NJ 1

J. 6037

SESSION DE 1993

concours interne de recrutement de professeurs agrégés et concours d'accès à l'échelle de rémunération

section : mathématiques

première épreuve de mathématiques

Durée : 6 heures

Calculatrice de poche, y compris programmable et alphanumérique, à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228, du 28 juillet 1986.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Tournez la page S.V.P.

On se propose d'établir quelques résultats sur l'ensemble des sommes de n carrés dans un corps ou dans certains anneaux.

Un sous-ensemble S *d'un anneau* A *est dit* ***multiplicatif*** *si le produit de deux éléments de* S *appartient à* S.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, *on note* $S_n(A)$ *l'ensemble des éléments* x *de l'anneau* A *qui peuvent s'écrire sous la forme* $x = x_1^2 + \ldots + x_n^2$, *avec* $x_1, \ldots, x_n$ *dans* A.

Si k *est un corps commutatif,* $k[X]$ *et* $k(X)$ *désignent respectivement l'anneau des polynômes et le corps des fractions rationnelles à coefficients dans* k *en une indéterminée* X *; enfin* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ *ont les significations habituelles.*

I

Où l'on traite quelques exemples.

1. Soient x, y, z, t quatre éléments d'un sous-anneau B du corps $\mathbb{R}$ des réels. En écrivant que

   (*) $$|x + iy|^2 \cdot |z + it|^2 = |(x + iy)(z + it)|^2$$

   démontrer que $S_2(B)$ est un ensemble multiplicatif.

2. L'égalité (*) peut être regardée comme une identité dans l'anneau B en les lettres x, y, z, t. Énoncer cette identité et la démontrer dans un anneau commutatif quelconque A. En déduire que $S_2(A)$ est un ensemble multiplicatif.

3. Montrer que $15 \notin S_3(\mathbb{Z})$ et en déduire que $S_3(\mathbb{Z})$ n'est pas un ensemble multiplicatif.

4. On note $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}$ les huit éléments de l'anneau $E = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Donner, sans justification, la liste des éléments de chacun des trois ensembles $S_1(E)$, $S_2(E)$, $S_3(E)$.

5. Soient a, b, c, d dans $\mathbb{Z}$ tels que
   $$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \equiv 0 \pmod 8.$$
   Démontrer que ces quatre nombres sont tous pairs.

6. En déduire que, si $n \in \mathbb{Z}$ est congru à -1 modulo 8, alors n n'appartient ni à $S_3(\mathbb{Z})$ ni à $S_3(\mathbb{Q})$.

7. L'ensemble $S_3(\mathbb{Q})$ est-il multiplicatif ?

8. Démontrer qu'un polynôme $f \in \mathbb{R}[X]$ appartient à $S_2(\mathbb{R}[X])$ si et seulement si $f(x) \geqslant 0$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.
   [*On pourra examiner d'abord le cas des polynômes de degré 2.*]

9. Démontrer que pour tout $n \geqslant 3$, on a $S_n(\mathbb{R}[X]) = S_2(\mathbb{R}[X])$. A-t-on aussi $S_n(\mathbb{R}(X)) = S_2(\mathbb{R}(X))$?

II

Où l'on étudie les produits de sommes de n carrés dans un corps.

Cette partie peut être traitée indépendamment de la précédente.

Dans cette partie, k désigne un corps commutatif de caractéristique zéro et I_n est l'unité de l'anneau $\mathscr{M}_n(k)$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans k.

Si M est une matrice, carrée ou rectangulaire, on note ${}^t\mathrm{M}$ sa transposée et $\Delta(\mathrm{M})$ la somme des carrés des éléments de la première ligne de M.

Une matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(k)$ est dite ***semi-orthogonale*** *si l'on a :*

$$\mathrm{A}\cdot{}^t\mathrm{A} = {}^t\mathrm{A}\cdot\mathrm{A} = \Delta(\mathrm{A})\,\mathrm{I}_n .$$

1. Soient $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(k)$ et $a \in k$ tels que $\mathrm{A}\cdot{}^t\mathrm{A} = a\,\mathrm{I}_n$.

   a. Prouver que $a = \Delta(\mathrm{A})$.

   b. Montrer que, si $a \neq 0$, alors A est semi-orthogonale.

