Corrigé de la seconde épreuve de l'agrégation interne 2011

I-1.a) Comme y est bornée, il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que $y(\mathbb{R}) \subset [-M\,,\,M]$. Mais f est continue, donc elle est bornée sur le segment $[-M\,,\,M]$ qui est compact, donc $f\circ y$ est bornée. De plus, $f\circ y$ est continue car f et y le sont, d'où le résultat.
I-1.b) Si $y \in BC^1(\mathbb{R}\,,\,\mathbb{R}) \subset BC^0(\mathbb{R}\,,\,\mathbb{R})$, on a donc $f\circ y \in BC^0(\mathbb{R}\,,\,\mathbb{R})$ et $y' \in BC^0(\mathbb{R}\,,\,\mathbb{R})$ par définition, donc $\mathcal{L}_f$ est bien définie.
I-2.a) L'intégrande est continu et pour tout $x\in\mathbb{R}$, l'intégrale converge absolument car g est bornée et la fonction $s\mapsto e^{bs}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_-$, donc $T_g(x)$ est bien défini et on a :

$$|\,T_g(x)\,| \leqslant e^{-bx}\int_{-\infty}^{x} e^{bs}\,\|g\|_\infty\,ds \;=\; \frac{1}{b}\,\|g\|_\infty$$

pour tout $x\in\mathbb{R}$ donc T_g est bornée. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, posons :

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{bs}\,g(s)\,ds = \int_{-\infty}^{0} e^{bs}\,g(s)\,ds + G_0(x) \quad\text{ où }\quad G_0(x) = \int_{0}^{x} e^{bs}\,g(s)\,ds \quad .$$

Comme l'intégrande est continu, la fonction G_0 est dérivable de dérivée $x\mapsto e^{bx}g(x)$, donc G puis T_g sont dérivables et on a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$T_g'(x) \;=\; -b\,e^{-bx}\,G(x) + e^{-bx}\,e^{bx}g(x) \;=\; -b\,T_g(x) + g(x)$$

donc T_g' est bornée et $T_g \in BC^1(\mathbb{R}\,,\,\mathbb{R})$ est solution de l'équation : $y' + b\,y = g$.
I-2.b) On a obtenu : $\|T_g\|_\infty \leqslant b^{-1}\|g\|_\infty$ et il vient : $\|T_g'\|_\infty \leqslant b\,\|T_g\|_\infty + \|g\|_\infty$ d'où finalement :

$$\|T_g\|_{BC^1} \leqslant \left(2 + \frac{1}{b}\right)\|g\|_\infty \quad .$$

I-3.a) La fonction Δ est continue car f l'est et l'ensemble Π_+ est convexe donc connexe, donc le théorème des valeurs intermédiaires montre que Δ ne peut pas changer de signe sans s'annuler. Mais elle ne s'annule pas car f est injective, donc elle garde un signe constant, ce qui montre que f est strictement monotone.
I-3.b) On en déduit que f est continue et strictement monotone, donc le "théorème de la bijection monotone" permet d'en conclure que f^{-1} est continue.
I-3.c) On a : $(ii) \Rightarrow (i)$ par définition, et on vient de montrer que $(i) \Rightarrow (ii)$ d'où l'équivalence.
I-4) On a montré en **I-1.a** que $f\circ y \in BC^0(\mathbb{R}\,,\,\mathbb{R})$ si $y \in BC^0(\mathbb{R}\,,\,\mathbb{R})$, donc si y vérifie $(\mathcal{E})$ on a : $y' = h - f\circ y \in BC^0(\mathbb{R}\,,\,\mathbb{R})$, d'où : $y \in BC^1(\mathbb{R}\,,\,\mathbb{R})$.

