

Corrigé du devoir N° 2

(Agrégation 2007 - 2ème épreuve de mathématiques)

I. La fonction racine cubique

A. Dérivées au sens généralisé.

1. L'application g^{-1} est continue et strictement croissante comme réciproque d'une application continue strictement croissante. Soit $a \in J$. Posons $b = g^{-1}(a)$. Notons $h : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ l'application définie par $h(y) = \frac{g(y) - g(b)}{y - b}$ (puisque g est strictement croissante, on a $h(y) \in \mathbb{R}_+^*$ pour tout $y \in I$ distinct

de b). Notons $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ l'application $t \mapsto \frac{1}{t}$. Pour $x \in J$ distinct de a , on a $\frac{g^{-1}(x) - g^{-1}(a)}{x - a} = \frac{1}{h(g^{-1}(x))} = \varphi(h \circ g^{-1}(x))$.

- g^{-1} est continue en a ;
- $h(y)$ admet la limite $g'(b)$ quand $y \rightarrow b$;
- φ est continue et que l'on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = +\infty$

on trouve, à l'aide du théorème de composition des limites, $\lim_{x \rightarrow a} h \circ g^{-1}(x) = g'(b)$, puis $\frac{g^{-1}(x) - g^{-1}(a)}{x - a} = \varphi \circ h \circ g^{-1}(x)$ tend vers $\frac{1}{g'(b)}$ si $g'(b) \in \mathbb{R}_+^*$, vers 0 si $g'(b) = +\infty$ et vers $+\infty$ si $g'(b) = 0$.

2. (a) Soit $c \in I$. On suppose que g dérivable au sens généralisé en c et admet un maximum local en c .

Pour tout $x \in I$, on a $g(x) - g(c) \geq 0$. Donc, pour $x < c$, on a $\frac{g(x) - g(c)}{x - c} \geq 0$ et pour $x > c$, on a $\frac{g(x) - g(c)}{x - c} \leq 0$. On a :

- $g'(c) = \lim_{x \rightarrow c, x < c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c}$, donc $g'(c) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$;
- $g'(c) = \lim_{x \rightarrow c, x > c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c}$, donc $g'(c) \in \mathbb{R}_- \cup \{-\infty\}$.

Il vient $g'(c) = 0$.

(b) Posons $u = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$ et, pour $x \in I$, $h(x) = g(x) - ux$. Alors h est dérivable au sens généralisé, on a $h'(x) = g'(x) - u$ (avec la convention $\pm\infty - u = \pm\infty$) et l'on a $h(a) = h(b)$. Nous devons démontrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $h'(c) = 0$.

La fonction continue h est bornée sur le segment $[a, b]$ et atteint ses bornes. Posons $m = \inf\{h(x); x \in [a, b]\}$ et $M = \sup\{h(x); x \in [a, b]\}$. Si $m = M$, alors h est constante sur $[a, b]$, et on trouve $h'(c) = 0$ pour tout $c \in [a, b]$. Sinon, m et M ne peuvent être tous deux égaux à $h(a)$; quitte à changer g en $-g$, on peut supposer que $M \neq h(a)$. Comme le «sup» est atteint, il existe $c \in [a, b]$ tel que $h(c) = M$; comme $h(b) = h(a) < M$, il vient $c \in]a, b[$. Alors h atteint son maximum en c , donc $h'(c) = 0$ d'après (a).

3. (a) D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in J_x$ tel que $g'(c) = \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$. Donc

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \in \{g'(y); y \in J_x\} \text{ et en particulier}$$

$$\inf\{g'(y), y \in J_x\} \leq \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \leq \sup\{g'(y), y \in J_x\}.$$

(b) Par hypothèse, lorsque x tend vers a , $\inf\{g'(y), y \in J_x\}$ et $\sup\{g'(y), y \in J_x\}$ tendent vers ℓ (dans $\overline{\mathbb{R}}$). D'après (a) et en utilisant le théorème des «encadrements», on trouve $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \ell$. Autrement dit g est dérivable au sens généralisé en a et $g'(a) = \ell$.

