Université Paris Diderot (Paris VII) *Samedi 28 septembre 2013*

Corrigé du devoir N$^{\text{o}}$ 1 (EP1 2009)

Préliminaires

1. Dans ce cas, la somme des nombres $t_i(1-z_i)$ est nulle et comme ces nombres sont tous positifs ou nuls, ils sont tous nuls. Comme $t_i \neq 0$, il vient $z_i = 1$.

2. Écrivons $Z = \sum_{i=1}^{n} t_i z_i$ et posons $u_i = \operatorname{Re} \frac{z_i}{Z}$. Il vient $\sum_{i=1}^{n} t_i u_i = 1$, et d'après 1., tous les u_i sont égaux à 1, comme $|z_i| \leqslant 1$, il vient $\frac{z_i}{Z} = 1$, donc $z_i = Z$.

Partie I

1. On a $P_{x,y}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, donc 1 est valeur propre de $P_{x,y}$.

- Si $(x,y) = (-1,-1)$, $P_{x,y} = \mathbf{1}_2$, donc l'espace propre associé à la valeur propre 1 est $\mathbb{R}^2$.
- Si $(x,y) \neq (-1,-1)$, $P_{x,y} \neq \mathbf{1}_2$, donc l'espace propre associé à la valeur propre 1 n'est pas de dimension 2 : c'est $\mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

On sait que la somme des valeurs propres est la trace de $P_{x,y}$. Donc la deuxième valeur propre est $-\frac{x+y}{2}$.

- Lorsque $x+y=-2$, cette deuxième valeur propre est 1, donc $P_{x,y}$ admet comme unique valeur propre 1 et est diagonalisable si et seulement si $P_{x,y} = \mathbf{1}_2$, (c'est-à-dire si $(x,y) = (-1,-1)$).
- Lorsque $x+y \neq -2$, cette deuxième valeur propre est distincte de 1. Un calcul direct montre que l'on a $P_{x,y}\begin{pmatrix}1+x\\-1-y\end{pmatrix} = -\frac{x+y}{2}\begin{pmatrix}1+x\\-1-y\end{pmatrix}$, donc l'espace propre associé est $\mathbb{R}\begin{pmatrix}1+x\\-1-y\end{pmatrix}$. La matrice $P_{x,y}$ est alors diagonalisable.

2. (a) Posons $u = -\frac{x+y}{2}$. Remarquons que $|u| < 1$. Nous avons vu dans la question 1 que $P_{x,y}$ est alors diagonalisable et que ces valeurs propres sont 1 et u. Autrement dit, il existe une matrice inversible U telle que $P_{x,y} = U^{-1}\begin{pmatrix}1&0\\0&u\end{pmatrix}U$.

(b) On a $P_{x,y}^n = U^{-1}\begin{pmatrix}1&0\\0&u^n\end{pmatrix}U$. Or $u^n \to 0$; le produit des matrices étant continu, la suite $(P_{x,y}^n)$ converge vers $L = U^{-1}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}U$, qui est une matrice semblable à $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$. Elle est de rang 1.

(c) On a $P_{x,y}^n\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, donc, par passage à la limite, $L\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $P_{x,y}^n\begin{pmatrix}1+x\\-1-y\end{pmatrix} = u^n\begin{pmatrix}1+x\\-1-y\end{pmatrix}$, donc, par passage à la limite, $L\begin{pmatrix}1+x\\-1-y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Ces deux égalités caractérisent L puisque $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1+x\\-1-y\end{pmatrix}$ est une base de $\mathbb{R}^2$, et donc $L = \frac{1}{2+x+y}\begin{pmatrix}1+y&1+x\\1+y&1+x\end{pmatrix}$.

4. Le polynôme caractéristique est $X^2-(a+d)X+ad-bc$ et son discriminant est $(a+d)^2-4ad+4bc$.

5. Donc $\Delta_A = (a-d)^2+4bc > 0$.

6. Le polynôme caractéristique a donc deux racines réelles distinctes. On a $\lambda_1+\lambda_2 = a+d > 0$, donc $\lambda_1 > -\lambda_2$. Comme par hypothèse $\lambda_1 > \lambda_2$, il vient $\lambda_1 > |\lambda_2|$.