II-1.a) Les solutions de $(\mathcal{E}_L)$ sont les primitives de h, donc en en fixant une notée H ce sont les fonctions $H + c$ pour $c\in\mathbb{R}$, d'où le résultat.
II-1.b) La fonction $h_0 \,:\, x\mapsto 0$ est dans $BC^0(\mathbb{R}\,,\,\mathbb{R})$ et toutes les solutions de $(\mathcal{E}_L)$ sont constantes donc bornées, tandis que $h_1 \,:\, x\mapsto 1$ qui est aussi dans $BC^0(\mathbb{R}\,,\,\mathbb{R})$ admet pour primitive $H_1 \,:\, x\mapsto x$ donc aucune solution de $(\mathcal{E}_L)$ n'est bornée.
II-2.a) En **I-2** on a montré que si $b = a$, la fonction $y_0 = T_h \in BC^1(\mathbb{R}\,,\,\mathbb{R})$ est solution de $(\mathcal{E}_L)$ et vérifie : $\|y_0\|_{BC^1} \leqslant (2 + a^{-1})\,\|h\|_\infty$.
II-2.b) Les solutions de $(\mathcal{E}_L)$ sont les fonctions $x\mapsto y_0(x) + C\,e^{-ax}$ pour $C\in\mathbb{R}$, et cette fonction est bornée si et seulement si $C = 0$ d'où le résultat.
II-2.c) La fonction $z \,:\, x\mapsto y(-x)$ est dérivable (resp. bornée) si et seulement si y l'est, et pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $y(x) = z(-x)$ et $y'(x) = -z'(-x)$, donc y vérifie $(\mathcal{E}_L)$ si et seulement si : $-z'(-x) + a\,z(-x) = h(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, c'est à dire : $z' - a\,z = g$ où $g \,:\, x\mapsto -h(-x)$ est dans $BC^0(\mathbb{R}\,,\,\mathbb{R})$. On peut donc conclure d'après **II-2.b**.
II-3) La fonction f est un homéomorphisme si et seulement si $a \neq 0$, et si $a = 0$ on a vu en **II-1** que $\mathcal{L}_f$ est soit non injective, soit non surjective. De plus, l'application linéaire $\mathcal{L}_f \,:\, BC^1(\mathbb{R}\,,\,\mathbb{R}) \to BC^0(\mathbb{R}\,,\,\mathbb{R})$ vérifie : $\|\mathcal{L}_f(y)\|_{BC^0} \leqslant \max(1\,,\,|\,a\,|)\,\|y\|_{BC^1}$ pour tout $y \in BC^1(\mathbb{R}\,,\,\mathbb{R})$ donc elle est continue. Si $a\neq 0$, on a montré en **II-2** qu'elle est bijective, et si $a > 0$ son inverse est l'application linéaire $h\mapsto T_h$ pour $b = a$ qui est continue d'après **I-2.b**

donc c'est un homéomorphisme. Enfin, si $a < 0$, on pose $b = -a$ et pour tout $h \in BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on définit $g : x \mapsto h(-x)$, et on a : $\mathcal{L}_f^{-1}(h) = T_g$ donc $\mathcal{L}_f^{-1}$ est encore linéaire continue donc $\mathcal{L}_f$ est aussi un homéomorphisme, ce qui permet de conclure.

III-1.a) La fonction $h \mapsto \|h\|_\infty$ est continue sur $BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (pour la norme $\| \|_\infty$) car elle est 1-lipschitzienne d'après l'inégalité triangulaire, donc la suite réelle $(\|g_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\|g\|_\infty$. Elle est donc bornée donc ρ est bien défini, et comme $\|g_n\|_\infty \leqslant \rho$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ on obtient en passant à la limite : $\|g\|_\infty \leqslant \rho$.

III-1.a) Fixons un réel $\varepsilon > 0$. La fonction f est continue, donc sa restriction au segment $[-\rho, \rho]$ est uniformément continue, donc il existe un réel $\delta > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in [-\rho, \rho]^2, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon .$$

Mais $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers g, donc il existe un entier naturel N tel que pour tout $n \geqslant N$, on a : $\|g_n - g\|_\infty < \delta$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $|g_n(t) - g(t)| < \delta$ et on a aussi : $|g_n(t)| \leqslant \rho$ et $|g(t)| \leqslant \rho$ d'après la question précédente, d'où : $|f(g_n(t)) - f(g(t))| < \varepsilon$, et finalement : $\|\mathcal{N}_f(g_n) - \mathcal{N}_f(g)\|_\infty < \varepsilon$, ce qui montre que $(\mathcal{N}_f(g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathcal{N}_f(g)$. La caractérisation séquentielle de la continuité permet d'en déduire que $\mathcal{N}_f$ est continu.

III-2.a) Pour tous $g, h \in BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on a : $f \circ g = h \Leftrightarrow g = f^{-1} \circ h$, donc $\mathcal{N}_f$ est bijectif et sa réciproque est $\mathcal{N}_{f^{-1}} : BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui est bien défini et continu car f^{-1} est continue. On en conclut que $\mathcal{N}_f$ est un homéomorphisme.