B. La fonction racine cubique

1. (a) Posons $g(x) = x^3$. La fonction g est strictement croissante et dérivable de \mathbb{R} sur \mathbb{R} . D'après 1.(a), sa fonction réciproque est f dérivable au sens généralisé. En particulier, comme $g'(0) = 0$, on a $f'(0) = +\infty$.
- (b) Pour $s \in \mathbb{R}^*$, on a $f'(s) = \frac{1}{3f(s)^2} = \frac{|s|^{-2/3}}{3}$. La fonction $x \rightarrow x^{-2/3}$ étant strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* , on a $f'(s) \leq f'(t) \iff |s| \geq |t|$.
- (c) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $g : x \mapsto f(x+a) - f(x-a)$ est dérivable en tout point x distinct de $\pm a$, et l'on a $g'(x) = f'(x+a) - f'(x-a)$, de sorte que g' admet la limite $+\infty$ en $-a$ et $-\infty$ en a . Pour $x < 0$, on a $|x+a| < |x-a|$ donc $f'(x+a) > f'(x-a)$; donc g est (strictement) croissante sur \mathbb{R}_- ; pour $x > 0$, on a $|x+a| > |x-a|$ donc $f'(x+a) < f'(x-a)$; donc g est (strictement) décroissante sur \mathbb{R}_+ . La fonction g atteint donc son maximum en 0.
- (d) Comme f est impaire, on peut, quitte à échanger les rôles de x et y , supposer que $y \leq x$. Si $x = y$ il n'y a rien à démontrer; sinon, posons $a = \frac{x-y}{2}$ et $z = \frac{x+y}{2}$ de sorte que $x = z+a$ et $y = z-a$; puisque f est croissante, on a alors $|f(z+a) - f(z-a)| = f(z+a) - f(z-a)$ et d'après (c) $f(z+a) - f(z-a) \leq f(a) - f(-a)$. On trouve donc $|f(x) - f(y)| \leq 2f(a)$.
- (e) Soit $\varepsilon > 0$; comme f est continue en 0, il existe α tel que pour tout $z \in \mathbb{R}$ tel que $|z| < \alpha$ on ait $|f(z)| < \varepsilon$. D'après (d), on trouve que si $|x-y| < 2\alpha$, $|f(x) - f(y)| < 2\varepsilon$. Donc f est uniformément continue sur \mathbb{R} .
2. (a) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$, on a $\frac{1}{4}x^2 + xy + y^2 = \left(y + \frac{x}{2}\right)^2 \geq 0$, donc $x^2 + xy + y^2 \geq \frac{3}{4}x^2$.
- (b) Soient $x_0, x \in \mathbb{R}$ tels que $x_0 \neq 0$ et $x \neq x_0$. Posons $y = f(x)$ et $y_0 = f(x_0)$. On a

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{y^3 - y_0^3} = \frac{1}{y_0^2 + y_0y + y^2}.$$

D'après (a), on a $y_0^2 + y_0y + y^2 \geq \frac{3}{4}y_0^2 > 0$, donc $0 < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{4}{3y_0^2}$. Or $f'(x_0) = \frac{1}{3y_0^2}$, donc $0 < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 4f'(x_0)$.

C. Construction d'une suite dense.

1. (a) La fonction g est dérivable sur \mathbb{R} et $g'(t) = \cos t - t \sin t$. Puisque f est dérivable sur \mathbb{R}^* , la fonction $g \circ f$ est dérivable sur \mathbb{R}^* et pour $t \neq 0$, on a $(g \circ f)'(t) = f'(t)g'(f(t))$. Or $\lim_{t \rightarrow 0} f'(t) = +\infty$ et, comme g' est continue, $\lim_{t \rightarrow 0} g'(f(t)) = g'(f(0)) = 1$, donc $\lim_{t \rightarrow 0} (g \circ f)'(t) = +\infty$. D'après A.3.(b), cela implique que $g \circ f$ est dérivable au sens généralisé en 0 et $(g \circ f)'(0) = +\infty$.
- (b) Remarquons que pour $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{1}{3f(x)^2}$, de sorte que $(g \circ f)'(x) = h(f(x))$, où l'on a posé $h(t) = \frac{g'(t)}{3t^2} = \frac{\cos t}{3t^2} + \frac{\sin t}{t}$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 0$, il vient $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g \circ f)'(x) = 0$.
2. (a) Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $g(k\pi) = (-1)^k k\pi$ et $g((k+1)\pi) = (-1)^{k+1} (k+1)\pi$. Si $x \in \mathbb{R}$ satisfait $k\pi \geq |x|$, alors x est dans l'intervalle d'extrémités $g(k\pi)$ et $g((k+1)\pi)$. Puisque g est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un nombre $y(k, x) \in [k\pi, (k+1)\pi]$ tel que $g(y(k, x)) = x$. Comme $g((k+1)\pi) \neq x$, on a $y(k, x) \in [k\pi, (k+1)\pi[$.
- (b) Notons n_k la partie entière de $y(k, x)^3$. On a $a_{n_k} - x = (g \circ f)(n_k) - (g \circ f)(y(k, x)^3)$ de sorte qu'il existe $z_k \in [n_k, y(k, x)^3]$ tel que $a_{n_k} - x = (n_k - y(k, x)^3)(g \circ f)'(z_k)$. Lorsque $k \rightarrow \infty$, puisque $y(k, x) \geq k\pi$ et $z_k \geq y(k, x)^3 - 1$, il vient $z_k \rightarrow \infty$, donc $(g \circ f)'(z_k) \rightarrow 0$. Or $|n_k - y(k, x)^3| < 1$, donc $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} - x = 0$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question 2., il existe une suite strictement croissante (n_k) de nombres entiers telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = x$. En particulier x est adhérent à $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$. Cela étant vrai pour tout x , l'adhérence de $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ est \mathbb{R} , autrement dit $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans \mathbb{R} .

