Corrigé du devoir N^o 2

(Agrégation 2007 - 2ème épreuve de mathématiques)

I. La fonction racine cubique

A. Dérivées au sens généralisé.

1. L'application g^{-1} est continue et strictement croissante comme réciproque d'une application continue strictement croissante. Soit $a \in J$. Posons $b = g^{-1}(a)$. Notons $h : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}_+^*$ l'application définie par $h(y) = \dfrac{g(y) - g(b)}{y - b}$ (puisque g est strictement croissante, on a $h(y) \in \mathbb{R}_+^*$ pour tout $y \in I$ distinct de b). Notons $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ l'application $t \mapsto \dfrac{1}{t}\cdot$ Pour $x \in J$ distinct de a, on a $\dfrac{g^{-1}(x) - g^{-1}(a)}{x - a} = \dfrac{1}{h(g^{-1}(x))} = \varphi(h \circ g^{-1}(x))$.
   - g^{-1} est continue en a ;
   - $h(y)$ admet la limite $g'(b)$ quand $y \to b$;
   - φ est continue et que l'on a $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0} \varphi(t) = +\infty$

   on trouve, à l'aide du théorème de composition des limites, $\lim\limits_{x\to a} h\circ g^{-1}(x) = g'(b)$, puis $\dfrac{g^{-1}(x) - g^{-1}(a)}{x - a} = \varphi \circ h \circ g^{-1}(x)$ tend vers $\dfrac{1}{g'(b)}$ si $g'(b) \in \mathbb{R}_+^*$, vers 0 si $g'(b) = +\infty$ et vers $+\infty$ si $g'(b) = 0$.

2. (a) Soit $c \in I$. On suppose que g dérivable au sens généralisé en c et admet un maximum local en c. Pour tout $x \in I$, on a $g(x) - g(c) \geqslant 0$. Donc, pour $x < c$, on a $\dfrac{g(x) - g(c)}{x - c} \geqslant 0$ et pour $x > c$, on a $\dfrac{g(x) - g(c)}{x - c} \leqslant 0$. On a :
   - $g'(c) = \lim\limits_{x\to c,\ x<c} \dfrac{g(x) - g(c)}{x - c}$, donc $g'(c) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$;
   - $g'(c) = \lim\limits_{x\to c,\ x>c} \dfrac{g(x) - g(c)}{x - c}$, donc $g'(c) \in \mathbb{R}_- \cup \{-\infty\}$.

   Il vient $g'(c) = 0$.

   (b) Posons $u = \dfrac{g(b) - g(a)}{b - a}$ et, pour $x \in I$, $h(x) = g(x) - ux$. Alors h est dérivable au sens généralisé, on a $h'(x) = g'(x) - u$ (avec la convention $\pm\infty - u = \pm\infty$) et l'on a $h(a) = h(b)$. Nous devons démontrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $h'(c) = 0$.
   La fonction continue h est bornée sur le segment $[a, b]$ et atteint ses bornes. Posons $m = \inf\{h(x);\ x \in [a, b]\}$ et $M = \sup\{h(x);\ x \in [a, b]\}$. Si $m = M$, alors h est constante sur $[a, b]$, et on trouve $h'(c) = 0$ pour tout $c \in [a, b]$. Sinon, m et M ne peuvent être tous deux égaux à $h(a)$; quitte à changer g en $-g$, on peut supposer que $M \neq h(a)$. Comme le «sup» est atteint, il existe $c \in [a, b]$ tel que $h(c) = M$; comme $h(b) = h(a) < M$, il vient $c \in \,]a, b[$. Alors h atteint son maximum en c, donc $h'(c) = 0$ d'après (a).