III-2.b) La fonction $\xi = (\mathcal{N}_f)^{-1}(h_y) \in BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifie donc : $\mathcal{N}_f(\xi) = h_y$. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $\eta : x \mapsto \xi(x + a) \in BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathcal{N}_f(\eta)(x) = f(\eta(x)) = f(\xi(x + a)) = f \circ \xi\,(x + a) = \mathcal{N}_f(\xi)\,(x + a) = h_y(x + a) = h_y(x)$$

donc : $\mathcal{N}_f(\eta) = h_y$. Comme $\mathcal{N}_f$ est injective, on en déduit que $\eta = \xi$ et on en conclut que : $\xi(a) = \xi(0)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, donc la fonction ξ est une constante h_x avec $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a donc :

$$y = h_y\,(t) = \mathcal{N}_f(h_x)\,(t) = f \circ h_x\,(t) = f(x)$$

donc f est surjective. Réciproquement, si $f(z) = y$, on obtient : $f \circ h_z = h_y$ donc $\mathcal{N}_f(h_z) = h_y$, d'où $h_z = h_x$ par injectivité de $\mathcal{N}_f$, donc $z = x$ et on en conclut que f est bijective : c'est donc un homéomorphisme d'après la question **I.3**.

III-3) Les applications linéaires $D : BC^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $D(g) = g'$ et $Id : BC^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont continues car pour tout $g \in BC^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on a par définition : $\|g'\|_\infty \leqslant \|g\|_{BC^1}$ et $\|g\|_\infty \leqslant \|g\|_{BC^1}$, et on a : $\mathcal{L}_f = D + \mathcal{N}_f \circ Id$ donc l'application $\mathcal{L}_f$ est continue car $\mathcal{N}_f$ l'est.

III-4.a) Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $\eta : x \mapsto \xi(x + a) \in BC^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathcal{L}_f(\eta)\,(x) = \xi'\,(x + a) + f(\xi(x + a)) = \mathcal{L}_f(\xi)\,(x + a) = h_y(x + a) = h_y(x)$$

donc comme en **III.2.b** on obtient : $\mathcal{L}_f(\eta) = h_y$, donc $\eta = \xi$ car $\mathcal{L}_f$ est injectif, ce qui montre que ξ est constante.

III-4.b) Comme $\mathcal{L}_f$ est surjectif, pour tout $y \in \mathbb{R}$ il existe $\xi \in BC^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que $\mathcal{L}_f(\xi) = h_y$, et la fonction ξ est une constante h_x avec $x \in \mathbb{R}$. On a donc : $\mathcal{L}_f(h_x) = f \circ h_x = h_y$, et en évaluant ces fonctions en 0 on obtient : $f(x) = y$, donc f est surjective.

III-4.c) Si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ vérifient $f(x_1) = f(x_2)$, on obtient :

$$\mathcal{L}_f(h_{x_1}) = f \circ h_{x_1} = f \circ h_{x_2} = \mathcal{L}_f(h_{x_2})$$

donc $h_{x_1} = h_{x_2}$ car $\mathcal{L}_f$ est injectif, d'où $x_1 = x_2$, ce qui montre que f est injective.

III-4.d) La fonction f est donc continue et bijective, donc d'après la question **I.3** c'est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

IV-1) Si f vérifie la propriété (H), on fixe $x \in \mathbb{R}$ et on fait tendre y vers x dans l'inégalité :

$$m \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant M$$

pour en déduire que : $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Réciproquement, si cette condition est remplie, le théorème des accroissements finis montre que l'inégalité ci-dessus est vérifiée pour tous $x \neq y \in \mathbb{R}$. On en conclut que f vérifie (H) si et seulement si il existe deux constantes réelles $M \geqslant m > 0$ telles que : $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

IV-2) Comme f est M-lipschitzienne, elle est continue, et pour tous réels $y > x$ on a : $f(y) - f(x) \geqslant m\,(y-x) > 0$ donc f est strictement croissante. De plus, pour tout $y > 0$ on obtient : $f(y) \geqslant f(0) + m\,y$ et pour tout $x < 0$ on a : $f(x) \leqslant f(0) + m\,x$ donc il vient :

$$\lim_{y \to +\infty} f(y) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad ,$$

et on en conclut que f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

IV-3) Pour tous $x \neq y \in \mathbb{R}$ on a : $\dfrac{F_k(y) - F_k(x)}{y-x} = \dfrac{f(y) - f(x)}{y-x} - k$, donc :

$$\frac{m-M}{2} \leqslant \frac{F_k(y) - F_k(x)}{y-x} \leqslant \frac{M-m}{2}$$

et F_k est L-lipschitzienne avec : $L = \dfrac{M-m}{2}$.

