

$$16 + 11 + 21 + 36 + 36 = 120$$

- 3 -

Partie I : Préliminaires

16

I-1. Existence de $\mathcal{N}_f$ et de $\mathcal{L}_f$

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

a) Soit $y \in BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Montrer que $f \circ y$ est continue et bornée.

On donne ainsi un sens à $\mathcal{N}_f$ comme application de $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ dans lui-même.

b) Montrer de même que $\mathcal{L}_f$ est bien définie comme application de $BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ vers $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

I-2. Un opérateur intégral

Soit $b \in \mathbf{R}_+^*$ et $g \in BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

a) Montrer que la formule

$$T_g(x) = e^{-bx} \int_{-\infty}^x e^{bs} g(s) ds$$

permet de définir une fonction T_g de $BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, solution sur $\mathbf{R}$ d'une équation différentielle linéaire que l'on écrira.

b) Donner un majorant de $\|T_g\|_{BC^1}$ en fonction de b et de $\|g\|_\infty$.

I-3. Caractérisation des homéomorphismes de $\mathbf{R}$

L'objet de cette question est d'établir l'équivalence entre les assertions :

(i) $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est continue et bijective.

(ii) $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est un homéomorphisme de $\mathbf{R}$ sur lui-même.

a) On suppose que $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est continue et injective. Soit $\Pi_+ = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / x < y\}$ et Δ la fonction définie sur Π_+ par $\Delta(x, y) = f(x) - f(y)$. En étudiant le signe de Δ sur Π_+ , démontrer que f est strictement monotone sur $\mathbf{R}$.

b) Justifier que si $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est continue et bijective, alors f^{-1} est continue.

c) Conclure.

I-4. Solutions d'une équation différentielle non linéaire

Soit y une solution sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) \quad y' + f \circ y = h,$$

où f désigne une fonction continue sur $\mathbf{R}$ et h une fonction de $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

Démontrer que si y appartient à $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ alors elle est aussi dans $BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

Partie II : Le cas linéaire

11

Soient une fonction $h \in BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et un nombre $a \in \mathbf{R}$ fixés. Dans toute cette partie, on considère l'équation différentielle linéaire :

$$(\mathcal{E}_L) \quad y' + ay = h.$$

On rappelle que les solutions (maximales) de $(\mathcal{E}_L)$ sont définies sur $\mathbf{R}$. On cherche à savoir s'il existe des solutions y de $(\mathcal{E}_L)$ qui appartiennent à $BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

II-1. On suppose dans cette question que $a = 0$.

a) La fonction h étant donnée, montrer que :

- ou bien toutes les solutions de $(\mathcal{E}_L)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ sont bornées ;
- ou bien aucune des solutions de $(\mathcal{E}_L)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ n'est bornée.

1 b) Montrer que chacun de ces deux cas peut se produire.

II-2. L'objectif de cette question est de montrer que si a est non nul alors l'équation $(\mathcal{E}_L)$ admet une solution bornée sur $\mathbf{R}$ et une seule.

1 a) On suppose que $a > 0$.

En utilisant la question **I-2.**, mettre en évidence une solution y_0 de $(\mathcal{E}_L)$ qui appartient à $BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Donner un majorant de $\|y_0\|_{BC^1}$ en fonction de $\|h\|_\infty$ et de a .

2 b) Démontrer que si $a > 0$ alors $(\mathcal{E}_L)$ possède une et une seule solution bornée sur $\mathbf{R}$.

2 c) On suppose que $a < 0$. Démontrer que $(\mathcal{E}_L)$ possède une et une seule solution bornée sur $\mathbf{R}$. On pourra introduire la fonction z telle que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $z(x) = y(-x)$.

4 **II-3.** On considère la fonction $f : x \mapsto ax$ de $\mathbf{R}$ dans lui-même et on définit l'application linéaire $\mathcal{L}_f : BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \rightarrow BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ par l'expression : $\mathcal{L}_f(y) = y' + ay$. Démontrer que f est un homéomorphisme si et seulement si $\mathcal{L}_f$ est un homéomorphisme.