4. Rappelons que pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$ la série de terme général $n^{-\alpha}$ converge. Puisque $0 < \lambda_n < n^{-2}$ la série de terme général (λ_n) converge. On a $|a_n| \leq n^{1/3}$, donc $|f(a_n)| \leq n^{1/9}$; il vient $\lambda_n a_n \leq n^{-\alpha}$ avec $\alpha = 2 - 1/9$. On en déduit que la série de terme général $(\lambda_n f(a_n))$ est absolument convergente donc convergente.

II. Construction de la fonction F

1. Construction.

- (a) Remarquons d'abord que la série de terme général $\lambda_n f(-a_n) = -\lambda_n f(a_n)$ converge par hypothèse. Soit $M \in \mathbb{R}_+$. Pour $|x| \leq M$, on a $|f(x - a_n) - f(-a_n)| \leq 2|f(x/2)|$ d'après la question B.1.(d). Donc $|\lambda_n(f(x - a_n) - f(-a_n))| \leq 2^{2/3} M^{1/3} \lambda_n$. Il s'ensuit que la série de fonctions de terme général $\lambda_n(f(x - a_n) - f(-a_n))$ converge normalement sur l'intervalle $[-M, M]$. Il en résulte que, pour tout M la série de fonctions de terme général $x \mapsto \lambda_n f(x - a_n)$ converge uniformément sur $[-M, M]$. Si K est un compact de \mathbb{R} , il est borné donc contenu dans un intervalle de la forme $[-M, M]$. Il en résulte que la série de fonctions de terme général $x \mapsto \lambda_n f(x - a_n)$ converge uniformément sur les compacts de \mathbb{R} .
- (b) Puisque F est somme de fonctions strictement croissantes (vu que les λ_n sont strictement positifs), elle est strictement croissante. Sa restriction à chaque compact de \mathbb{R} est continue comme somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues. Donc F est continue.
- (c) Posons $G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n f(x - a_n)$. Remarquons que G est strictement croissante. Pour $x > a_0$, on a $G(x) > G(a_0)$, donc $F(x) - F(a_0) = \lambda_0 f(x - a_0) + G(x) - G(a_0) > \lambda_0 f(x - a_0)$; pour $x < a_0$, on trouve de même $F(x) - F(a_0) = \lambda_0 f(x - a_0) + G(x) - G(a_0) < \lambda_0 f(x - a_0)$.
- (d) On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x - a_0) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x - a_0) = -\infty$. Comme pour $x > a_0$ on a $F(x) > F(a_0) + \lambda_0 f(x - a_0)$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$. De même $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\infty$.
- (e) L'application F est strictement croissante donc injective; comme elle est continue, son image est un intervalle; par (d) elle n'est ni majorée ni minorée donc son image est \mathbb{R} . En d'autres termes elle est surjective, donc bijective.

Dérivabilité.