3. (a) D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in J_x$ tel que $g'(c) = \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}\cdot$ Donc $\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} \in \{g'(y);\ y \in J_x\}$ et en particulier $\inf\{g'(y),\ y \in J_x\} \leqslant \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} \leqslant \sup\{g'(y),\ y \in J_x\}$. Ces extremums sont pris dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

   (b) Par hypothèse, lorsque x tend vers a, $\inf\{g'(y),\ y \in J_x\}$ et $\sup\{g'(y),\ y \in J_x\}$ tendent vers ℓ (dans $\overline{\mathbb{R}}$). D'après (a) et en utilisant le théorème des «encadrements», on trouve $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} = \ell$. Autrement dit g est dérivable au sens généralisé en a et $g'(a) = \ell$.
   Remarquons que, si $\ell = +\infty$ (*resp.* $\ell = -\infty$), alors pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, on a $\sup\{g'(y),\ y \in J_x\} = +\infty$ (*resp.* $\inf\{g'(y),\ y \in J_x\} = -\infty$).

B. La fonction racine cubique

1. (a) Posons $g(x) = x^3$. La fonction g est strictement croissante et dérivable de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. D'après 1.(a), sa fonction réciproque f est dérivable au sens généralisé. En particulier, comme $g'(0) = 0$, on a $f'(0) = +\infty$.

   (b) Pour $s \in \mathbb{R}^*$, on a $f'(s) = \dfrac{1}{3f(s)^2}$; donc $f'(s) \leqslant f'(t) \iff \dfrac{1}{3f(s)^2} \leqslant \dfrac{1}{3f(t)^2} \iff |f(s)| \geqslant |f(t)|$. Or $|f(s)| = f(|s|)$ et $|f(t)| = f(|t|)$. Comme f est strictement croissante, on a $f'(s) \leqslant f'(t) \iff f(|s|)| \geqslant f(|t|) \iff |s| \geqslant |t|$.

   (c) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $g : x \mapsto f(x+a) - f(x-a)$ est dérivable en tout point x distinct de $\pm a$, et l'on a $g'(x) = f'(x+a) - f'(x-a)$, de sorte que g' admet la limite $+\infty$ en $-a$ et $-\infty$ en a. Pour $x < 0$, on a $|x+a| < |x-a|$ donc $f'(x+a) > f'(x-a)$; donc g est (strictement) croissante sur les intervalles $]-\infty, -a[$ et $]-a, 0]$ et, puisqu'elle est continue, elle est croissante sur $\mathbb{R}_-$; pour $x > 0$, on a $|x+a| > |x-a|$ donc $f'(x+a) < f'(x-a)$; donc g est (strictement) décroissante sur $\mathbb{R}_+$. La fonction g atteint donc son maximum en 0.

   (d) Comme f est impaire, on peut, quitte à échanger les rôles de x et y, supposer que $y \leqslant x$. Si $x = y$ il n'y a rien à démontrer ; sinon, posons $a = \dfrac{x-y}{2}$ et $z = \dfrac{x+y}{2}$ de sorte que $x = z + a$ et $y = z - a$; puisque f est croissante, on a alors $|f(z+a) - f(z-a)| = f(z+a) - f(z-a)$ et d'après (c) $f(z+a) - f(z-a) \leqslant f(a) - f(-a)$. On trouve donc $|f(x) - f(y)| \leqslant 2f(a)$.

   (e) Soit $\varepsilon > 0$; comme f est continue en 0, il existe α tel que pour tout $z \in \mathbb{R}$ tel que $|z| < \alpha$ on ait $|f(z)| < \varepsilon$. D'après (d), on trouve que si $|x - y| < 2\alpha$, $|f(x) - f(y)| < 2\varepsilon$. Donc f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

2. (a) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$, on a $\dfrac{1}{4}x^2 + xy + y^2 = \left(y + \dfrac{x}{2}\right)^2 \geqslant 0$, donc $x^2 + xy + y^2 \geqslant \dfrac{3}{4}x^2$.

