8 Fonctions de plusieurs variables

Pour ce chapitre, en dehors des livres « généralistes » (*e.g.* [Liret Martinais, Lelong-Ferrand Arnaudiès, Monier Analyse, Ramis Deschamps Odoux] *etc.*), on peut vraiment recommander [Rouvière].

Munissons $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ de normes, notées $\| \ \|$ sans préciser lesquelles : de toute façon elles sont toutes équivalentes !

Les fonctions considérées dans cette section sont définies sur un ouvert de $E = \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $F = \mathbb{R}^p$. Plus généralement, on peut supposer que E et F sont des espaces de Banach.

8.1 Fonctions différentiables

Soit Ω un ouvert de $E = \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to F = \mathbb{R}^p$ une application.

Dérivée selon un vecteur. Soient $a \in \Omega$ et $v \in \mathbb{R}^n$ un vecteur. L'ensemble $U = \{t \in \mathbb{R};\ a+tv \in \Omega\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0. On dit que f est *dérivable en a selon le vecteur v* si l'application $t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0. En particulier, lorsque v est le i-ème vecteur e_i de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on dit que f admet une dérivée partielle qui se note alors $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\cdot$

Développement limité à l'ordre 1. Comment écrire le développement limité à l'ordre 1 de f en un point a de Ω ? On devra écrire $f(a+h) = f(a) + L(h) + \varepsilon(h)$ où $L(h)$ doit être du premier degré donc *une application linéaire* et $\varepsilon(h)$ doit être un o de h, autrement dit $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\|\varepsilon(h)\|}{\|h\|} = 0$.

Remarquons que si f admet un tel développement limité, alors, pour tout $v \in E$, on a $f(a+tv) = f(a) + tL(v) + \varepsilon(tv)$, d'où l'on déduit que $L(v)$ est alors la dérivée de f selon le vecteur v (d'où l'on déduit l'unicité de L).

Définition (Différentiabilité en un point)**.** On dit que f est *différentiable* en a si elle admet un développement limité $f(a+h) = f(a) + L(h) + \varepsilon(h)$ comme ci-dessus. L'application linéaire $L : E \to F$ ainsi définie s'appelle la *différentielle* de f en a et se note $(df)_a$.

Interprétation géométrique (plan tangent à une surface). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application. On considère la surface $\Sigma = \{(x, y, f(x, y));\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Si $(a, b, c) \in \Sigma$ et f est différentiable en (a, b) de différentielle $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, le plan $P = \{(a+h, b+k, c+L(h, k));\ (h, k) \in \mathbb{R}^2\}$ est tangent en (a, b, c) à la surface Σ.

Matrice jacobienne, déterminant jacobien. L'application linéaire $(df)_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est une matrice à p lignes et n colonnes, appelée *matrice jacobienne* : c'est la matrice $J_a = (b_{i,j})$ où $b_{i,j} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$. Lorsque $n = p$, le déterminant de la matrice jacobienne s'appelle *déterminant jacobien.*

Proposition (Différentielle d'une fonction composée)**.** *Soient $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$ et $G = \mathbb{R}^q$ des espaces de Banach, U un ouvert de E, V un ouvert de F, $f : U \to V$ et $g : V \to G$ des applications. Si f est différentiable en un point $a \in U$ et g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et l'on a $(d(g \circ f))_a = (dg)_{f(a)} \circ (df)_a$.*

Inégalité des accroissements finis. *Soient E et F des espaces de Banach. On note $\| \ \|_E$ et $\| \ \|_F$ leurs normes respectives. Soient Ω un ouvert* convexe *de E et $f : \Omega \to F$ une application différentiable en tout point de Ω. Soit $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in \Omega$, on ait $|||(df)_x||| \leqslant M$. Alors pour tout $x, y \in \Omega$, on a $\|f(x) - f(y)\|_F \leqslant M\|x - y\|_E$.*

La démonstration de l'inégalité des accroissements finis n'est pas au programme ; elle l'est si l'on suppose f de classe C^1.