2. Soient A et B semi-orthogonales dans $\mathscr{M}_n(k)$ et $\mathrm{e} \in k$. Démontrer que les matrices eA, ${}^t\mathrm{A}$ et AB sont semi-orthogonales et calculer $\Delta(\mathrm{eA})$, $\Delta({}^t\mathrm{A})$ et $\Delta(\mathrm{AB})$ en fonction de e, $\Delta(\mathrm{A})$ et $\Delta(\mathrm{B})$.

3. On pose
$$\Omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et, pour } n \geqslant 3, \quad \Omega_n = \begin{pmatrix} \Omega_2 & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_{n-2} \end{pmatrix}.$$
   Démontrer que Ω_n est semi-orthogonale pour tout $n \geqslant 2$.

4. Soit $n \geqslant 2$ et A semi-orthogonale dans $\mathscr{M}_n(k)$.

   a. Montrer que la matrice obtenue à partir de A en échangeant les deux premières lignes est encore semi-orthogonale.

   b. Établir, plus généralement, qu'une permutation quelconque des lignes ou des colonnes n'affecte pas la semi-orthogonalité d'une matrice.

5. Soit $\mathrm{L} = (\ell_1, \ldots, \ell_n)$ une matrice-ligne à coefficients dans k telle que $\Delta(\mathrm{L}) = 0$.

   a. Montrer que la matrice ${}^t\mathrm{L}\cdot\mathrm{L}$ est semi-orthogonale et déterminer sa i-ème ligne pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

   b. En déduire qu'on peut trouver dans $\mathscr{M}_n(k)$ une matrice semi-orthogonale dont L soit la première ligne.

6. Soient A et B semi-orthogonales dans $\mathscr{M}_n(k)$. On suppose que $\Delta(\mathrm{A}) \neq 0$ et que $\Delta(\mathrm{A}) + \Delta(\mathrm{B}) \neq 0$. On pose $\mathrm{C} = -(\Delta(\mathrm{A}))^{-1}\,{}^t\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{B}\mathrm{A}$.

   Démontrer que la matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & {}^t\mathrm{A} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(k)$ est semi-orthogonale.

7. Soient $x_1, \ldots, x_n$ dans k. Montrer qu'il existe dans $\mathscr{M}_n(k)$ une matrice semi-orthogonale dont la première ligne est $(x_1, \ldots, x_n)$, dans chacun des deux cas suivants :

   a. $k = \mathbb{R}$.

   b. k quelconque et n puissance de 2 (c'est-à-dire de la forme $n = 2^p$, $p \in \mathbb{N}$).

8. Prouver que, si n est une puissance de 2, un élément a de k appartient à l'ensemble $\mathrm{S}_n(k)$ défini dans l'introduction si et seulement s'il existe une matrice semi-orthogonale A dans $\mathscr{M}_n(k)$ vérifiant $\Delta(\mathrm{A}) = a$.

9. Montrer que, si n est une puissance de 2, alors $\mathrm{S}_n(k)$ est un ensemble multiplicatif.

Tournez la page S.V.P.

III

Où l'on précise le nombre de carrés nécessaires pour écrire — 1.

Dans cette partie, k désigne un corps commutatif de caractéristique quelconque. Le ***niveau*** *$s(k)$ de k est le plus petit entier $n \geqslant 1$ tel que $-1 \in S_n(k)$, si un tel entier n existe; dans le cas contraire, on pose $s(k) = +\infty$.*

1. Calculer le niveau des corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

2. Quel est le niveau d'un corps de caractéristique 2 ? d'un corps de caractéristique 5 ?

3. On pose $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, où p est un nombre premier $\geqslant 3$.

   a. Quel est le noyau du morphisme $x \longmapsto x^2$ du groupe multiplicatif $\mathbb{F}_p^*$ des éléments non nuls du corps $\mathbb{F}_p$ dans lui-même ?

   b. Quel est le cardinal de l'image E de ce morphisme ?

   c. T désignant l'ensemble des éléments de $\mathbb{F}_p$ de la forme $-1-y$ avec $y \in S_1(\mathbb{F}_p) = E \cup \{0\}$, démontrer que l'intersection $T \cap S_1(\mathbb{F}_p)$ n'est pas vide.

   d. En déduire que $s(\mathbb{F}_p) \leqslant 2$.