2. Pour $x, x_0 \in \mathbb{R}$ tels que $x \neq x_0$, on a $F(x) - F(x_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k (f(x - a_k) - f(x_0 - a_k))$, donc

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0}.$$

Or, comme f est croissante, cette série est à termes positifs, donc sa somme majore ses sommes partielles. Autrement dit, pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}.$$

3. Comme $f'(0) = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow a_n} \frac{f(x - a_n)}{x - a_n} = +\infty$. Or

$$\lambda_n \frac{f(x - a_n)}{x - a_n} \leq \sum_{k=0}^n \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow a_n} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = +\infty$. Donc F est dérivable au sens généralisé en a_n et $F'(a_n) = +\infty$.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $g : x \mapsto \sum_{k=0}^n \lambda_k f(x - a_k)$ est dérivable en x_0 et sa dérivée vaut $\sum_{k=0}^n \lambda_k f'(x_0 - a_k)$.

Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $0 < |x - x_0| < \varepsilon$, alors $\left| \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - g'(x_0) \right| \leq 1$ et

en particulier $1 + \sum_{k=0}^n \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} \geq \sum_{k=0}^n \lambda_k f'(x_0 - a_k)$.

(b) Soit $M \in \mathbb{R}_+$. Comme la série de terme général (positif) $(\lambda_n f'(x_0 - a_n))$ est divergente, il existe n tel que $\sum_{k=0}^n \lambda_k f'(x_0 - a_k) \geq M + 1$. Par (a), il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $0 < |x - x_0| < \varepsilon$,

on a $1 + \sum_{k=0}^n \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} \geq \sum_{k=0}^n \lambda_k f'(x_0 - a_k)$; dans ce cas, on a

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \geq \sum_{k=0}^n \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} \geq -1 + \sum_{k=0}^n \lambda_k f'(x_0 - a_k) \geq M.$$

Cela montre que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = +\infty$, autrement dit que F est dérivable au sens généralisé en x_0 et $F'(x_0) = +\infty$.

5. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq x_0$, on a d'après I.B.2.(b)

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} \leq 4 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0 - a_k),$$

soit

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq \sum_{k=0}^n \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} + 4 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0 - a_k).$$

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Comme la série de terme général $\lambda_n f'(x_0 - a_n)$ est convergente, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0 - a_k) < \varepsilon/4$. Posons $\beta = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0 - a_k)$ et notons g l'application $x \mapsto$

$\sum_{k=0}^n \lambda_k f(x - a_k)$. L'application g est dérivable en x_0 et $g'(x_0) = \sum_{k=0}^n \lambda_k f'(x_0 - a_k)$. Il existe donc $\alpha > 0$

tel que pour $x \in \mathbb{R}$ satisfaisant $0 < |x - x_0| < \alpha$ on ait $\left| \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - g'(x_0) \right| \leq \varepsilon/4$. Alors d'après les questions 2. et 5.(a) on a

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + 4\beta.$$

Posons $\ell = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0 - a_k) = g'(x_0) + \beta$. On a

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \geq g'(x_0) - \varepsilon/4 \geq \ell - \varepsilon/2,$$

et

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + 4\beta \leq g'(x_0) + \varepsilon/4 + 4\beta = \ell + \varepsilon/4 + 3\beta \leq \ell + \varepsilon.$$

Il vient $\ell - \varepsilon/2 \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq \ell + \varepsilon$.

6. La fonction F est dérivable au sens généralisé en tout point de \mathbb{R} . D'après la question I.A.1. la fonction réciproque F^{-1} de F est dérivable au sens généralisé en tout point de \mathbb{R} . Comme f' prend des valeurs dans $\mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$, il vient du calcul de F' ci-dessus que F' ne s'annule pas. Donc $(F^{-1})'$ est partout fini. En d'autres termes F^{-1} est dérivable en tout point de \mathbb{R} .