Corollaire. *Une application différentiable de différentielle nulle définie sur un ouvert connexe d'un espace de Banach à valeurs dans un espace de Banach est constante.*

Une fonction f définie sur un ouvert $\Omega \subset E = \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $F = \mathbb{R}^p$ est dite de classe C^1 si l'application qui à tout point a de Ω fait correspondre la différentielle df_a de f en a est continue (comme application de Ω dans $\mathcal{L}(E, F) = M_{p,n}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{pn}$).

Théorème. *Pour qu'une fonction soit de classe C^1 sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, il faut et il suffit qu'elle admette des dérivées partielles continues sur Ω.*

La composée de deux fonctions de classe C^1 est de classe C^1.

Gradient. Soient E un espace vectoriel *euclidien*, Ω un ouvert de E et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. Pour $a \in \Omega$, l'application $(df)_a$ est une forme linéaire sur E. Il existe un vecteur $(\nabla f)_a$ appelé gradient de f en a tel que, pour $h \in E$ on ait $(df)_a(h) = \langle (\nabla f)_a | h \rangle$. Si $E = \mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique, $(\nabla f)_a$ est le vecteur de composantes $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

8.2 Différentielles d'ordre supérieur

Soit $f : \Omega \to F$ une application de classe C^1. Si sa différentielle qui est application df de Ω dans $\mathcal{L}(E, F)$ est de classe C^1, on dira que f est de classe C^2. Par récurrence, on dit que f est de classe C^k si df est de classe C^{k-1}. Cela revient à dire que toutes les dérivées partielles d'ordre $\leqslant k$ existent et sont continues.

Théorème de Schwarz. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to F$ de classe C^2. Alors pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.*

Soient Ω un ouvert de E et $f : \Omega \to F$ de classe C^2. Pour $a \in \Omega$ l'application l'application $(d^2 f)_a = (d(df))_a$ est une application linéaire de E dans $\mathcal{L}(E, F)$ donc une application bilinéaire de $E \times E$ dans F. Le théorème de Schwarz dit que l'application bilinéaire $(d^2 f)_a$ est symétrique.

Formule de Taylor-Young à l'ordre 2. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to F$ de classe C^2. On a un développement limité pour f au voisinage d'un point $a = (a_1, \dots, a_n)$ de Ω et $h = (h_1, \dots, h_n)$ tel que $a + h \in \Omega$,

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + o(\|h\|^2) \\ &= f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} h_i^2 \frac{\partial^2 f}{(\partial x_i)^2}(a) + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + o(\|h\|^2). \end{aligned}$$

Extremums locaux. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie, Ω un ouvert de E, a un point de Ωet $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application.*

a) Si f est différentiable en a et présente un extremum local en a, alors la forme linéaire $(df)_a$ est nulle.

b) Si f est de classe C^2 et présente un minimum (resp. maximum) local en a, la forme bilinéaire symétrique $(d^2 f)(a)$ est positive (resp. négative).

c) Si f est de classe C^2, si $(df)_a = 0$ et si $(d^2 f)_a$ est définie positive (resp. définie négative) alors f présente un minimum (resp. maximum) local en a.

Supposons que $E = \mathbb{R}^2$. Posons $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(a)$ et $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$. Alors $(d^2 f)_a$ est définie positive (*resp.* négative) si et seulement si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ (*resp.* $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$).

8.3 Difféomorphismes

Définition. Soient U un ouvert de E et V un ouvert de F. Un *difféomorphisme* de classe C^k de U sur V est une application bijective $f : U \to V$ telle que f et f^{-1} soient de classe C^k.