4. Démontrer que, si le corps k (fini ou infini) est de caractéristique non nulle, alors $s(k) \leqslant 2$.

5. On suppose, dans cette question, que le corps k est de caractéristique zéro et de niveau $s \neq +\infty$. Il existe donc $x_1, \ldots, x_s$ dans k tels que $-1 = x_1^2 + \ldots + x_s^2$. Soit n la plus grande puissance de 2 telle que $n \leqslant s$ et soit $x = x_1^2 + \ldots + x_n^2$. Établir que $x \neq 0$, puis successivement que $-x$, $-x^2$ et -1 appartiennent à $S_n(k)$.

6. Démontrer que le niveau d'un corps commutatif quelconque est égal ou bien à $+\infty$ ou bien à une puissance de 2.

IV

Où l'on traite le cas d'un anneau de polynômes.

Dans cette partie, on se donne un corps commutatif k de caractéristique zéro et l'on pose $A = k[X]$ et $K = k(X)$ en sorte que $k \subset A \subset K$.

1. Démontrer que $S_1(A) = A \cap S_1(K)$.

2. Soient $a_1, \ldots, a_{n-1}, b$ dans K ($n \geqslant 2$). Simplifier l'expression $(b+1)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (a_i(b-1))^2$ lorsque $\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 = -1$.

3. En déduire que, s'il existe $n \geqslant 2$ tel que $-1 \in S_{n-1}(k)$, alors $S_n(k) = k$, $S_n(A) = A$ et $S_n(K) = K$.

4. Pour quels entiers $n \geqslant 1$ les ensembles $S_n(\mathbb{C}(X))$ sont-ils multiplicatifs ?

5. Soit n un entier $\geqslant 2$ tel que $-1 \notin S_{n-1}(k)$ et soient $R_1, \ldots, R_n$ des polynômes dans A. Démontrer que si $R_1^2 + \ldots + R_n^2 = aX$, avec $a \in k$, alors $R_1, \ldots, R_n$ sont nuls.

6. Soient P, Q, $P_1, \ldots, P_n$, $Q_1, \ldots, Q_n$ dans $A\,(n \geqslant 2)$.
On pose $S = P - \sum_{i=1}^{n} Q_i^2$, $T = PQ - \sum_{i=1}^{n} P_i Q_i$, $Q' = 2T - QS$ et $P'_i = 2\,Q_i T - P_i S$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

a. Démontrer que, si l'on a l'égalité :

(1) $$Q^2 P = \sum_{i=1}^{n} P_i^2,$$

alors on a aussi les deux égalités :

(2) $$Q'^2 P = \sum_{i=1}^{n} P_i'^2 \quad \text{et}$$

(3) $$QQ' = \sum_{i=1}^{n} (P_i - QQ_i)^2.$$

b. On suppose, outre l'égalité (1), que $-1 \notin S_{n-1}(k)$, que $Q \neq 0$ et que $Q' = 0$. Prouver l'égalité :

(4) $$P = \sum_{i=1}^{n} Q_i^2.$$

7. Soit $n \geqslant 2$ tel que $-1 \notin S_{n-1}(k)$ et soient $P, Q, P_1, \ldots, P_n$ dans A vérifiant l'égalité (1) ci-dessus et les conditions :

(5) $$PQ \neq 0 \quad \text{et} \quad \deg Q \geqslant 1.$$

Démontrer qu'on peut trouver Q'', $P''_1, \ldots, P''_n$ dans A vérifiant :

(6) $$Q''^2 P = \sum_{i=1}^{n} P_i''^2$$

et

(7) $$PQ'' \neq 0 \quad \text{et} \quad \deg Q'' < \deg Q.$$

[*On pourra utiliser la question précédente en prenant pour* Q_i *le quotient dans la division euclidienne de* P_i *par* Q.]

8. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $S_n(A) = A \cap S_n(K)$.

9.*a.* Démontrer que les corps k et K ont même niveau.

b. Supposant que ce niveau commun s est fini, démontrer que $S_s(K) \neq S_{s+1}(K)$.

10. Établir que, si n est une puissance de 2, alors l'ensemble $S_n(A)$ est multiplicatif.