7. Il existe une matrice inversible U telle que $A = U^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}U$, donc $A^n = U^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1^n&0\\0&\lambda_2^n\end{pmatrix}U$ et $UA^nU^{-1} = \begin{pmatrix}\lambda_1^n&0\\0&\lambda_2^n\end{pmatrix}$. La suite A^n converge si et seulement si $\lambda_1 \leqslant 1$. Cette limite est non nulle si et seulement si $\lambda_1 = 1$; dans ce cas, le rang de la limite est 1.

Le plus simple pour calculer cette limite est de diagonaliser A...

8. Posons $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda_1+\lambda_2 & \lambda_1-\lambda_2 \\ \lambda_1-\lambda_2 & \lambda_1+\lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 P_{x,y}$ avec $x = y = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$. D'après la question 1, ses valeurs propres sont λ_1 et λ_2.

Partie II.A

1. (a) Comme $\mathbf{1}_n$ et B sont permutables, on peut appliquer la formule du binôme. Il vient, puisque $B^j = 0$ pour $j \geqslant \ell$, $C^k = \sum_{j=0}^{\ell-1} \binom{k}{j} \beta^{k-j} B^j$.

(b) Pour tout $j < \ell$, l'application $k \mapsto \binom{k}{j}$ est polynomiale et puisque $|\beta| < 1$, la suite $(\beta^k \binom{k}{j})$ tend vers 0. On en déduit que $C^k \to 0$.

2. (a) i. Pour $k \leqslant \ell$, on a $\ker(A - \alpha\mathbf{1}_n)^k \subset \ker(A - \alpha\mathbf{1}_n)^\ell$. La suite des dimensions de ces espaces est croissante, majorée par n donc convergente. Comme ces dimensions sont des entiers, elle est constante à partir d'un rang k. Pour $\ell \geqslant k$, on a alors $\ker(A - \alpha\mathbf{1}_n)^k \subset \ker(A - \alpha\mathbf{1}_n)^\ell$ et $\dim\ker(A - \alpha\mathbf{1}_n)^k = \dim\ker(A - \alpha\mathbf{1}_n)^\ell$ donc $\ker(A - \alpha\mathbf{1}_n)^k = \ker(A - \alpha\mathbf{1}_n)^\ell$. On en déduit que $F_\alpha = \ker(A - \alpha\mathbf{1}_n)^k$. C'est un espace vectoriel (c'est le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre α).

Si $x \in F_\alpha$, alors $(A - \alpha\mathbf{1}_n)^k Ax = A(A - \alpha\mathbf{1}_n)^k x = 0$, donc $Ax \in F_\alpha$.

ii. Posons $B_\alpha = A_\alpha - \alpha\mathbf{1}_{F_\alpha}$. L'endomorphisme B_α est nilpotent, puisque B_α^k est nul sur $F_\alpha = \ker(A - \alpha\mathbf{1}_n)^k$. D'après la question II.A.1, la suite A_α^k tend vers 0.

(b) D'après le lemme des noyaux, on sait que $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\alpha \in Spec\, A} F_\alpha$. Si $\rho(A) < 1$, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, écrivant $x = \sum x_\alpha$, on $A^k x = \sum A_\alpha^k x_\alpha$, donc $A^k x$ converge vers 0. En prenant pour x les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on en déduit que les vecteurs colonnes de A^k tendent vers 0, c'est à dire que A^k tend vers 0.

(c) Soit α une valeur propre de A et x un vecteur propre associé ; on trouve $A^k x = \alpha^k x$. Si $A^k \to 0$, il vient $\alpha^k x \to 0$, donc $\alpha^k \to 0$ (puisque $x \neq 0$), donc $|\alpha| < 1$.