   (b) Soient $x_0, x \in \mathbb{R}$ tels que $x_0 \neq 0$ et $x \neq x_0$. Posons $y = f(x)$ et $y_0 = f(x_0)$. On a

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{y^3 - y_0^3} = \frac{1}{y_0^2 + y_0 y + y^2}.$$

   D'après (a), on a on a $y_0^2 + y_0 y + y^2 \geqslant \dfrac{3}{4}y_0^2 > 0$, donc $0 < \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant \dfrac{4}{3y_0^2}\cdot$ Or $f'(x_0) = \dfrac{1}{3y_0^2}$, donc $0 < \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 4f'(x_0)$.

C. Construction d'une suite dense.

1. (a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(t) = \cos t - t \sin t$. Puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, la fonction $g \circ f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour $t \neq 0$, on a $(g \circ f)'(t) = f'(t) g'(f(t))$. Or $\lim_{t \to 0} f'(t) = +\infty$ et, comme g' est continue, $\lim_{t \to 0} g'(f(t)) = g'(f(0)) = 1$, donc $\lim_{t \to 0} (g \circ f)'(t) = +\infty$. D'après A.3.(b), cela implique que $g \circ f$ est dérivable au sens généralisé en 0 et $(g \circ f)'(0) = +\infty$.

   (b) Remarquons que pour $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{3f(x)^2}$, de sorte que $(g \circ f)'(x) = h(f(x))$, où l'on a posé $h(t) = \dfrac{g'(t)}{3t^2} = \dfrac{\cos t}{3t^2} - \dfrac{\sin t}{t}\cdot$ Comme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{t \to +\infty} h(t) = 0$, il vient $\lim_{x \to +\infty} (g \circ f)'(x) = 0$.

2. (a) Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $g(k\pi) = (-1)^k k\pi$ et $g((k+1)\pi) = (-1)^{k+1}(k+1)\pi$. Si $x \in \mathbb{R}$ satisfait $k\pi \geqslant |x|$, alors x est dans l'intervalle d'extrémités $g(k\pi)$ et $g((k+1)\pi)$. Puisque g est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un nombre $y(k,x) \in [k\pi, (k+1)\pi]$ tel que $g(y(k,x)) = x$. Comme $g((k+1)\pi) \neq x$, on a $y(k,x) \in [k\pi, (k+1)\pi[$

   (b) Notons n_k la partie entière de $y(k,x)^3$. On a $a_{n_k} - x = (g \circ f)(n_k)) - (g \circ f)(y(k,x)^3)$ de sorte qu'il existe $z_k \in [n_k, y(k,x)^3]$ tel que $a_{n_k} - x = (n_k - y(k,x)^3)(g \circ f)'(z_k)$. Lorsque $k \to \infty$, puisque $y(k,x) \geqslant k\pi$ et $z_k \geqslant y(k,x)^3 - 1$, il vient $z_k \to \infty$, donc $(g \circ f)'(z_k) \to 0$. Or $|n_k - y(k,x)^3| < 1$, donc $\lim_{k \to \infty} a_{n_k} - x = 0$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question 2., il existe une suite strictement croissante (n_k) de nombres entiers telle que $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = x$. En particulier x est adhérent à $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Cela étant vrai pour tout x, l'adhérence de $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est $\mathbb{R}$, autrement dit $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
4. Rappelons que pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$ la série de terme général $n^{-\alpha}$ converge.
Puisque $0 < \lambda_n < n^{-2}$ la série de terme général (λ_n) converge.
On a $|a_n| \leqslant n^{1/3}$, donc $|f(a_n)| \leqslant n^{1/9}$; il vient $|\lambda_n f(a_n)| \leqslant n^{-\alpha}$ avec $\alpha = 2 - 1/9$. On en déduit que la série de terme général $(\lambda_n f(a_n))$ est absolument convergente donc convergente.