IV-4) La fonction F_k est donc continue, et comme en **I-1.a** on en déduit que $F_k \circ \phi$ est continue et bornée, donc $g = -F_k \circ \phi + h \in BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et le résultat de **I-2.a** montre que $G(h\,,\,\phi) = T_g$ avec $b = k$ est bien définie et appartient à $BC^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, donc *a fortiori* à $BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

IV-5) Pour tous $\phi\,,\,h_1\,,\,h_2 \in BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$G(h_2\,,\,\phi) - G(h_1\,,\,\phi) = e^{-k\,x} \int_{-\infty}^{x} e^{ks} \big(h_2(s) - h_1(s)\big)\, ds \;=\; T_{h_2 - h_1}$$

avec $b = k$, donc les calculs faits en **I-2.a** montrent que $h \mapsto G(h\,,\,\phi)$ est lipschitzienne de rapport k^{-1}. Pour tous $h\,,\,\phi_1\,,\,\phi_2 \in BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a de même :

$$\|G(h\,,\,\phi_2) - G(h\,,\,\phi_1)\|_\infty = \|T_{F_k \circ \phi_1 - F_k \circ \phi_2}\|_\infty \leqslant \frac{1}{k}\, \|F_k \circ \phi_2 - F_k \circ \phi_1\|_\infty$$

et F_k est L-lipschitzienne, donc on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|\,F_k \circ \phi_2(x) - F_k \circ \phi_1(x)\,| \leqslant L\ |\phi_2(x) - \phi_1(x)\,| \leqslant L\,\|\phi_2 - \phi_1\|_\infty$$

donc : $\|F_k \circ \phi_2 - F_k \circ \phi_1\|_\infty \leqslant L\,\|\phi_2 - \phi_1\|_\infty$ et on en déduit que $h \mapsto G(h\,,\,\phi)$ est lipschitzienne de rapport $k^{-1}\,L$.

IV-6) En posant toujours : $b = k$ et $g = -F_k \circ \phi + h$, on a montré à la question **I-2.a** que $G(h\,,\,\phi) = T_g \in BC^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que :

$$G(h\,,\,\phi)' = -k\,G(h\,,\,\phi) - F_k \circ \phi + h = k\,\big(\phi - G(h\,,\,\phi)\big) - f \circ \phi + h$$

par définition de F_k.

IV-7) Si $G(h\,,\,\phi) = \phi$, on en déduit que $\phi \in BC^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que :

$$\phi' = G(h\,,\,\phi)' = k\,\big(\phi - G(h\,,\,\phi)\big) - f \circ \phi + h = -f \circ \phi + h$$

donc on obtient : $\mathcal{L}_f(\phi) = h$. Réciproquement, si $\phi \in BC^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifie : $\phi' = -f \circ \phi + h$, on obtient : $G(h\,,\,\phi)' = k\,\big(\phi - G(h\,,\,\phi)\big) + \phi'$, donc la fonction $\psi = \phi - G(h\,,\,\phi)$ vérifie l'équation différentielle : $y' = -k\,y$ et on en déduit qu'il existe un réel C tel que : $\psi(x) = C\,e^{-kx}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Mais les fonctions ϕ et $G(h\,,\,\phi)$ sont bornées, donc ψ l'est aussi, donc on a nécessairement : $C = 0$ et on en déduit que $G(h\,,\,\phi) = \phi$, d'où l'équivalence demandée.