Partie II.B

1. Le spectre de A/γ est $\{\lambda/\gamma;\ \lambda \in Spec\, A\}$ donc $\rho(A/\gamma) = \rho(A)/\gamma$. On a donc l'équivalence

$$(A/\gamma)^k \to 0 \iff \rho(A/\gamma) < 1 \iff \gamma > \rho(A) \iff \gamma \in]\rho(A), +\infty[.$$

2. On a $A^k y = y + kx$ (par récurrence sur k). Or, pour une norme quelconque $\|\ \|$ sur $\mathbb{C}^n$, on a $\|y + kx\| \geqslant k\|x\| - \|y\|$, donc $\|y + kx\| \to +\infty$. La suite $A^k y$ n'est donc pas bornée.

3. (a) Pour tout $\gamma > 1$, on a $(A/\gamma)^k = \gamma^{-k} A^k \to 0$, donc $\gamma > \rho(A)$. Il vient $\rho(A) \leqslant 1$. Or comme A^k ne tend pas vers 0, $\rho(A) \geqslant 1$; donc $\rho(A) = 1$.

(b) Soit x un vecteur propre associé à α. Puisque $A^k x = \alpha^k x$ converge (et $x \neq 0$), la suite α^k converge, donc $\alpha = 1$.

(c) Démontrons par récurrence sur $k \geqslant 2$ que $\ker(A - \mathbf{1}_n)^k \subset \ker(A - \mathbf{1}_n)$.

– Soit $y \in \ker(A - \mathbf{1}_n)^2$ et $x = Ay - y$. On trouve $Ax = x$ et comme la suite $(A^k y)$ est bornée, il résulte de la question 2 que $x = 0$, donc $y \in \ker(A - \mathbf{1}_n)$.

– Soit $k \geqslant 2$ et supposons que l'on sache que $\ker(A - \mathbf{1}_n)^k \subset \ker(A - \mathbf{1}_n)$. Soit $y \in \ker(A - \mathbf{1}_n)^{k+1}$. Alors $(A - \mathbf{1}_n)^{k-1} y \in \ker(A - \mathbf{1}_n)^2 \subset \ker(A - \mathbf{1}_n)$, donc $(A - \mathbf{1}_n)^k y = 0$. Il vient $y \in \ker(A - \mathbf{1}_n)^k \subset \ker(A - \mathbf{1}_n)$.

Partie III

Pour $x \in \mathbb{C}^n$, posons $\|x\|_\infty = \sup\{|x_i|,\ i \in [n]\}$.

1. On a $(Aw)_i = 1 \iff \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$, donc $Aw = w \iff \forall i \in [n],\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1 \iff A \in \mathcal{S}_n$.

2. Si pour tout $(i,j) \in [n]^2$ on a $a_{i,j} \in \mathbb{R}_+$ et $b_{i,j} \in \mathbb{R}_+$, alors pour tout (i,j) on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \in \mathbb{R}_+$ soit $AB \in \mathcal{P}_n$. Si de plus $Aw = w$ et $Bw = w$, il vient $ABw = w$, donc $AB \in \mathcal{S}_n$.

3. (a) Si $v \in \mathcal{B}$, on a, pour tout $i \in [n]$, $|(Av)_i| = \Big|\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j\Big| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|v_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$, donc $Av \in \mathcal{B}$.

(b) Puisque $Aw = w$, on a $1 \in Spec\, A$, donc $\rho(A) \geqslant 1$. Soit $\alpha \in Spec\, A$, et x un vecteur propre associé. Posons $v = \|x\|_\infty^{-1} x$. On a $v \in \mathcal{B}$ et $\|Av\|_\infty = |\alpha|$; comme $Av \in \mathcal{B}$, il vient $|\alpha| \leqslant 1$. On en déduit que $\rho(A) \leqslant 1$.