II. Construction de la fonction F

1. ***Construction.***
   (a) Remarquons d'abord que la série de terme général $\lambda_n f(-a_n) = -\lambda_n f(a_n)$ converge par hypothèse. Soit $M \in \mathbb{R}_+$. Pour $|x| \leqslant M$, on a $|f(x - a_n) - f(-a_n)| \leqslant 2|f(x/2)|$ d'après la question B.1.(d). Donc $|\lambda_n(f(x - a_n) - f(-a_n))| \leqslant 2^{2/3}M^{1/3}\lambda_n$. Il s'ensuit que la série de fonctions de terme général $\lambda_n(f(x - a_n) - f(-a_n))$ converge normalement sur l'intervalle $[-M, M]$. Il en résulte que, pour tout M la série de fonctions de terme général $x \mapsto \lambda_n f(x - a_n)$ converge uniformément sur $[-M, M]$. Si K est un compact de $\mathbb{R}$, il est borné donc contenu dans un intervalle de la forme $[-M, M]$. Il en résulte que la série de fonctions de terme général $x \mapsto \lambda_n f(x - a_n)$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}$.
   (b) Puisque F est somme de fonctions strictement croissantes (vu que les λ_n sont strictement positifs), elle est strictement croissante. Sa restriction à chaque compact de $\mathbb{R}$ est continue comme somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues. Donc F est continue.
   (c) Posons $G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n f(x - a_n)$. Remarquons que G est strictement croissante. Pour $x > a_0$, on a $G(x) > G(a_0)$, donc $F(x) - F(a_0) = \lambda_0 f(x - a_0) + G(x) - G(a_0) > \lambda_0 f(x - a_0)$; pour $x < a_0$, on trouve de même $F(x) - F(a_0) = \lambda_0 f(x - a_0) + G(x) - G(a_0) < \lambda_0 f(x - a_0)$.
   (d) On a $\lim_{x\to+\infty} f(x - a_0) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x - a_0) = -\infty$. Comme pour $x > a_0$ on a $F(x) > F(a_0) + \lambda_0 f(x - a_0)$, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. De même $\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$
   (e) L'application F est strictement croissante donc injective ; comme elle est continue, son image est un intervalle ; par (d) elle n'est ni majorée ni minorée donc son image est $\mathbb{R}$. En d'autres termes elle est surjective, donc bijective.

Dérivabilité.

2. Pour $x, x_0 \in \mathbb{R}$ tels que $x \neq x_0$, on a $F(x) - F(x_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k(f(x - a_k) - f(x_0 - a_k))$, donc

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0}.$$

Or, comme f est croissante, cette série est à termes positifs, donc sa somme majore ses sommes partielles. Autrement dit, pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} \leqslant \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}.$$

3. Comme $f'(0) = +\infty$, on a $\lim_{x\to a_n} \frac{f(x - a_n)}{x - a_n} = +\infty$. Or

$$\lambda_n \frac{f(x - a_n)}{x - a_n} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} \leqslant \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}.$$

Donc $\lim_{x\to a_n} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = +\infty$. Donc F est dérivable au sens généralisé en a_n et $F'(a_n) = +\infty$.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $g : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x-a_k)$ est dérivable en x_0 et sa dérivée vaut $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x_0 - a_k)$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $0 < |x - x_0| < \varepsilon$, alors $\left|\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - g'(x_0)\right| \leqslant 1$ et en particulier $1 + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x_0 - a_k)$.

(b) Soit $M \in \mathbb{R}_+$. Comme la série de terme général (positif) $(\lambda_n f'(x_0 - a_n))$ est divergente, il existe n tel que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x - a_k) \geqslant M + 1$. Par (a), il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $0 < |x - x_0| < \varepsilon$, on a $1 + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x - a_k)$; dans ce cas, on a

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} \geqslant -1 + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x_0 - a_k) \geqslant M.$$

Cela montre que $\lim_{x\to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = +\infty$, autrement dit que F est dérivable au sens généralisé en x_0 et $F'(x_0) = +\infty$.

5. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq x_0$, on a d'après I.B.2.(b)

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} \leqslant 4 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0 - a_k),$$

soit

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} + 4 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0 - a_k).$$

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Comme la série de terme général $\lambda_n f'(x_0 - a_n)$ est convergente, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0 - a_k) < \varepsilon/4$. Posons $\beta = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0 - a_k)$ et notons g l'application $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x - a_k)$. L'application g est dérivable en x_0 et $g'(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x_0 - a_k)$. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que pour $x \in \mathbb{R}$ satisfaisant $0 < |x - x_0| < \alpha$ on ait $\left|\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - g'(x_0)\right| \leqslant \varepsilon/4$. Alors d'après les questions 2. et 5.(a) on a

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \leqslant \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leqslant \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + 4\beta.$$

Posons $\ell = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0 - a_k) = g'(x_0) + \beta$. On a

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \geqslant g'(x_0) - \varepsilon/4 \geqslant \ell - \varepsilon/2,$$

et

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + 4\beta \leqslant g'(x_0) + \varepsilon/4 + 4\beta = \ell + \varepsilon/4 + 3\beta \leqslant \ell + \varepsilon.$$

Il vient $\ell - \varepsilon/2 \leqslant \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leqslant \ell + \varepsilon$.

6. La fonction F est dérivable au sens généralisé en tout point de $\mathbb{R}$. D'après la question I.A.1. la fonction réciproque F^{-1} de F est dérivable au sens généralisé en tout point de $\mathbb{R}$. Comme f' prend des valeurs dans $\mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$, il vient du calcul de F' ci-dessus que F' ne s'annule pas. Donc $(F^{-1})'$ est partout fini. En d'autres termes F^{-1} est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.

III. Parties denses de $\mathbb{R}$

A. Intersections d'ouverts denses.

1. (a) Démontrons l'existence de u_n et v_n par récurrence sur n. Comme V_0 est ouvert et dense et I est ouvert et non vide, $V_0 \cap I$ est ouvert et non vide, donc contient un segment $[u_0, v_0]$ non réduit à un point.

   Supposons u_n et v_n construits. Comme V_{n+1} est ouvert et dense et $]u_n, v_n[$ est ouvert et non vide, $V_{n+1} \cap]u_n, v_n[$ est ouvert et non vide, donc contient un segment $[u_{n+1}, v_{n+1}]$ non réduit à un point.

   (b) La suite u_n est croissante et la suite v_n est décroissante. Comme $u_n < v_n < v_0$ la suite u_n est majorée donc convergente. Soit u sa limite. De même la suite v_n est décroissante et minorée donc convergente. Soit v sa limite. Comme pour tout n on a $u_n < v_n$, il vient $u \leqslant v$. Comme u_n est croissante et v_n décroissante, on a $u_n \leqslant u \leqslant v \leqslant v_n$. Donc pour tout n, on a $u \in [u_n, v_n]$. En particulier $u \in [u_0, v_0]$ donc $u \in I$ et $u \in [u_n, v_n] \subset V_n$. Donc $u \in I \cap B \neq \emptyset$.

2. Comme l'ensemble B rencontre tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$, il est dense dans $\mathbb{R}$.

3. L'ensemble $V'_n = V_n \cap (\mathbb{R} \setminus \{x_n\})$ est ouvert et dense donc $B' = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V'_n$ est dense dans $\mathbb{R}$. Or $B' = B \setminus \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

B. Parties contenant des «gros compacts»

1. (a) Comme $b_k \in I_k$, les ouverts I_k recouvrent C. Comme C est compact, un nombre fini de I_k recouvrent C, donc il existe un nombre $n \in \mathbb{N}$ tel que $C \subset \bigcup_{k=0}^{n} I_k$.

