E est isométrique à $l^2(\mathbf{Z})$. Notons que cela s'ensuit également du résultat classique qui assure que tous les espaces euclidiens séparables complets de dimension infinie sont isométriques.

4. Si $\widehat{y}(t) \in \mathbf{R}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\sum y_k e^{ikt} = \sum \overline{y_k} e^{-ikt} = \sum y_{-k} e^{-ikt}$$

où les sommes ci-dessus sont finies, et on déduit de l'unicité des coefficients d'un polynôme trigonométrique (montrée par exemple en remarquant que ce sont les coefficients de Fourier) que $\overline{y_k} = y_{-k}$ pour tout k. Inversement, si cette condition est vérifiée, on a pour tout k et $t \in \mathbf{R}$

$$y_k e^{ikt} + y_{-k} e^{-ikt} = 2Re(y_k e^{ikt}).$$

5. a) Un calcul direct montre que si $x = (x_k) \in E$, on a

$$C(x)_0 = \frac{1}{2}[\lambda_{-1}x_{-1} + \frac{x_1}{\lambda_0}] = \frac{\lambda_{-1}}{2}(x_{-1} + x_1) \in \mathbf{R}$$

et si $k > 0$, on a

$$C(x)_k = \frac{1}{2}[\lambda_{k-1}x_{k-1} + \frac{x_{k+1}}{\lambda_k}]$$

et

$$C(x)_{-k} = \frac{1}{2}[\lambda_{-k-1}x_{-k-1} + \frac{x_{-k+1}}{\lambda_{-k}}] = \frac{1}{2}[\lambda_{k-1}\overline{x_{k-1}} + \frac{\overline{x_{k+1}}}{\lambda_k}]$$

et donc $C(x) \in E$. Un calcul analogue montre que $D(E) \subset E$.

Indiquons une autre approche plus synthétique : si on pose

$$C_1 = \frac{1}{2}[S_1 + S_1^{-1}]$$

on a dans les notations ci-dessus

$$\widehat{S_1(y)}(t) = cos(t)\widehat{y}(t)$$

et d'après la question 4 on a $C_1(E \cap F) \subset E \cap F$. Pour passer au cas général, on remarque que $W(E \cap F) = E \cap F$ et que $CW = WC_1$ par la question 2. Il s'ensuit que $C(E \cap F) \subset E \cap F$, d'où par densité la même inclusion pour E. Le cas de D est analogue, avec cette fois la fonction sin.

5. b) D'après la question 4, on a $y_{-k} = \overline{y_k}$ pour tout k, d'où $w_{-k}y_{-k} = \overline{w_k y_k}$ et donc $P \subset E$. De plus

$$z_0 = w_0 y_0 = y_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \widehat{y}(t)dt \geqslant 0.$$

On a de plus

$$(I - C)W(y) = W(I - C_1)(y)$$

et si $\widehat{y}(t) \geqslant 0$, on a

$$(I - \widehat{C_1)}(y)(t) = (1 - cos(t))\widehat{y}(t) \geqslant 0$$

et donc

$$(I - C)W(y) = W(z)$$

où $\widehat{z}(t) \geqslant 0$ pour tout t, et donc $(I - C)(P) \subset P$. Les autres inclusions sont analogues.

5. c) Soit $Q = \overline{P}$. Comme $z_0 \geqslant 0$ pour tout $z \in P$, Q est distinct de E, et comme Q contient δ_0, il n'est pas réduit à $\{0\}$. Il est clair que Q est un cône convexe fermé. D'après le b), on a $C \in \mathbf{A_Q}$ et $D \in \mathbf{A_Q}$. Comme l'algèbre $\mathbf{A_Q}$ satsifait la condition (H) de la partie IV, il existe d'après la question IV.5 un sous-espace fermé M de E, distinct de E et de $\{0\}$, tel que $T(M) \subset M$ pour tout $T \in \mathbf{A_Q}$, donc en particulier pour C et D.

6. a) On a par bilinéarité

$$< u + iv, u + iv >= \|u\|^2 + 2Re < u, iv > +\|v\|^2$$

et il est facile de vérifier que si u et v appartiennent à E, alors $< u, v >\in \mathbf{R}$. Le résultat s'ensuit.

Remarque : nous sommes ici dans le cas où l'identité de Pythagore est satisfaite bien que u et iv ne soient pas orthogonaux. Mais bien sûr la réciproque du théorème de Pythagore n'est pas vraie dans le cas complexe.

6. b) Il est clair que J est un espace vectoriel complexe. D'après le a), si $x_n = u_n + iv_n$ est une suite convergente d'éléments de J, alors les suites u_n et v_n sont également convergentes, leur limite est dans M puisque M est fermé et il s'ensuit que J est fermé.

Il est clair que $M \subset J \cap E$. D'autre part, si $u + iv = u' \in J \cap E$, on a $(u - u') \in E \cap iE$. Mais si $x = iy \in E \cap iE$, on a d'après le a) que

$$0 = \|x - iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

d'où $x = y = 0$. On a donc $u = u'$ et $v = 0$, et par conséquent $J \cap E \subset M$. On a montré que $J \cap E = M$, donc en particulier que J est distinct de $\{0\}$ et de $l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})$.

Enfin, $C(M) \subset M$ donc $C(iM) \subset iM$ et $C(J) \subset J$; de même pour D. Comme $S = C + iD$ et $S^{-1} = C - iD$, on a finalement que $S(J) \subset J$ et $S^{-1}(J) \subset J$, et J est un sous-espace bi-invariant non trivial du shift à poids S.

PARTIE VI.

1. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$[\sum |w_k^{-1} x_k|]^2 \leqslant (\sum w_k^{-2})(\sum x_k^2)$$

d'où le résultat.

2. Il est clair que M_{t_0} est l'hyperplan orthogonal au vecteur non nul $(\overline{w_k^{-1} e^{-ikt_0}})_k$ dans l'espace $l^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z})$.

3. Sachant que $w_{k-1}^{-1} = w_k^{-1} \lambda_{k-1}$, on voit par un glissement d'indices que

$$\Omega[S(x)](t) = e^{it}\Omega(x)(t)$$

et

$$\Omega[S^{-1}(x)](t) = e^{-it}\Omega(x)(t).$$

La conclusion est alors immédiate.

4. Le calcul effectué en 3) montre que pour tout polynôme P, on a

$$\Omega[P(S)(x)](t) = P(e^{it})\Omega(x)(t).$$

Si X est un sous-espace de dimension finie tel que $S(X) \subset X$, il existe un polynôme non nul P tel que $P(S)(x) = 0$ pour tout $x \in X$: on peut par exemple prendre pour P le polynôme caractéristique de la restriction de S à X, d'après le théorème de Cayley-Hamilton. Mais alors on a

$$P(e^{it})\Omega(x)(t) = 0$$

pour tout $x \in X$ et tout $t \in \mathbf{R}$. Il s'ensuit que $\Omega(x)(t) = 0$ pour tout t, et donc $x = 0$, et on a montré que $X = \{0\}$.