III. Parties denses de \mathbb{R}

A. Intersections d'ouverts denses.

1. (a) Démontrons l'existence de u_n et v_n par récurrence sur n . Comme V_0 est ouvert et dense et I est ouvert et non vide, $V_0 \cap I$ est ouvert et non vide, donc contient un segment $[u_0, v_0]$ non réduit à un point.
Supposons u_n et v_n construits. Comme V_{n+1} est ouvert et dense et $]u_n, v_n[$ est ouvert et non vide, $V_{n+1} \cap]u_n, v_n[$ est ouvert et non vide, donc contient un segment $[u_{n+1}, v_{n+1}]$ non réduit à un point.
- (b) La suite u_n est croissante et la suite v_n est décroissante. Comme $u_n < v_n < v_0$ la suite u_n est majorée donc convergente. Soit u sa limite. De même la suite v_n est décroissante et minorée donc convergente. Soit v sa limite. Comme pour tout n on a $u_n < v_n$, il vient $u \leq v$. Comme u_n est croissante et v_n décroissante, on a $u_n \leq u \leq v \leq v_n$. Donc pour tout n , on a $u \in [u_n, v_n]$. En particulier $u \in [u_0, v_0]$ donc $u \in I$ et $u \in [u_n, v_n] \subset V_n$. Donc $u \in I \cap B \neq \emptyset$.
2. Comme l'ensemble B rencontre tout ouvert non vide de \mathbb{R} , il est dense dans \mathbb{R} .
3. L'ensemble $V'_n = V_n \cap (\mathbb{R} \setminus \{x_n\})$ est ouvert et dense donc $B' = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V'_n$ est dense dans \mathbb{R} . Or $B' = B \setminus \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$.

B. Parties contenant des « gros compacts »

1. (a) Comme $b_k \in I_k$, les ouverts I_k recouvrent C . Comme C est compact, un nombre fini de I_k recouvrent C , donc il existe un nombre $n \in \mathbb{N}$ tel que $C \subset \bigcup_{k=0}^n I_k$.
- (b) Pour $k \in \mathbb{N}$, notons $h_k : x \mapsto \max(0, \alpha_k - |x - b_k|)$ et posons $h = \sum_{k=0}^n h_k$. La fonction h est continue et positive et l'ensemble des points en lesquels elle n'est pas nulle est $\bigcup_{k=0}^n I_k$. En particulier, elle ne s'annule pas sur C . Posons $m = \inf\{h(x); x \in C\}$. Comme C est compact, cet « inf » de la fonction h est atteint, donc $m > 0$. Posons alors $g(x) = \min(1, \frac{h(x)}{m})$. La fonction g est continue et
 - pour tout $x \in C$, on a $h(x) \geq m$, donc $g(x) = 1$;
 - pour tout $x \notin \bigcup_{k=0}^n I_k$, on a $h(x) = 0$, donc $g(x) = 0$.

Notons χ_k la fonction qui vaut 1 sur I_k et 0 ailleurs et $\varphi = \sum_{k=0}^n \chi_k$. La fonction φ est en escalier ;

pour $x \notin \bigcup_{k=0}^n I_k$ on a $g(x) = \varphi(x) = 0$; pour $x \in I_k$; on a $g(x) \leq 1 = \chi_k(x) \leq \varphi(x)$. Donc $g \leq \varphi$. Or

$$\int_a^b \chi_k(t) dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_k(t) dt = 2\alpha_k. \text{ On trouve}$$

$$\int_a^b g(t) dt \leq \int_a^b \varphi(t) dt = \sum_{k=0}^n \int_a^b \chi_k(t) dt \leq \sum_{k=0}^n 2\alpha_k < \varepsilon.$$

2. (a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Par hypothèse, il existe un compact $C \subset A \cap [a, b]$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour toute fonction continue $g : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ satisfaisant $g(x) = 1$ pour tout $x \in C$ on ait $\int_a^b g(t) dt \geq \varepsilon$. D'après 1., C n'est pas dénombrable, donc $A \cap [a, b]$ non plus.
- (b) Soit D une partie dénombrable de A . Soit U un ouvert non vide de \mathbb{R} ; il contient un segment $[a, b]$ avec $a < b$. Comme $[a, b] \cap A$ n'est pas dénombrable, l'intersection $[a, b] \cap A$ n'est pas contenue dans D , donc $(A \setminus D) \cap U \neq \emptyset$. Cela démontre que l'ensemble $A \setminus D$ est encore dense dans \mathbb{R} .

IV. Les points de pente infinie

A. Densité des points de pente infinie.

1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq \lambda_n g_T(x - a_n) \leq \lambda_n T$. Comme la série de terme général $\lambda_n T$ est convergente, la série de fonctions de terme général $x \mapsto \lambda_n g_T(x - a_n)$ est normalement convergente. En particulier la série de terme général $\lambda_n g_T(x - a_n)$ converge. Comme de plus la fonction g_T est continue la fonction $G_T : x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n g_T(x - a_n)$ est somme d'une série normalement convergente de fonctions continues : elle est continue.