   (b) Pour $k \in \mathbb{N}$, notons $h_k : x \mapsto \max(0, \alpha_k - |x - b_k|)$ et posons $h = \sum_{k=0}^{n} h_k$. La fonction h est continue et positive et l'ensemble des points en lesquels elle n'est pas nulle est $\bigcup_{k=0}^{n} I_k$. En particulier, elle ne s'annule pas sur C. Posons $m = \inf\{h(x);\ x \in C\}$. Comme C est compact, cet «inf» de la fonction h est atteint, donc $m > 0$. Posons alors $g(x) = \min(1, \dfrac{h(x)}{m})$. La fonction g est continue et

   - pour tout $x \in C$, on a $h(x) \geqslant m$, donc $g(x) = 1$;
   - pour tout $x \notin \bigcup_{k=0}^{n} I_k$, on a $h(x) = 0$, donc $g(x) = 0$.

   Notons χ_k la fonction qui vaut 1 sur I_k et 0 ailleurs et $\varphi = \sum_{k=0}^{n} \chi_k$. La fonction φ est en escalier ; pour $x \notin \bigcup_{k=0}^{n} I_k$ on a $g(x) = \varphi(x) = 0$; pour $x \in I_k$; on a $g(x) \leqslant 1 = \chi_k(x) \leqslant \varphi(x)$. Donc $g \leqslant \varphi$. Or $\int_a^b \chi_k(t)dt \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_k(t)dt = 2\alpha_k$. On trouve

$$\int_a^b g(t)\,dt \leqslant \int_a^b \varphi(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b \chi_k(t)dt \leqslant \sum_{k=0}^{n} 2\alpha_k < \varepsilon.$$

2. (a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Par hypothèse, il existe un compact $C \subset A \cap [a, b]$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour toute fonction continue $g : [a, b] \to [0, 1]$ satisfaisant $g(x) = 1$ pour tout $x \in C$ on ait $\int_a^b g(t)\,dt \geqslant \varepsilon$. D'après 1., C n'est pas dénombrable, donc $A \cap [a, b]$ non plus.

   (b) Soit D une partie dénombrable de A. Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}$; il contient un segment $[a, b]$ avec $a < b$. Comme $[a, b] \cap A$ n'est pas dénombrable, l'intersection $[a, b] \cap A$ n'est pas contenue dans D, donc $(A \setminus D) \cap U \neq \emptyset$. Cela démontre que l'ensemble $A \setminus D$ est encore dense dans $\mathbb{R}$.

IV. Les points de pente infinie

A. Densité des points de pente infinie.

1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant \lambda_n g_T(x-a_n) \leqslant \lambda_n T$. Comme la série de terme général $\lambda_n T$ est convergente, la série de fonctions de terme général $x \mapsto \lambda_n g_T(x-a_n)$ est normalement convergente. En particulier la série de terme général $\lambda_n g_T(x-a_n)$ converge. Comme de plus la fonction g_T est continue la fonction $G_T : x \mapsto \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n g_T(x-a_n)$ est somme d'une série normalement convergente de fonctions continues : elle est continue.

   (b) On a vu que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F'(x) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n f'(x-a_n)$, au sens que si un des termes de la série vaut $+\infty$ ou si cette série à termes positifs diverge, on écrit $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n f'(x-a_n) = +\infty$.

   Pour $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $T \in \mathbb{R}_+^*$, on a $g_T(x-a_n) \leqslant f'(x-a_n)$. Donc $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n g_T(x-a_n) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n f'(x-a_n)$, soit $G_T(x) \leqslant F'(x)$. Comme cela a lieu pour tout T, on trouve $\sup\{G_T(x);\ T \in \mathbb{R}_+\} \leqslant F'(x)$.

   Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $M < F'(x)$. Alors M ne majore pas les sommes partielles $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x-a_k)$, donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x-a_k) > M$. Si x est égal à un des a_k avec $0 \leqslant k \leqslant n$, alors, pour $T = \dfrac{M+1}{\lambda_k}$, on a $\lambda_k g_T(x-a_k) = M+1$, donc $G_T(x) > M$; sinon, pour $T = \max\{f'(x-a_k);\ 0 \leqslant k \leqslant n\}$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} g_T(x-a_k) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x-a_k) > M$. Dans tous les cas, on a trouvé $T \in \mathbb{R}_+$ tel que $G_T(x) > M$, donc $\sup\{G_T(x);\ T \in \mathbb{R}_+\} > M$. Cela étant vrai pour tout $M < F'(x)$, on a $\sup\{G_T(x);\ T \in \mathbb{R}_+\} \geqslant F'(x)$.

2. (a) S'il existe $T \in \mathbb{R}_+$ tel que $G_T(x) > M$, alors $F'(x) \geqslant G_T(x) > M$, donc $x \in U_M$. Si $x \in U_M$, alors $F'(x) > M$, et comme $F'(x) = \sup\{G_T(x);\ T \in \mathbb{R}_+\}$, M ne majore pas $\{G_T(x);\ T \in \mathbb{R}_+\}$, donc il existe $T \in \mathbb{R}_+$ tel que $G_T(x) > M$.

   (b) Pour tout $T \in \mathbb{R}_+$, la fonction G_T est continue, donc l'ensemble $\{x \in \mathbb{R};\ G_T(x) > M\}$ est ouvert ; la réunion $U_M = \displaystyle\bigcup_{T\in\mathbb{R}_+} \{x \in \mathbb{R};\ G_T(x) > M\}$ est donc ouverte. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $F'(a_n) = +\infty$. Donc $D \subset U_M$ et U_M est dense.

3. Pour tout $M \in \mathbb{N}$, l'ensemble U_M est ouvert et dense. L'intersection $B = \displaystyle\bigcap_{M\in\mathbb{N}} U_M$ est dense dans $\mathbb{R}$, et comme D est dénombrable $B \setminus D$ est encore dense dans $\mathbb{R}$ (d'après III.A). Or $B = \{x \in \mathbb{R};\ \forall M \in \mathbb{N},\ F'(x) > M\} = \{x \in \mathbb{R};\ F'(x) = +\infty\}$.

B. Densité de l'ensemble des points de pente finie.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $C = \{x \in [a,b];\ x \notin U_M\}$. Soit $g : [a,b] \to [0,1]$ une fonction continue telle que $g(t) = 1$ pour tout $x \in C$. Pour tout $x \in [a,b]$, on a $g(x) = 1$ ou $F'(x) > M$, donc $Mg(x) + F'(x) \geqslant M$. Posons alors $\Phi(x) = M \displaystyle\int_a^x g(t)dt + F(x)$. La fonction Φ est continue sur $[a,b]$ dérivable au sens généralisé en tout point de $]a,b[$ et $\Phi'(x) = Mg(x) + F'(x)$; il vient $\Phi(b) - \Phi(a) \geqslant M(b-a)$ (d'après I.A.2.(b)) soit $\displaystyle\int_a^b Mg(t)\,dt + F(b) - F(a) \geqslant M(b-a)$.

2. Posons $A = \{a \in \mathbb{R};\ F'(a) \neq +\infty\}$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\varepsilon > 0$ et $a + \varepsilon < b$. Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $M(b-a-\varepsilon) \geqslant F(b) - F(a)$. Posons $C = \{x \in [a,b];\ x \notin U_M\} \subset A \cap [a,b]$. D'après la question précédente, pour toute fonction continue $g : [a,b] \to [0,1]$ satisfaisant $g(x) = 1$ pour tout $x \in C$ on a $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt \geqslant b - a - \frac{F(b)-F(a)}{M} \geqslant \varepsilon$. D'après III.B, pour toute partie dénombrable $N \subset \mathbb{R}$, l'ensemble $A \setminus N$ est dense dans $\mathbb{R}$.