IV-8) On a montré en **IV-5** que la fonction $\phi \mapsto G(h\,,\,\phi)\ :\ BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est lipschitzienne de rapport :

$$k^{-1} L = \frac{M-m}{M+m} < 1$$

donc elle est contractante, et l'espace $BC^0(\mathbb{R}\,,\,\mathbb{R})$ est complet donc elle admet un unique point fixe d'après le théorème du même nom. D'après la question précédente, on en déduit que l'équation $\mathcal{L}_f(\phi) = h$ admet une unique solution $\phi \in BC^1(\mathbb{R}\,,\,\mathbb{R})$, ce qui montre que l'opérateur $\mathcal{L}_f$ est une bijection.
IV-9.a) On a : $\|\phi_2 - \phi_1\|_\infty = \|G(h_2\,,\,\phi_2) - G(h_2\,,\,\phi_1) + G(h_2\,,\,\phi_1) - G(h_1\,,\,\phi_1)\|_\infty$ donc :

$$\|\phi_2 - \phi_1\|_\infty \leqslant \frac{L}{k}\,\|\phi_2 - \phi_1\|_\infty + \frac{1}{k}\,\|h_2 - h_1\|_\infty$$

d'après la question **IV-5**, d'où le résultat avec : $r = k^{-1}L > 0$.
IV-9.b) On a vu en **IV-8** qu'on a : $r < 1$, donc on en déduit que :

$$\|\mathcal{L}_f^{-1}(h_2) - \mathcal{L}_f^{-1}(h_1)\|_\infty = \|\phi_2 - \phi_1\|_\infty \leqslant \frac{1}{(1-r)k}\,\|h_2 - h_1\|_\infty = C\,\|h_2 - h_1\|_\infty\,.$$

Mais on a aussi : $\phi_j' = -f \circ \phi_j + h_j$ si $j \in \{1\,,\,2\}$, d'où :

$$\|\phi_2' - \phi_1'\|_\infty \leqslant \|f \circ \phi_2 - f \circ \phi_1\|_\infty + \|h_2 - h_1\|_\infty \leqslant M\,\|\phi_2 - \phi_1\|_\infty + \|h_2 - h_1\|_\infty$$

car f est M-lipschitzienne, donc on obtient :

$$\|\mathcal{L}_f^{-1}(h_2) - \mathcal{L}_f^{-1}(h_1)\|_{BC^1} \leqslant \big((M+1)\,C + 1\big)\,\|h_2 - h_1\|_\infty$$

et l'opérateur $\mathcal{L}_f^{-1}$ est donc lipschitzien de rapport : $\dfrac{M+1}{(1-r)k} + 1 = \dfrac{M - m + 1}{m}$.
IV-9.c) On en déduit que $\mathcal{L}_f^{-1}$ est continu, et on en conclut grâce à **III-3** que $\mathcal{L}_f$ est un homéomorphisme.

V-1) La fonction $f\,:\,\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + \sin^2(x)$ est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = 2 + \sin(2x) \in [1\,,\,3]$, donc la question **IV-1** montre que f vérifie la propriété (H) avec $m = 1$ et $M = 3$ et qu'on peut donc appliquer les résultats de la partie **IV**.
V-2) Ceux-ci montrent que l'équation $(\mathcal{F})$ admet une unique solution $\phi \in BC^1(\mathbb{R}\,,\,\mathbb{R})$, donc une unique solution bornée d'après la question **I-4**. Mais f est surjective, donc si $h = h_y$ avec $y \in \mathbb{R}$ il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = y$. La fonction constante $h_z \in BC^1(\mathbb{R}\,,\,\mathbb{R})$ vérifie $(\mathcal{F})$, donc c'est son unique solution bornée et $(\mathcal{F})$ n'a pas de solution bornée non constante.
V-3.a) De même, **I-4** montre que toute solution bornée de $(\mathcal{F})$ est dans $BC^1(\mathbb{R}\,,\,\mathbb{R})$, donc les résultats de la partie **IV** montrent que $(\mathcal{F})$ admet une unique solution bornée ϕ_0.
V-3.b) Les fonctions h et $\sin^2(\phi)$ sont bornées sur J, donc $\phi' + 2\,\phi = h - \sin^2(\phi)$ l'est aussi.
V-3.c) La fonction $\gamma\,:\,J \to \mathbb{R}$ est de classe C^1, donc en fixant $x_0 \in J$ on a pour tout $x \in J$:

$$\gamma(x) = \gamma(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{2s}\big(\phi(s) + 2\,\phi'(s)\big)\,ds$$

où l'intégrande est continu et borné au voisinage de v, donc l'intégrale $\int_{x_0}^{v} e^{2s}\big(\phi(s)+2\,\phi'(s)\big)\,ds$ converge et la fonction γ admet une limite à gauche au point v, de même que la fonction ϕ. En notant ℓ cette limite, le théorème de Cauchy-Lipschitz montre qu'il existe un réel $\delta > 0$ tel que $(\mathcal{F})$ admet une unique solution $\psi\,:\,]\,v - \delta\,,\,v + \delta\,[\to \mathbb{R}$ vérifiant $\psi(v) = \ell$ et on a :

