8 Fonctions de plusieurs variables

Pour ce chapitre, en dehors des livres « généralistes » (*e.g.* [Liret Martinais, Lelong-Ferrand Arnaudiès, Monier Analyse, Ramis Deschamps Odoux] *etc.*), on peut vraiment recommander [Rouvière].

Munissons $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ de normes, notées $\| \ \|$ sans préciser lesquelles : de toute façon elles sont toutes équivalentes !

Les fonctions considérées dans cette section sont définies sur un ouvert de $E = \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $F = \mathbb{R}^p$. Plus généralement, on peut supposer que E et F sont des espaces de Banach.

8.1 Fonctions différentiables

Soit Ω un ouvert de $E = \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to F = \mathbb{R}^p$ une application.

Dérivée selon un vecteur. Soient $a \in \Omega$ et $v \in \mathbb{R}^n$ un vecteur. L'ensemble $U = \{t \in \mathbb{R};\ a+tv \in \Omega\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0. On dit que f est *dérivable en a selon le vecteur v* si l'application $t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0. En particulier, lorsque v est le i-ème vecteur e_i de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on dit que f admet une dérivée partielle qui se note alors $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\cdot$

Développement limité à l'ordre 1. Comment écrire le développement limité à l'ordre 1 de f en un point a de Ω ? On devra écrire $f(a + h) = f(a) + L(h) + \varepsilon(h)$ où $L(h)$ doit être du premier degré donc *une application linéaire* et $\varepsilon(h)$ doit être un o de h, autrement dit $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\|\varepsilon(h)\|}{\|h\|} = 0$.

Remarquons que si f admet un tel développement limité, alors, pour tout $v \in E$, on a $f(a + tv) = f(a) + tL(v) + \varepsilon(tv)$, d'où l'on déduit que $L(v)$ est alors la dérivée de f selon le vecteur v (d'où l'on déduit l'unicité de L).

Définition (Différentiabilité en un point)**.** On dit que f est *différentiable* en a si elle admet un développement limité $f(a + h) = f(a) + L(h) + \varepsilon(h)$ comme ci-dessus. L'application linéaire $L : E \to F$ ainsi définie s'appelle la *différentielle* de f en a et se note $(df)_a$.

Interprétation géométrique (plan tangent à une surface). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application. On considère la surface $\Sigma = \{(x, y, f(x, y));\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Si $(a, b, c) \in \Sigma$ et f est différentiable en (a, b) de différentielle $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, le plan $P = \{(a+h, b+k, c+L(h, k));\ (h, k) \in \mathbb{R}^2\}$ est tangent en (a, b, c) à la surface Σ.

Matrice jacobienne, déterminant jacobien. L'application linéaire $(df)_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est une matrice à p lignes et n colonnes, appelée *matrice jacobienne* : c'est la matrice $J_a = (b_{i,j})$ où $b_{i,j} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$.
Lorsque $n = p$, le déterminant de la matrice jacobienne s'appelle *déterminant jacobien.*

Proposition (Différentielle d'une fonction composée)**.** *Soient $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$ et $G = \mathbb{R}^q$ des espaces de Banach, U un ouvert de E, V un ouvert de F, $f : U \to V$ et $g : V \to G$ des applications. Si f est différentiable en un point $a \in U$ et g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et l'on a $(d(g \circ f))_a = (dg)_{f(a)} \circ (df)_a$.*

Inégalité des accroissements finis. *Soient E et F des espaces de Banach. On note $\| \ \|_E$ et $\| \ \|_F$ leurs normes respectives. Soient Ω un ouvert* convexe *de E et $f : \Omega \to F$ une application différentiable en tout point de Ω. Soit $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in \Omega$, on ait $|||(df)_x||| \leqslant M$. Alors pour tout $x, y \in \Omega$, on a $\|f(x) - f(y)\|_F \leqslant M\|x - y\|_E$.*

La démonstration de l'inégalité des accroissements finis n'est pas au programme ; elle l'est si l'on suppose f de classe C^1.

Corollaire. *Une application différentiable de différentielle nulle définie sur un ouvert connexe d'un espace de Banach à valeurs dans un espace de Banach est constante.*

Une fonction f définie sur un ouvert $\Omega \subset E = \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $F = \mathbb{R}^p$ est dite de classe C^1 si l'application qui à tout point a de Ω fait correspondre la différentielle df_a de f en a est continue (comme application de Ω dans $\mathcal{L}(E,F) = M_{p,n}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{pn}$).