Partie III : À propos des opérateurs $\mathcal{N}_f$ et $\mathcal{L}_f$

(21)

Dans cette partie, f désigne une fonction continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

Pour les questions **III-2.** et **III-4.**, on note, pour tout réel α , $h_\alpha : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction constante $x \mapsto \alpha$.

III-1. Continuité de l'opérateur $\mathcal{N}_f$

On veut établir que $\mathcal{N}_f : BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \rightarrow BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ est continu. Soit $g \in BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, et $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ convergeant vers g au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

2 a) Justifier l'existence du nombre réel $\rho = \sup_{n \in \mathbf{N}} \|g_n\|_\infty$ et montrer que $\|g\|_\infty \leq \rho$.

6 b) En utilisant la restriction de f à $[-\rho, \rho]$, montrer que $\mathcal{N}_f(g_n)$ tend vers $\mathcal{N}_f(g)$ (au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$) lorsque n tend vers $+\infty$. Conclure.

III-2. Cas où $\mathcal{N}_f$ est un homéomorphisme

On souhaite établir dans cette question que f est un homéomorphisme si et seulement si $\mathcal{N}_f$ est un homéomorphisme.

1 a) On suppose d'abord que f est un homéomorphisme.

Vérifier que $\mathcal{N}_f$ est bijectif et que $\mathcal{N}_f^{-1} = \mathcal{N}_{f^{-1}}$. En déduire que $\mathcal{N}_f$ est un homéomorphisme.

4 b) Réciproquement, on suppose que l'opérateur $\mathcal{N}_f$ est un homéomorphisme de $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ sur lui-même. Soit $y \in \mathbf{R}$ arbitraire ; justifier l'existence de $\xi \in BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle que $\mathcal{N}_f(\xi) = h_y$. Démontrer que ξ est constante (on pourra introduire, pour $a \in \mathbf{R}$ fixé, la fonction η définie par $\eta(x) = \xi(x+a)$ et considérer $\mathcal{N}_f(\eta)$). En déduire que f est un homéomorphisme de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.

III-3. L'opérateur différentiel $\mathcal{L}_f$

Démontrer que $\mathcal{L}_f$ est une application continue de $BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ vers $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

III-4. Cas où $\mathcal{L}_f$ est un homéomorphisme

Dans cette question, on suppose que l'opérateur $\mathcal{L}_f$ est un homéomorphisme de $BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ sur $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

2 a) Soit $y \in \mathbf{R}$ et soit $\xi \in BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle que $\mathcal{L}_f(\xi) = h_y$. Montrer que ξ est une fonction constante.

1 b) Démontrer que f est surjective.

2 c) Démontrer que f est injective.

1 d) En déduire que f est un homéomorphisme de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.

Partie IV : Un problème de point fixe

36

Dans cette partie, on considère une fonction continue $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

- **Rappel** : une fonction f réelle de variable réelle est dite k -lipschitzienne (k étant un réel positif fixé), ou encore lipschitzienne de rapport k , si on a

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

- On dira que f satisfait la propriété (H) s'il existe deux nombres réels m et M , *strictement positifs*, et tels que :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad (x \neq y) \Rightarrow \left(m \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq M \right).$$

On notera qu'on a nécessairement $m \leq M$.

- 4 IV-1. Dans cette question seulement, on suppose que f est dérivable sur $\mathbf{R}$; donner une condition nécessaire et suffisante pour que f satisfasse la propriété (H).

On suppose dans toute la suite de la partie IV que f satisfait la propriété (H).

- 3 IV-2. Démontrer que f est un homéomorphisme de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.

- 2 IV-3. On pose $k = \frac{m+M}{2}$, et on introduit la fonction réelle de variable réelle $F_k : x \mapsto f(x) - kx$. Démontrer que F_k est lipschitzienne d'un rapport L que l'on déterminera.

- IV-4. Soit h et ϕ deux éléments de $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Démontrer que la fonction $s \mapsto -F_k(\phi(s)) + h(s)$ est bornée sur $\mathbf{R}$. En déduire que la fonction G qui à h et ϕ fait correspondre

$$G(h, \phi) : x \mapsto e^{-kx} \int_{-\infty}^x e^{ks} (-F_k(\phi(s)) + h(s)) ds$$

est bien définie et que $G(h, \phi)$ appartient à $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

- 5 IV-5. Démontrer que les applications partielles $\phi \mapsto G(h, \phi)$ (pour $h \in BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ fixée) et $h \mapsto G(h, \phi)$ (pour $\phi \in BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ fixée) sont lipschitziennes; on précisera leurs rapports en fonction de L et k .