4. (a) Soit $i \in [n]$ tel que $|v_i| = \|v\|_\infty$. On a $\alpha v_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} v_j$, donc $\alpha = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \frac{v_j}{v_i}$ et $1 = \Big|\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \frac{v_j}{v_i}\Big|$. Comme par hypothèse $\left|\dfrac{v_j}{v_i}\right| \leqslant 1$, d'après les préliminaires, on trouve que tous les $\dfrac{v_j}{v_i}$ sont égaux, donc égaux à $\dfrac{v_i}{v_i} = 1$, donc v est proportionnel à w, et $\alpha = 1$.

(b) Comme $A^k \mathcal{B} \subset \mathcal{B}$, la suite $A^k v$ est bornée, donc $\mu = 0$ d'après II.B.2.

(c) D'après la question (b), $\ker A - \mathbf{1}_n = \mathbb{C}w$. Soit $v \in \ker(A - \mathbf{1}_n)^2$; quitte à multiplier v par $\|v\|_\infty^{-1}$, on peut supposer que $v \in \mathcal{B}$; alors $Av - v \in \ker A - \mathbf{1}_n$, donc est proportionnel à w. D'après la question (b), il vient $Av - v = 0$, donc $v \in \ker A - \mathbf{1}_n$. Le même raisonnement que II.B.3.c) démontre alors que $F_1 = \ker A - \mathbf{1}_n = \mathbb{C}w$. L'ordre de la racine 1 du polynôme caractéristique de A est la dimension de F_1, donc 1 est racine simple de ce polynôme.

(d) Posons $F = \displaystyle\bigoplus_{\alpha \in Spec\, A;\ \alpha \neq 1} F_\alpha$. D'après le lemme des noyaux, $\mathbb{C}^n = \displaystyle\bigoplus_{\alpha \in Spec\, A} F_\alpha = F_1 \oplus F$. Soit U la matrice de passage de la base canonique vers la base de $\mathbb{C}^n$ formée de w et d'une base $\mathcal{C}$ de F. Comme $Aw = w$ et F est stable par A, on a $UAU^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où B est la matrice de l'application $x \mapsto Ax$ dans la base $\mathcal{C}$.
Comme B est la matrice de $x \mapsto Ax$ (dans la base $\mathcal{C}$ de $F = \displaystyle\bigoplus_{\alpha \in Spec\, A;\ \alpha \neq 1} F_\alpha$), le spectre de B est $Spec\, A \setminus \{1\}$. Par 3.b) et 4.a), il vient $\rho(B) < 1$.

(e) Comme $B^k \to 0$, la suite A^k converge vers $L = U^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0_{n-1} \end{pmatrix} U$. Comme L est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0_{n-1} \end{pmatrix}$, son rang est 1.

(f) L'ensemble $\mathcal{S}_n$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $A^k \in \mathcal{S}_n$ d'après la question 2. Donc $L \in \mathcal{S}_n$. On a $Lw = w$ et comme le rang de L est 1, tous ces vecteurs colonne sont proportionnels à w. Il existe donc $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$L = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix}$$

Comme $Lw = w$, on a $\sum u_i = 1$.

Or $LA = \lim A^{k+1} = L$. Donc pour tout j, on a $u_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i a_{i,j} \geqslant \sum_{i=1}^{n} u_i \min_j a_{i,j} = \min_j a_{i,j} > 0$.

(g) Notons w' le vecteur de coordonnées $(u_1, \dots, u_n)$. On a ${}^t A {}^t L = {}^t L$, et en regardant la première colonne, il vient $w' \in \ker({}^t A - \mathbf{1}_n)$.
L'application de transposition est linéaire donc continue, donc la suite $({}^t A^k)$ converge vers ${}^t L$. Si $x \in \ker({}^t A - \mathbf{1}_n)$, alors ${}^t A^k x = x$ et converge vers ${}^t L x$. Or le rang de ${}^t L$, comme L est 1, donc $x \in \mathbb{C}w'$.

(h) Si ${}^t A \in \mathcal{S}_n$, alors $w \in \ker({}^t A - \mathbf{1}_n)$, donc w et w' sont proportionnels : tous les u_i sont égaux, et comme leur somme vaut 1, $u_i = \dfrac{1}{n}$, donc $L = \dfrac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

5. (a) Posons $B = \dfrac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, la matrice $A_k = \dfrac{k}{k+1}A + \dfrac{1}{k+1}B$ est dans $\mathcal{P}_n^{>0} \cap \mathcal{S}_n$ et $\lim A_k = A$.