Théorème. *Pour qu'une fonction soit de classe C^1 sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, il faut et il suffit qu'elle admette des dérivées partielles continues sur Ω.*

La composée de deux fonctions de classe C^1 est de classe C^1.

Gradient. Soient E un espace vectoriel *euclidien*, Ω un ouvert de E et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. Pour $a \in \Omega$, l'application $(df)_a$ est une forme linéaire sur E. Il existe un vecteur $(\nabla f)_a$ appelé gradient de f en a tel que, pour $h \in E$ on ait $(df)_a(h) = \langle (\nabla f)_a | h\rangle$. Si $E = \mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique, $(\nabla f)_a$ est le vecteur de composantes $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

8.2 Différentielles d'ordre supérieur

Soit $f : \Omega \to F$ une application de classe C^1. Si sa différentielle qui est application df de Ω dans $\mathcal{L}(E,F)$ est de classe C^1, on dira que f est de classe C^2. Par récurrence, on dit que f est de classe C^k si df est de classe C^{k-1}. Cela revient à dire que toutes les dérivées partielles d'ordre $\leqslant k$ existent et sont continues.

Théorème de Schwarz. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to F$ de classe C^2. Alors pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.*

Soient Ω un ouvert de E et $f : \Omega \to F$ de classe C^2. Pour $a \in \Omega$ l'application l'application $(d^2 f)_a = (d(df))_a$ est une application linéaire de E dans $\mathcal{L}(E,F)$ donc une application bilinéaire de $E \times E$ dans F. Le théorème de Schwarz dit que l'application bilinéaire $(d^2 f)_a$ est symétrique.

Formule de Taylor-Young à l'ordre 2. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to F$ de classe C^2. On a un développement limité pour f au voisinage d'un point $a = (a_1, \ldots, a_n)$ de Ω et $h = (h_1, \ldots, h_n)$ tel que $a + h \in \Omega$,

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + o(\|h\|^2) \\ &= f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n h_i^2 \frac{\partial^2 f}{(\partial x_i)^2}(a) + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + o(\|h\|^2). \end{aligned}$$

Extremums locaux. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie, Ω un ouvert de E, a un point de Ωet $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application.*

a) Si f est différentiable en a et présente un extremum local en a, alors la forme linéaire $(df)_a$ est nulle.

b) Si f est de classe C^2 et présente un minimum (resp. maximum) local en a, la forme bilinéaire symétrique $(d^2 f)(a)$ est positive (resp. négative).

c) Si f est de classe C^2, si $(df)_a = 0$ et si $(d^2 f)_a$ est définie positive (resp. définie négative) alors f présente un minimum (resp. maximum) local en a.

Supposons que $E = \mathbb{R}^2$. Posons $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(a)$ et $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$. Alors $(d^2 f)_a$ est définie positive (*resp.* négative) si et seulement si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ (*resp.* $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$).

8.3 Difféomorphismes

Définition. Soient U un ouvert de E et V un ouvert de F. Un *difféomorphisme* de classe C^k de U sur V est une application bijective $f : U \to V$ telle que f et f^{-1} soient de classe C^k.

Proposition. *On suppose que $f : U \to V$ est un homéomorphisme. Si f est différentiable en a et df_a est un inversible, alors f^{-1} est différentiable en $f(a)$ et $(df^{-1})_{f(a)} = (df)_a^{-1}$. Si de plus f est de classe C^k, f^{-1} est de classe C^k.*

Proposition. *Soient E et F des espaces de Banach. L'ensemble $U = \{T \in \mathcal{L}(E, F);\ T$ homéomorphisme$\}$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E, F)$ et $\varphi : T \mapsto T^{-1}$ y est continue, de classe C^∞. On a $(d\varphi)_T(h) = -T^{-1}hT^{-1}$.*

Théorème d'inversion locale. *Soient E et F des espaces de Banach, U un ouvert de E et $f : U \to F$ de classe C^1. Soit $a \in U$. On suppose que $(df)_a$ est inversible. Il existe un voisinage ouvert U_0 de a tel que la restriction de f à U_0 soit un difféomorphisme de classe C^1 de U_0 sur un ouvert de F.*

D'après la proposition ci-dessus, si f est de plus de classe C^k, il en va de même pour sa réciproque.