Proposition. *On suppose que $f : U \to V$ est un homéomorphisme. Si f est différentiable en a et df_a est un inversible, alors f^{-1} est différentiable en $f(a)$ et $(df^{-1})_{f(a)} = (df)_a^{-1}$. Si de plus f est de classe C^k, f^{-1} est de classe C^k.*

Proposition. *Soient E et F des espaces de Banach. L'ensemble $U = \{T \in \mathcal{L}(E, F);\ T$ homéomorphisme$\}$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E, F)$ et $\varphi : T \mapsto T^{-1}$ y est continue, de classe C^∞. On a $(d\varphi)_T(h) = -T^{-1}hT^{-1}$.*

Théorème d'inversion locale. *Soient E et F des espaces de Banach, U un ouvert de E et $f : U \to F$ de classe C^1. Soit $a \in U$. On suppose que $(df)_a$ est inversible. Il existe un voisinage ouvert U_0 de a tel que la restriction de f à U_0 soit un difféomorphisme de classe C^1 de U_0 sur un ouvert de F.*

D'après la proposition ci-dessus, si f est de plus de classe C^k, il en va de même pour sa réciproque.

Théorème des fonctions implicites. *Soient E, F et G des espaces de Banach U un ouvert de $E \times F$ et $f : U \to G$ une application de classe C^1. Soit $a = (b, c)$ un point de U. On suppose que $f(a) = 0$ et que la différentielle partielle $(d_2 f)_a : F \to G$ est inversible. Alors il existe des ouverts V, W de E et F et une application $g : V \to W$ de classe C^1 tels que $\{b, c\} \in V \times W \subset U$, $g(b) = c$ et, pour $(x, y) \in V \times W$ on ait l'équivalence $f(x, y) = 0 \iff y = g(x)$. On a $(dg)_b = -(d_2 f)_a^{-1}(d_1 f)_a$. Si f est de classe C^k, il en va de même pour g.*

8.4 Exercices

8.1 Exercice. On munit $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ de leur topologie usuelle. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

1. Calculer df.
2. En quels points de $\mathbb{R}^2$ l'application df est-elle nulle ?
3. Pour chacun de ces points déterminer s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum local ou global.

8.2 Exercice. (Point de Fermat) Soient E un espace affine euclidien et $A \in E$. Notons f_A l'application $M \mapsto AM$ qui à $M \in E$ associe sa distance à A.

1. Démontrer que f_A est de classe C^2 dans $E \setminus \{A\}$ et calculer sa différentielle et sa différentielle seconde (*on pourra bien choisir un repère et effectuer un développement limité*).

   Soient A, B, C trois points non-alignés de E. Posons $f = f_A + f_B + f_C$.
2. a) Démontrer que f atteint son minimum en un point au moins.
   b) Établir que la fonction f est strictement convexe sur E.
   c) En déduire que f possède un unique minimum situé dans le plan affine contenant le triangle ABC.

3. Supposons que f atteigne son minimum en un point F de $E \setminus \{A, B, C\}$.
   a) Établir que ce point satisfait à l'équation suivante : $\overrightarrow{FA}/FA + \overrightarrow{FB}/FB + \overrightarrow{FC}/FC = \overrightarrow{0}$.
   b) Dans le cas précédent, démontrer que les trois angles sous les quels le point F voit les côtés du triangle sont égaux à $2\pi/3$. (On dit pour cela que F est le *centre optique* du triangle ABC.
   c) Dans quels cas est-ce-que F coïncide avec le centre de gravité G ?
   d) Le triangle ABC est bordé extérieurement par trois triangles équilatéraux BCA', CAB' et ABC'. Démontrer que F est situé sur les cercles circonscrits de ces trois triangles.
   e) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{A'FB}$ et en déduire que A, F, A' sont alignés. En déduire que les droites AA', BB' et CC' sont concurrentes en F.
4. On suppose que l'un des angles du triangle ABC est supérieur ou égal à $2\pi/3$. démontrer que le minimum de f est atteint en l'un des sommets. Lequel ?
5. On suppose qu'aucun des angles du triangle ABC n'est supérieur ou égal à $2\pi/3$. Démontrer qu'il existe un centre optique F de ABC et que ce point est l'unique minimum de f sur $\mathbb{R}^2$.