(b) On a vu que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F'(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n f'(x - a_n)$, au sens que si un des termes de la série vaut $+\infty$ ou si cette série à termes positifs diverge, on écrit $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n f'(x - a_n) = +\infty$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $T \in \mathbb{R}_+^*$, on a $g_T(x - a_n) \leq f'(x - a_n)$. Donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n g_T(x - a_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n f'(x - a_n)$, soit $G_T(x) \leq F'(x)$. Comme cela a lieu pour tout T , on trouve $\sup\{G_T(x); T \in \mathbb{R}_+\} \leq F'(x)$.

Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $M < F'(x)$. Alors M ne majore pas les sommes partielles $\sum_{k=0}^n \lambda_k f'(x - a_k)$, donc

il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=0}^n \lambda_k f'(x - a_k) > M$. Si x est égal à un des a_k avec $0 \leq k \leq n$, alors, pour $T = \frac{M+1}{\lambda_k}$, on a $\lambda_k g_T(x - a_k) = M+1$, donc $G_T(x) > M$; sinon, pour $T = \max\{f'(x - a_k); 0 \leq k \leq n\}$, on a $\sum_{k=0}^n g_T(x - a_k) = \sum_{k=0}^n \lambda_k f'(x - a_k) > M$. Dans tous les cas, on a trouvé $T \in \mathbb{R}_+$ tel que $G_T(x) > M$, donc $\sup\{G_T(x); T \in \mathbb{R}_+\} > M$. Cela étant vrai pour tout $M < F'(x)$, on a $\sup\{G_T(x); T \in \mathbb{R}_+\} \geq F'(x)$.

2. (a) S'il existe $T \in \mathbb{R}_+$ tel que $G_T(x) > M$, alors $F'(x) \geq G_T(x) > M$, donc $x \in U_M$. Si $x \in U_M$, alors $F'(x) > M$, et comme $F'(x) = \sup\{G_T(x); T \in \mathbb{R}_+\}$, M ne majore pas $\{G_T(x); T \in \mathbb{R}_+\}$, donc il existe $T \in \mathbb{R}_+$ tel que $G_T(x) > M$.

(b) Pour tout $T \in \mathbb{R}_+$, la fonction G_T est continue, donc l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}; G_T(x) > M\}$ est ouvert; la réunion $U_M = \bigcup_{T \in \mathbb{R}_+} \{x \in \mathbb{R}; G_T(x) > M\}$ est donc ouverte. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $F'(a_n) = +\infty$.
Donc $D \subset U_M$ et U_M est dense.

3. Pour tout $M \in \mathbb{N}$, l'ensemble U_M est ouvert et dense. L'intersection $B = \bigcap_{M \in \mathbb{N}} U_M$ est dense dans \mathbb{R} , et comme D est dénombrable $B \setminus D$ est encore dense dans \mathbb{R} (d'après III.A). Or $B = \{x \in \mathbb{R}; \forall M \in \mathbb{N}, F'(x) > M\} = \{x \in \mathbb{R}; F'(x) = +\infty\}$.

B. Densité de l'ensemble des points de pente finie.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $C = \{x \in [a, b]; x \notin U_M\}$. Soit $g : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue telle que $g(t) = 1$ pour tout $x \in C$. Pour tout $x \in [a, b]$, on a $g(x) = 1$ ou $F'(x) > M$, donc $Mg(x) + F'(x) \geq M$. Posons alors $\Phi(x) = M \int_a^x g(t) dt + F(x)$. La fonction Φ est continue sur $[a, b]$ dérivable au sens généralisé en tout point de $]a, b[$ et $\Phi'(x) = Mg(x) + F'(x)$; il vient $\Phi(b) - \Phi(a) \geq M(b - a)$ (d'après I.A.2.(b)) soit $\int_a^b Mg(t) dt + F(b) - F(a) \geq M(b - a)$.

2. Posons $A = \{a \in \mathbb{R}; F'(a) \neq +\infty\}$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\varepsilon > 0$ et $a + \varepsilon < b$. Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $M(b - a - \varepsilon) \geq F(b) - F(a)$. Posons $C = \{x \in [a, b]; x \notin U_M\} \subset A \cap [a, b]$. D'après la question précédente, pour toute fonction continue $g : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ satisfaisant $g(x) = 1$ pour tout $x \in C$ on a $\int_a^b g(t) dt \geq b - a - \frac{F(b) - F(a)}{M} \geq \varepsilon$. D'après III.B, pour toute partie dénombrable $N \subset \mathbb{R}$, l'ensemble $A \setminus N$ est dense dans \mathbb{R} .