(b) Par la question 4., pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un unique vecteur propre associé à la valeur propre 1 de ${}^tA_k$ dont toutes les coordonnées sont strictement positives de somme 1. Notons-le w'_k. Comme toutes les coordonnées de w'_k sont dans $[0,1]$, la suite (w'_k) est bornée dans $\mathbb{R}_+^n$. On peut en extraire une suite $(w'_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente vers un vecteur $w' \in \mathbb{R}_+^n$. Par passage à la limite, la somme des coordonnées de w' est 1, donc $w' \neq 0$. Alors ${}^tA_{\varphi(k)}w'_{\varphi(k)} = w'_{\varphi(k)}$ converge vers w' mais aussi vers ${}^tAw'$, donc ${}^tAw' = w'$.

(c) On peut prendre $A = \mathbf{1}_n$.

(d) Prenons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui admet la valeur propre -1.

Partie IV.A

1. Pour tout i, on a $(Ax)_i = \displaystyle\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j \geqslant \Big(\sum_{j=1}^n x_j\Big)\min_j a_{i,j} > 0$.

2. Dans ce cas $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $A/\alpha \in \mathcal{P}_n^{>0} \cap \mathcal{S}_n$, donc $\rho(A/\alpha) = 1$ (III.3.b). Il vient $\rho(A) = \alpha$.

3. (a) Pour tout i, on a $\displaystyle\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j \leqslant \sum_{j=1}^n b_{i,j}x_j$.

(b) On écrit $A^k = (a_{i,j}^{(k)})$ et $B^k = (b_{i,j}^{(k)})$. On applique une récurrence sur k. C'est vrai par hypothèse pour $k = 1$. Si c'est vrai pour k, alors $a_{i,j}^{(k+1)} = \displaystyle\sum_{\ell=1}^n a_{i,\ell}^{(k)}a_{\ell,j} \leqslant \sum_{\ell=1}^n b_{i,\ell}^{(k)}b_{\ell,j} = b_{i,j}^{(k+1)}$.

(c) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Si $\alpha > \rho(B)$, alors $(B/\alpha)^k \to 0$; or pour tout i,j, et tout $k \geqslant 1$, on a $0 \leqslant \alpha^{-k}a_{i,j}^{(k)} \leqslant \alpha^{-k}b_{i,j}^{(k)}$ donc $(A/\alpha)^k \to 0$; il vient $\alpha > \rho(A)$. Cela prouve que $\rho(A) \leqslant \rho(B)$.

4. Pour tout $i \in [n]$, on a $\alpha \leqslant \displaystyle\sum_{j=1}^n a_{i,k}$, donc, avec le $b_{i,j}$ donné dans l'énoncé, on a $b_{i,j} \leqslant a_{i,j}$, soit $B \leqslant A$. De plus, pour tout $i \in [n]$, on a $\displaystyle\sum_{j=1}^n b_{i,j} = \alpha$. Il vient et $\alpha = \rho(B) \leqslant \rho(A)$.

5. Posant $b'_{i,j} = \dfrac{\beta a_{i,j}}{\sum_{k=1}^n a_{i,k}}$, on trouve $A \leqslant B'$, donc $\rho(A) \leqslant \rho(B') = \beta$.

6. (a) On a $S^{-1} = \operatorname{diag}(x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1})$, et $(S^{-1}AS)_{i,j} = x_i^{-1}a_{i,j}x_j$.

(b) Pour tout $i \in [n]$, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^n (S^{-1}AS)_{i,j} = \frac{(Ax)_i}{x_i}$, donc $\gamma \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^n (S^{-1}AS)_{i,j} \leqslant \delta$. D'après les questions 4 et 5 il vient $\gamma \leqslant \rho(S^{-1}AS) \leqslant \delta$. Comme les matrices A et $S^{-1}AS$ sont semblables, elles ont mêmes valeurs propres donc $\rho(A) = \rho(S^{-1}AS)$.