8.3 Exercice. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, posons $F(x, y) = x - y + \sin xy$.

1. Démontrer qu'il existe un intervalle ouvert I contenant 0 et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tels que $f(0) = 0$ et, pour tout $x \in I$ on ait $F(x, f(x)) = 0$.
2. Calculer $f'(0)$.
3. Démontrer que f admet en 0 un développement limité à l'ordre 2 et calculer ce développement.

8.4 Exercice. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on pose $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$ et $g(x, y, z) = x^2 - 3xy + 2z^2$. Considérons l'application $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$F(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z)).$$

1. Calculer dF.
2. Démontrer que la matrice
$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) & \dfrac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial y}(1,1,1) & \dfrac{\partial g}{\partial z}(1,1,1) \end{pmatrix}$$
   est inversible.
3. Démontrer qu'il existe un intervalle J centré en 1 et des applications $\varphi : J \to \mathbb{R}$ et $\psi : J \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $\varphi(1) = \psi(1) = 1$ et pour tout $x \in J$ on a $F(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0$.
4. Calculer les $\varphi'(1)$ et $\psi'(1)$.

8.5 Exercice. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Soit $(x_0, y_0) \in U$ tel que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Posons $z_0 = f(x_0, y_0)$.

1. Démontrer qu'il existe un voisinage ouvert V de (x_0, z_0) et une application F de classe C^1 tels que, pour tout $(x, z) \in V$ on ait
$$\Big(x, F(x,z)\Big) \in U \quad \text{et} \quad f\Big(x, F(x,z)\Big) = z\,.$$
   Indication. On pourra considérer l'application $\varphi : (x, y) \mapsto (x, f(x, y))$.
2. Soit $(x, z) \in V$. Posons $y = F(x, z)$. Calculer $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, z)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x, z)$ en fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

8.6 Exercice. Notons E l'espace vectoriel réel des matrices 2×2 (à coefficients réels) et $f : E \to E$ l'application $A \mapsto A^2$.

1. Démontrer que l'application f est différentiable et déterminer sa différentielle df.
2. Notons $I \in E$ la matrice identité. Démontrer qu'il existe des voisinages ouverts U et V de I tels que f induise un difféomorphisme de U sur V.

8.7 Exercice. Soient E un espace de Banach et $f : E \to E$ de classe C^1. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$, avec $k < 1$ tel que pour tout $x \in E$, on a $|||df_x||| \leqslant k$. On pose $F(x) = x - f(x)$.

1. Démontrer que l'application f est lipschitzienne.
2. a) Soit $a \in E$. Démontrer que l'équation $x = f(x) + a$ admet une et une seule solution dans E.
   b) Démontrer que l'application F est bijective.
3. Démontrer que F est un difféomorphisme de classe C^1 de E sur E.

8.8 Exercice. On note $\| \ \|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. On suppose qu'il existe une norme N sur $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on ait $N\big(F(x) - F(y)\big) \geqslant N(x - y)$.

1. Démontrer que F est injective.
2. Soit $a \in \mathbb{R}^n$.
   a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Démontrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}\Big(F(a + tx) - F(a)\Big)$ admet une limite lorsque $t \to 0$. En déduire que $N\Big((dF)_a(x)\Big) \geqslant N(x)$.
   b) Montrer que $(dF)_a$ est bijective.
   c) Soient $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application différentiable et $a \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $(d(Q \circ F))_a = 0$. Démontrer que $(dQ)_{F(a)} = 0$.
   d) Démontrer qu'il existe un voisinage ouvert U de a et un voisinage ouvert V de $F(a)$ tels que la restriction de F soit un difféomorphisme de U sur V.
3. Démontrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on ait $\big\|F(x) - F(y)\big\| \geqslant k\|x - y\|$.
4. Soit $b \in \mathbb{R}^n$. Pour $u, x \in \mathbb{R}^n$, posons $Q(u) = \|u - b\|^2$ et $\varphi(x) = Q \circ F(x) = \big\|F(x) - b\big\|^2$.
   a) Démontrer que Q est différentiable et donner une expression de dQ.
   b) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\|F(x) - b\| + \|b - F(0)\| \geqslant k\|x\|$. En déduire qu'il existe $R \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'on ait $\|x\| > R \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(0)$.
   c) Notons B la boule fermée de $\mathbb{R}^n$ de centre 0 et de rayon R. Démontrer que l'on a $\inf\{\varphi(z);\ z \in \mathbb{R}^n\} = \inf\{\varphi(z);\ z \in B\}$ et que cet « inf » est atteint en un point a de B.
   d) Démontrer que $F(a) = b$.
5. Démontrer que F est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.
6. On se propose de donner une autre démonstration de la surjectivité de F.
   a) Déduire de la question 2.d) que $F(\mathbb{R}^n)$ est ouvert dans $\mathbb{R}^n$.
   b) Soit (x_n) une suite de points de $\mathbb{R}^n$ tels que la suite $\big(F(x_n)\big)$ soit convergente. Démontrer que la suite (x_n) est de Cauchy.
   c) Démontrer que $F(\mathbb{R}^n)$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$.
   d) En déduire que F est surjective.