Théorème des fonctions implicites. *Soient E, F et G des espaces de Banach U un ouvert de $E \times F$ et $f : U \to G$ une application de classe C^1. Soit $a = (b, c)$ un point de U. On suppose que $f(a) = 0$ et que la différentielle partielle $(d_2 f)_a : F \to G$ est inversible. Alors il existe des ouverts V, W de E et F et une application $g : V \to W$ de classe C^1 tels que $\{b, c\} \in V \times W \subset U$, $g(b) = c$ et, pour $(x, y) \in V \times W$ on ait l'équivalence $f(x, y) = 0 \iff y = g(x)$. On a $(dg)_b = -(d_2 f)_a^{-1}(d_1 f)_a$. Si f est de classe C^k, il en va de même pour g.*

8.4 Exercices

8.1 Exercice. On munit $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ de leur topologie usuelle. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

1. Calculer df.
2. En quels points de $\mathbb{R}^2$ l'application df est-elle nulle ?
3. Pour chacun de ces points déterminer s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum local ou global.

8.2 Exercice. (Point de Fermat) Soient E un espace affine euclidien et $A \in E$. Notons f_A l'application $M \mapsto AM$ qui à $M \in E$ associe sa distance à A.

1. Démontrer que f_A est de classe C^2 dans $E \setminus \{A\}$ et calculer sa différentielle et sa différentielle seconde (*on pourra bien choisir un repère et effectuer un développement limité*).

   Soient A, B, C trois points non-alignés de E. Posons $f = f_A + f_B + f_C$.
2. a) Démontrer que f atteint son minimum en un point au moins.
   b) Établir que la fonction f est strictement convexe sur E.
   c) En déduire que f possède un unique minimum situé dans le plan affine contenant le triangle ABC.

3. Supposons que f atteigne son minimum en un point F de $E \setminus \{A, B, C\}$.
   a) Établir que ce point satisfait à l'équation suivante : $\overrightarrow{FA}/FA + \overrightarrow{FB}/FB + \overrightarrow{FC}/FC = \overrightarrow{0}$.
   b) Dans le cas précédent, démontrer que les trois angles sous les quels le point F voit les côtés du triangle sont égaux à $2\pi/3$. (On dit pour cela que F est le *centre optique* du triangle ABC.
   c) Dans quels cas est-ce-que F coïncide avec le centre de gravité G ?
   d) Le triangle ABC est bordé extérieurement par trois triangles équilatéraux BCA', CAB' et ABC'. Démontrer que F est situé sur les cercles circonscrits de ces trois triangles.
   e) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{A'FB}$ et en déduire que A, F, A' sont alignés. En déduire que les droites AA', BB' et CC' sont concurrentes en F.
4. On suppose que l'un des angles du triangle ABC est supérieur ou égal à $2\pi/3$. démontrer que le minimum de f est atteint en l'un des sommets. Lequel ?
5. On suppose qu'aucun des angles du triangle ABC n'est supérieur ou égal à $2\pi/3$. Démontrer qu'il existe un centre optique F de ABC et que ce point est l'unique minimum de f sur $\mathbb{R}^2$.

8.3 Exercice. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, posons $F(x, y) = x - y + \sin xy$.

1. Démontrer qu'il existe un intervalle ouvert I contenant 0 et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tels que $f(0) = 0$ et, pour tout $x \in I$ on ait $F(x, f(x)) = 0$.
2. Calculer $f'(0)$.
3. Démontrer que f admet en 0 un développement limité à l'ordre 2 et calculer ce développement.

8.4 Exercice. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on pose $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$ et $g(x, y, z) = x^2 - 3xy + 2z^2$. Considérons l'application $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$F(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z)).$$

1. Calculer dF.
2. Démontrer que la matrice
$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) & \dfrac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) \\ \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(1,1,1) & \dfrac{\partial g}{\partial z}(1,1,1) \end{pmatrix}$$
   est inversible.
3. Démontrer qu'il existe un intervalle J centré en 1 et des applications $\varphi : J \to \mathbb{R}$ et $\psi : J \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $\varphi(1) = \psi(1) = 1$ et pour tout $x \in J$ on a $F(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0$.
4. Calculer les $\varphi'(1)$ et $\psi'(1)$.