(c) Soit $i \in [n]$ tel que $\dfrac{(Ax)_i}{x_i} = \min \dfrac{(Ax)_j}{x_j}$. Appliquant 6.b à $\gamma = \dfrac{(Ax)_i}{x_i}$ on trouve $(Ax)_i = \gamma x_i \leqslant \rho(A)x_i$.

7. Si $Ax - \rho(A)x \neq 0$, les coordonnées de $A(Ax - \rho(A)x)$ sont strictement positives par IV.A.1, et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A(Ax - \rho(A)x) \geqslant \varepsilon Ax$. Posant $y = Ax$, on a $Ay \geqslant (\rho(A) + \varepsilon)y$ en contradiction avec 6.c).

8. (a) Pour tout $i \in [n]$, on a $(Ax)_i = \displaystyle\sum_{j=1}^n a_{i,j}|v_j| \geqslant \Big|\sum_{j=1}^n a_{i,j}v_j\Big| = |\lambda v_i| = \rho(A)x_i$ (on a noté λ la valeur propre associée à v). D'après la question 7, il vient $Ax = \rho(A)x$.

(b) Les coordonnées de $\rho(A)x = Ax$ sont strictement positives d'après IV.A.1.

(c) On a $\displaystyle\sum_{j=1}^n (S^{-1}AS)_{i,j} = x_i^{-1}(Ax)_j = \rho(A)$. Donc $\dfrac{1}{\rho(A)}S^{-1}AS \in \mathcal{P}_n^{>0} \cap \mathcal{S}_n$. Il existe donc une matrice inversible V telle que $\dfrac{1}{\rho(A)}S^{-1}AS = V^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}V$, où $\rho(B') < 1$, donc $A = U^{-1}\begin{pmatrix} \rho(A) & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}U$ avec $U = VS^{-1}$ et $B = \rho(A)B'$; on a $\rho(B) = \rho(A)\rho(B') < \rho(A)$.

Partie IV.B

1. On a vu qu'iil existe un vecteur propre x de A pour la valeur propre $\rho(A)$ à coordonnées strictement positives. Le vecteur $y = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{-1} x$ convient. D'après la question IV.A.8.c), l'espace propre associé à la valeur propre $\rho(A)$ est de dimension 1, d'où l'unicité de y. Appliquant ce qui précède à ${}^tA$, et remarquant que $\rho({}^tA) = \rho(A)$ on en déduit l'existence et unicité de z à coordonnées strictement positives de somme 1 tel que ${}^tAz = \rho(A)z$

2. [[Ici, il y a une coquille dans l'énoncé...]] D'après la question IV.A.8.c), A^k converge vers $L = U^{-1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}U$ qui est de rang 1 et de trace 1. Comme $Ly = \lim A^k y = y$ les vecteurs-colonne de L sont proportionnels à y et de même les vecteurs-colonne de ${}^tL$ sont proportionnels à z. Il vient $L = \alpha(y_i z_j)$; comme la trace de L vaut 1, il vient $L = \left(\frac{y_i z_j}{\sum_{k=1}^{n} y_k z_k}\right)$.

3. Posons $B = \rho(A)^{-1}A$. D'après 2, B^n converge vers la matrice $L = (\ell_{i,j})$ de cette question. Pour k assez grand, comme $\ell_{i,j} > 0$, on a $b_{i,j}^{(k)} \geqslant \frac{\ell_{i,j}}{2}$, donc $a_{i,j}^{(k)} \geqslant \frac{\rho(A)^k \ell_{i,j}}{2}$ qui tend vers $+\infty$.

Partie V

1. On a $\mathrm{Tr}(A) = a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3} > 0$. On a $\mathrm{Tr}(A^2) = \sum_{i,j} a_{i,j}a_{j,i} = \sum_{i=1}^{3} a_{i,i}^2 + \sum_{i \neq j} a_{i,j}a_{j,i} > a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{3,3}^2$.