- 2 IV-6. Démontrer que $G(h, \phi)$ appartient à $BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et que

$$G(h, \phi)' = k(\phi - G(h, \phi)) - f \circ \phi + h.$$

- 6 IV-7. Soient deux fonctions h et ϕ dans $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Démontrer que la relation $G(h, \phi) = \phi$ a lieu si et seulement si ϕ appartient à $BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et que $\mathcal{L}_f(\phi) = h$.

IV-8. L'opérateur $\mathcal{L}_f$ comme bijection

Soit une fonction $h \in BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. Démontrer que $\phi \mapsto G(h, \phi)$ a un unique point fixe dans $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. En déduire que l'opérateur $\mathcal{L}_f : BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \rightarrow BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ est une bijection.

IV-9. L'opérateur $\mathcal{L}_f$ comme homéomorphisme

- a) Soient h_1, h_2, ϕ_1, ϕ_2 des éléments de $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ tels que $\phi_1 = G(h_1, \phi_1)$ et $\phi_2 = G(h_2, \phi_2)$. Déduire de la question IV-5. qu'il existe un réel $r > 0$ vérifiant l'inégalité suivante :

$$\|\phi_1 - \phi_2\|_\infty \leq r \|\phi_1 - \phi_2\|_\infty + \frac{1}{k} \|h_1 - h_2\|_\infty.$$

- b) Démontrer que l'opérateur $\mathcal{L}_f^{-1} : BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \rightarrow BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ est lipschitzien; on précisera son rapport.

- c) En déduire que l'opérateur $\mathcal{L}_f : BC^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \rightarrow BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ est un homéomorphisme.

Partie V : Un exemple

36

On s'intéresse à l'équation :

$$(\mathcal{F}) \quad \phi' + (2\phi + \sin^2(\phi)) = h,$$

où h est une fonction continue et bornée sur $\mathbf{R}$.

2 V-1. Vérifier que les résultats de la partie IV s'appliquent.

3 V-2. On suppose dans cette question que h est constante.
Existe-t-il une solution bornée non constante de $(\mathcal{F})$?

V-3. On revient au cas général (h arbitraire dans $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$).

1 a) Montrer que l'équation $(\mathcal{F})$ a une unique solution bornée ϕ_0 .

1 b) Soit ϕ une solution maximale de $(\mathcal{F})$, a priori définie sur un intervalle ouvert $J =]u, v[$. Démontrer que $\phi' + 2\phi$ est bornée sur J .

6 c) On suppose que v est fini. On introduit la fonction γ telle que, pour tout $x \in J$, $\gamma(x) = e^{2x}\phi(x)$. Démontrer que γ admet une limite à gauche au point v , et en déduire une contradiction.

4 d) Déduire de ce qui précède que $J = \mathbf{R}$ et que ϕ est bornée sur $\mathbf{R}_+$.

V-4. On prend désormais $h = \sin$. Soit ϕ une solution arbitraire de l'équation $(\mathcal{F})$ distincte de ϕ_0 . On note $\psi = \phi - \phi_0$.

3 a) Démontrer que la fonction ϕ_0 est périodique (on donnera une période de ϕ_0).

b) Démontrer qu'il existe une fonction w de $BC^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle que ψ vérifie :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \psi'(x) + 2\psi(x) = w(x).$$

4 Démontrer que ψ ne s'annule pas.

6 c) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad |\psi(x)| \leq |\psi(0)|e^{-x}.$$

d) Trouver une constante $\alpha \in \mathbf{R}$ telle que :

$$\forall c \in \mathbf{R}, \quad \exists (x_1, x_2) \in [c; +\infty[^2, \quad \phi(x_1) < \alpha < \phi(x_2).$$

Comment peut-on interpréter ce résultat ?

———— FIN DU SUJET ————