8.5 Exercice. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Soit $(x_0, y_0) \in U$ tel que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Posons $z_0 = f(x_0, y_0)$.

1. Démontrer qu'il existe un voisinage ouvert V de (x_0, z_0) et une application F de classe C^1 tels que, pour tout $(x, z) \in V$ on ait
$$\Big(x, F(x, z)\Big) \in U \quad \text{et} \quad f\Big(x, F(x, z)\Big) = z\,.$$
   Indication. On pourra considérer l'application $\varphi : (x, y) \mapsto (x, f(x, y))$.
2. Soit $(x, z) \in V$. Posons $y = F(x, z)$. Calculer $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, z)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x, z)$ en fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

8.6 Exercice. Notons E l'espace vectoriel réel des matrices 2×2 (à coefficients réels) et $f : E \to E$ l'application $A \mapsto A^2$.

1. Démontrer que l'application f est différentiable et déterminer sa différentielle df.
2. Notons $I \in E$ la matrice identité. Démontrer qu'il existe des voisinages ouverts U et V de I tels que f induise un difféomorphisme de U sur V.

8.7 Exercice. Soient E un espace de Banach et $f : E \to E$ de classe C^1. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$, avec $k < 1$ tel que pour tout $x \in E$, on a $|||df_x||| \leqslant k$. On pose $F(x) = x - f(x)$.

1. Démontrer que l'application f est lipschitzienne.
2. a) Soit $a \in E$. Démontrer que l'équation $x = f(x) + a$ admet une et une seule solution dans E.
   b) Démontrer que l'application F est bijective.
3. Démontrer que F est un difféomorphisme de classe C^1 de E sur E.

8.8 Exercice. On note $\| \ \|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. On suppose qu'il existe une norme N sur $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on ait $N\big(F(x) - F(y)\big) \geqslant N(x - y)$.

1. Démontrer que F est injective.
2. Soit $a \in \mathbb{R}^n$.
   a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Démontrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}\Big(F(a + tx) - F(a)\Big)$ admet une limite lorsque $t \to 0$. En déduire que $N\Big((dF)_a(x)\Big) \geqslant N(x)$.
   b) Montrer que $(dF)_a$ est bijective.
   c) Soient $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application différentiable et $a \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $(d(Q \circ F))_a = 0$. Démontrer que $(dQ)_{F(a)} = 0$.
   d) Démontrer qu'il existe un voisinage ouvert U de a et un voisinage ouvert V de $F(a)$ tels que la restriction de F soit un difféomorphisme de U sur V.
3. Démontrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on ait $\big\|F(x) - F(y)\big\| \geqslant k\|x - y\|$.
4. Soit $b \in \mathbb{R}^n$. Pour $u, x \in \mathbb{R}^n$, posons $Q(u) = \|u - b\|^2$ et $\varphi(x) = Q \circ F(x) = \big\|F(x) - b\big\|^2$.
   a) Démontrer que Q est différentiable et donner une expression de dQ.
   b) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\|F(x) - b\| + \|b - F(0)\| \geqslant k\|x\|$. En déduire qu'il existe $R \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'on ait $\|x\| > R \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(0)$.
   c) Notons B la boule fermée de $\mathbb{R}^n$ de centre 0 et de rayon R. Démontrer que l'on a $\inf\{\varphi(z);\ z \in \mathbb{R}^n\} = \inf\{\varphi(z);\ z \in B\}$ et que cet « inf » est atteint en un point a de B.
   d) Démontrer que $F(a) = b$.
5. Démontrer que F est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.
6. On se propose de donner une autre démonstration de la surjectivité de F.
   a) Déduire de la question 2.d) que $F(\mathbb{R}^n)$ est ouvert dans $\mathbb{R}^n$.
   b) Soit (x_n) une suite de points de $\mathbb{R}^n$ tels que la suite $\big(F(x_n)\big)$ soit convergente. Démontrer que la suite (x_n) est de Cauchy.
   c) Démontrer que $F(\mathbb{R}^n)$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$.
   d) En déduire que F est surjective.

8.5 Solutions

Exercice 8.1.

1. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x$.
2. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ si et seulement si $x^2 = y$ et $y^2 = x$. Deux solutions possibles $(0,0)$ et $(1,1)$.
3. On a $r = \dfrac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(0,0) = 0 = \dfrac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(0,0) = t$ et $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -3$, donc on n'a pas d'extremum local en $(0,0)$.
   On a $r = \dfrac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(1,1) = 6 = \dfrac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(1,1) = t$ et $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = -3$. Il vient $rt - s^2 = 27 > 0$, donc on a un extremum local en $(1,1)$ qui est un minimum local puisque $r \geqslant 0$. Ce n'est pas un minimum global puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x,0) = -\infty$.

Exercice 8.2.

1. On choisit un repère orthonormé, dont on peut fixer l'origine en A, de sorte que $f_A(M) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

   La fonction $M \mapsto AM^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ est polynomiale, donc de classe C^∞ ; elle est positive et ne s'annule qu'en A ; la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$; donc f_A est de classe C^∞ sur $E \setminus \{A\}$.

   Soit $M_0 \in E$ distinct de A. Notons $\vec{u}_0$ le vecteur $\overrightarrow{AM_0}/AM_0$. Soit $\vec{w}$ un « petit » vecteur et effectuons un développement limité à l'ordre 2 de $f_A(M_0 + \vec{w})$. Pour cela, on écrit $\vec{w} = t\vec{u}_0 + \vec{v}$ avec $t = \vec{w}.\vec{u}_0$ et $\vec{v} = \vec{w} - (\vec{w}.\vec{u}_0)\,\vec{u}_0$ orthogonal à $\vec{u}_0$. Pour $|t| < AM_0$, on a

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(AM_0 + t)^2 + \|\vec{v}\|^2} \\ &= (AM_0 + t)\sqrt{1 + \frac{\|\vec{v}\|^2}{(AM_0 + t)^2}} \\ &= AM_0 + t + \frac{\|\vec{v}\|^2}{2\,AM_0} + o(\|\vec{w}\|^2). \end{aligned}$$

   On en déduit que $df_A(\vec{w}) = t = \vec{w}.\vec{u}_0$ et $d^2 f_A(\vec{w}, \vec{w}) = \dfrac{\|\vec{v}\|^2}{AM_0} = \dfrac{\vec{w}.\vec{w} - t^2}{AM_0}$, donc,

$$d^2 f_A(\vec{w}_1, \vec{w}_2) = \frac{\vec{w}_1.\vec{w}_2 - (\vec{w}_1.\vec{u}_0)(\vec{w}_2.\vec{u}_0)}{AM_0}.$$

2. a) Notons $\mathcal{B} = \{M \in E;\ AM \leqslant f(A)\}$ la boule fermée de centre A et de rayon $f(A)$. C'est une partie compacte non vide de E : puisque f est continue, il existe $F \in \mathcal{B}$ tel que $f(F) \leqslant f(M)$ pour tout $M \in \mathcal{B}$. Si $M \notin \mathcal{B}$, on a $f(M) \geqslant AM > f(A) \geqslant f(F)$. On en déduit que $f(F) = \inf\{f(M);\ M \in E\}$.

   b) Soient M, N deux points distincts de E et $t \in \,]0,1[$. Posons $P = tM + (1-T)N$. On a donc $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AM} + (1-t)\overrightarrow{AN}$, donc $f_A(P) \leqslant t f_A(M) + (1-t) f_A(N)$, l'inégalité étant stricte si A, M et N ne sont pas alignés. De même, $f_B(P) \leqslant t f_B(M) + (1-t) f_B(N)$ et $f_C(P) \leqslant t f_C(M) + (1-t) f_C(N)$ et l'une au moins de ces inégalités n'est pas stricte puisque A, B et C n'étant pas alignés, ils ne peuvent être tous trois dans la droite (MN).

c) Soient F, G deux points distincts de E et notons H leur milieu. Si $f(F) = f(G)$, alors $f(H) < f(G)$ par stricte convexité, donc f ne peut pas réaliser son minimum en deux points distincts. De plus, soit $M \in E$ et notons N sont projeté orthogonal dans le plan (ABC). On a $AM^2 = AN^2 + MN^2$, donc $f_A(N) \leqslant f_A(M)$ avec égalité si $M = N$ - et il en va de même pour f_B et f_C. On en déduit que le maximum de f ne peut être atteint en dehors du plan (ABC).