Posant $j = e^{2i\pi/3}$, on a :

$$\begin{aligned} 3(x^2+y^2+z^2) - (x+y+z)^2 &= (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 && (1)\\ &= 2(x+jy+j^2z)(x+j^2y+jz) && (2)\end{aligned}$$

Donc $3\,\mathrm{Tr}(A^2) - \mathrm{Tr}(A)^2 > 3(a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{3,3}^2) - (a_{1,1}+a_{2,2}+a_{3,3})^2 \geqslant 0$ d'après la formule (1).

2. On a (en trigonalisant A) $\mathrm{Tr}(A) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ et $\mathrm{Tr}(A^2) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$.

3. (a) D'après la formule (2) ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} 3\,\mathrm{Tr}(A^2) - \mathrm{Tr}(A)^2 &= 2(1+j\alpha_2+j^2\alpha_3)(1+j^2\alpha_2+j\alpha_3)\\ &= 2(1+2\mathrm{Re}\,(j\alpha_2))(1+2\mathrm{Re}\,(j^2\alpha_2))\\ &= 2(1-2r\cos(t-\pi/3))(1-2r\cos(t+\pi/3)).\end{aligned}$$

(b) Remarquons que $(1+2\mathrm{Re}\,(j\alpha_2))+(1+2\mathrm{Re}\,(j^2\alpha_2)) = 2+2\mathrm{Re}\,((j+j^2)\alpha_2) = 2(1-\mathrm{Re}\,(\alpha_2)) > 0$. Comme leur produit et leur somme sont strictement positifs, on a $1-2r\cos(t-\pi/3) > 0$ et $1-2r\cos(t+\pi/3) > 0$. Enfin comme $\mathrm{Tr}(A) > 0$ et $3\,\mathrm{Tr}(A^2) - \mathrm{Tr}(A)^2 > 0$, il vient $r\cos t > -\frac{1}{2}$, $r\cos(t-\pi/3) < \frac{1}{2}$ et $r\cos(t+\pi/3) < \frac{1}{2}$. Cela veut dire que α_2 est à l'intérieur du triangle de sommets $1, j, j^2$.

4. La matrice proposée est circulante, *i.e.* de la forme $A = a\mathbf{1}_3 + bP + cP^2$, où $P = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Les valeurs propres de P étant $1, j, j^2$, celles de A sont $a+b+c, a+jb+j^2c$ et $a+j^2b+jc$. Ici, $a+b+c = 1$, $a+jb+j^2c = re^{it}$ et $a+j^2b+jc = re^{-it}$.

5. L'énsemble $\mathcal{S}$ est l'ensemble des triplets $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{C}^2$ tels que

$$|\alpha_2| < \alpha_1;\ |\alpha_3| < \alpha_1;\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \in \mathbb{R}_+^*;\ 3(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2) - (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2 \in \mathbb{R}_+^*.$$

En effet, on a vu que ces propriétés sont satisfaites pour les valeurs propres de A si $A \in \mathcal{P}^3$. Inversement, si $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ satisfont ces propriétés, on trouve $\alpha_2+\alpha_3 \in \mathbb{R}$ et $\alpha^2+\alpha^3 \in \mathbb{R}$, donc $2\alpha_2\alpha_3 = (\alpha_2+\alpha_3)^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \in \mathbb{R}$; donc
– ou bien α_2 et α_3 sont réels donc il existe $B \in \mathcal{P}_3^{>0} \cap \mathcal{S}_3$ de valeurs propres $(1, \alpha_2/\alpha_1, \alpha_3/\alpha_1)$ (admis) ;
– ou bien α_2 et α_3 sont conjugués et il existe $B \in \mathcal{P}_3^{>0} \cap \mathcal{S}_3$ de valeurs propres $(1, \alpha_2/\alpha_1, \alpha_3/\alpha_1)$ (V.4).
Dans les deux cas, $A = \alpha_1 B$ convient.