Références

[ArFr] J.M. Arnaudiès, H. Fraysse, *Cours de Mathématiques* (Editions Dunod)

[AC] Auliac, Caby, *Analyse pour le CAPES et l'agrégation Interne* (Ellipses).

[CFL] A. Chambert-Loir, S. Fermigier, V. Maillot, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation.* Analyse 1. Masson.

[Com] J. Combes, *Suites et séries de fonctions* (puf).

[Dantzer] J-F. Dantzer, *J.-F. Dantzer, Mathématiques pour l'agrégation interne, Analyse & probabilités, cours & exercices corrigés*, Vuibert 2007.

[DeB] J. de Biasi : *Mathématiques pour le CAPES et l'Agrégation Interne*, Coll. Jacques Moisan, Ellipses, 2ème édition, 1998.

[Del] J-P Delahaye : *Le fascinant nombre* π

[Demailly] J-P. Demailly *Analyse numérique et équations différentielles,* Coll. Grenoble Sciences, 1991

[Die] J. Dieudonné *Calcul infinitésimal,* Hermann, Méthodes, 1968.

[EyLa] P. Eymard, J-P Lafon *Autour du nombre* π. Hermann

[Francinou-Gianela] S. Francinou et H. Gianella : *Oraux X-ENS* (2 tomes analyse et 2 tomes algèbre).

[Gou] X. Gourdon *Les maths en tête. Analyse.* Ellipses (1994).

[LeSc] E. Leichtnam, X. Schauer, *Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux XENS.* Analyse 1. Ellipses.

[Lelong-Ferrand Arnaudiès] J. Lelong-Ferrand, J.M. Arnaudiès, *Cours de Mathématiques.* Dunod

[Liret Martinais] F Liret D. Martinais, *Analyse 1ère et 2e année - Cours et exercices avec solutions* Dunod

[Mar] J-P Marco *Analyse pour la licence.* Dunod.

[Moi] Moisan, *Mathématiques supérieures analyse - Topologie et séries - Suites et séries de fonctions* (ellipses).

[MT] J-.N. Miallet, A. Tissier, *Analyse à une variable réelle.* Bréal.

[Monier Analyse] J-M. Monier *Analyse MPSI,* Dunod, 2003.

[Monier Exos] J-M. Monier *Analyse, Exercices.* Dunod, 1990.

[Perrin] D. Perrin, *Mathématiques d'école : Nombres, mesures et géométrie.* Cassini.

[Ramis Deschamps Odoux] E. Ramis, C. Dechamps, J. Odoux *Cours de Mathématiques Spéciales,* Masson, 1989

Volume 3, Topologie et Eléments d'Analyse,

Volume 4, Séries et Equations Différentielles,

Volume 5, Applications de l'Analyse à la Géométrie.

[Rouvière] F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.* Cassini.

[Sk] G. Skandalis, *Topologie et analyse.* Dunod.