$$\lim_{x \to v^-} \phi'(x) = \lim_{x \to v^-} \big(h(x) - 2\,\phi(x) - \sin^2(\phi(x))\big) = h(v) - 2\,\ell - \sin^2(\ell)\,,$$

donc en posant $\widetilde{J} =]\,u\,,\,v + \delta\,[$, la fonction $\widetilde{\phi}\,:\,\widetilde{J} \to \mathbb{R}$ définie par $\widetilde{\phi}(x) = \phi(x)$ si $x < v$ et $\widetilde{\phi}(x) = \psi(x)$ si $x \geqslant v$ est dérivable au point v et c'est une solution de $(\mathcal{F})$ sur $\widetilde{J}$, ce qui contredit la maximalité de ϕ.
V-3.d) On montre de la même manière que u ne peut pas être fini, donc $J = \mathbb{R}$ et les calculs faits en **V-3.c** montrent que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\phi(x) = e^{-2\,x}\phi(0) + e^{-2\,x}\int_0^x e^{2s} g(s)\,ds = e^{-2\,x}\phi(0) + T_g(x)$$

où $g = \phi' + 2\phi$ est bornée, et les résultats de la question **I-2** avec $b = 2$ montrent que T_g est bornée, donc ϕ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

V-4.a) La fonction $\phi_1 \,:\, x \mapsto \phi_0(x + 2\,\pi)$ est solution de $(\mathcal{F})$ car $h = \sin$ est 2π-périodique, et elle est bornée sur $\mathbb{R}$. Par unicité d'une telle solution, on en déduit que ϕ_0 est 2π-périodique.

V-4.b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\phi'(x) + 2\,\phi(x) + \sin^2(\phi(x)) = h(x) = \phi_0'(x) + 2\,\phi_0(x) + \sin^2(\phi_0(x))$$

donc : $\psi'(x) + 2\,\psi(x) = \sin^2(\phi_0(x)) - \sin^2(\phi(x)) = w(x)$ où $w \in BC^0(\mathbb{R}\,,\,\mathbb{R})$. S'il existait un réel x_0 tel que $\phi(x_0) = \phi_0(x_0)$, le théorème de Cauchy-Lipschitz montrerait que $\phi = \phi_0$ car elles sont toutes les deux définies sur $\mathbb{R}$, donc maximales. On suppose le contraire, donc ψ ne s'annule pas.

V-4.c) La fonction $\theta = \sin^2$ est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $\theta'(x) = \sin(2x) \in [-1\,,\,1]$ donc θ est 1-lipschitzienne et on a : $|\,w(x)\,| \leqslant |\,\psi(x)\,|$. Supposons d'abord que $\psi(0) > 0$, donc que ψ est partout strictement positive. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on obtient : $\psi'(x) + 2\,\psi(x) \leqslant \psi(x)$, d'où : $\psi'(x) + \psi(x) \leqslant 0$ et la fonction $x \mapsto e^x \psi(x)$ est décroissante, d'où : $0 < \psi(x) \leqslant \psi(0)\,e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Si $\psi(0) < 0$, on se ramène au cas précédent en considérant la fonction $\psi_1 = -\psi$, et on obtient dans tous les cas : $|\,\psi(x)\,| \leqslant |\,\psi(0)\,|\ e^{-x}$.

V-4.d) Si la fonction ϕ_0 était constante, on en déduirait que $h = 2\,\phi_0 + \sin^2(\phi_0)$ l'est aussi ce qui est faux, donc ϕ est non constante. Il existe donc trois réels α , x_- et x_+ tels que : $\phi_0(x_-) < \alpha < \phi_0(x_+)$, et les résultats de **V-3.a** et **V-4.c** montrent que :

$$\lim_{n \to +\infty} \phi(x_- + 2\pi\,n) = \phi_0(x_-) < \alpha < \phi_0(x_+) = \lim_{n \to +\infty} \phi(x_+ + 2\pi\,n)\,.$$

Pour tout réel c , il suffit donc de choisir $x_1 = x_- + 2\pi\,n$ et $x_2 = x_+ + 2\pi\,n$ avec n assez grand pour obtenir le résultat souhaité, qu'on peut interpréter en disant que ϕ "oscille" autour de la valeur α en $+\infty$.