3. a) Puisque f atteint son minimum en F, le gradient de la fonction f est nul en F, autrement dit $\overrightarrow{AF}/AF + \overrightarrow{BF}/BF + \overrightarrow{CF}/CF = \overrightarrow{0}$.

   b) En effet, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs d'un espace Euclidien satisfaisant $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{u}+\vec{v}\| = 1$, il vient $\vec{u}.\vec{v} = -\dfrac{1}{2}$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment un angle de $2\pi/3$.

   c) Si $F = G$, alors les coordonnées barycentriques de F dans le repère A, B, C sont $(1, 1, 1)$ mais aussi (AF, BF, CF). Par unicité, il vient $AF = BF = CF$, donc le triangle ABC est invariant par la rotations d'angle $2\pi/3$ de centre F : il est équilatéral.

   d) Puisque $\widehat{BA'C}$ est un angle de mesure $\pi/3$, les points du cercle circonscrit situés sur l'arc de cercle entre B et C et ne contenant pas A' sont les points M du demi-plan (ABC) bordé par la droite (BC) et contenant A tels que $\widehat{BMC}$ soit un angle de mesure $2\pi/3$. On en déduit que F est bien dans cet arc de cercle - et de même pour les deux autres cercles circonscrits.

   e) Par cocyclicité, on a $\widehat{A'FC} = \widehat{A'BC} = \pi/3$. On en déduit que A' est situé sur la demi-droite issue de F opposée à A.

4. Supposons par exemple que l'angle en A soit $\geqslant 2\pi/3$. On a vu que lorsque F n'est pas un des points A, B ou C, il est situé à l'intérieur du triangle A, B, C (ses coordonnées barycentriques dans le repère A, B, C sont strictement positives) et aussi $\widehat{BFC} = 2\pi/3$. Impossible. Donc F est le point parmi A, B et C en lequel la fonction f est la plus petite. C'est évidemment le point A (puisque BC est le côté le plus long du triangle).

5. Dans ce cas, le gradient en A de $f_B + f_C$ est le vecteur $\vec{w} = \dfrac{\overrightarrow{BA}}{BA} + \dfrac{\overrightarrow{CA}}{CA}$ de norme > 1. On a $f_A(A - t\vec{w}) = |t|\|\vec{w}\|$, donc la dérivée à droite en 0 de $t \mapsto f(A - t\vec{w})$ est $\|\vec{w}\| - \|\vec{w}\|^2$; elle est négative et donc f n'atteint pas son minimum en A.

Exercice 8.3.

1. On a $F(0, 0) = 0$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = -1$, donc on peut appliquer le théorème des fonctions implicites et écrire localement $F(x, y) = 0 \iff y = f(x)$: il existe des intervalles ouverts I, J et une application $f : I \to J$ de classe C^∞ tels que $0 \in I \cap J$ et, pour $(s, t) \in I \times J$ on ait l'équivalence $F(s, t) = 0 \iff t = f(s)$.
2. Pour $x \in I$, on a $F(x, f(x)) = 0$, soit $f(x) = x + \sin x f(x)$. On a $\sin x f(x) \sim_0 x f(x) = o(x)$ puisque f est continue en 0 et $f(0) = 0$. Il vient $f'(0) = 1$.
3. Il vient $f(x) = x + x f(x) + o(x f(x)) = x + x^2 + o(x^2)$ (puisque $f(x) \sim_0 x$).

Exercice 8.4.

1. La matrice Jacobienne de f, *i.e.* la matrice de df dans les bases canoniques est
$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x - 3y & -3x & 4z \end{pmatrix}.$$
2. On a $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) & \dfrac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(1,1,1) & \dfrac{\partial g}{\partial z}(1,1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ qui est inversible.

3. Il s'agit encore d'une application directe du théorème des fonctions implicites.
4. D'après le théorème des fonctions implicites, on a $\begin{pmatrix}\varphi'(1)\\ \psi'(1)\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}2 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5/7\\ 2/7\end{pmatrix}$.

Exercice 8.5.

1. On applique le théorème d'inversion locale à $\varphi : (x, y) \mapsto (x, f(x, y))$: la matrice jacobienne de φ en (x, y) est $\begin{pmatrix}1 & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\\ 0 & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}$ qui est inversible pour $(x, y) = (x_0, y_0)$. Notons $\psi : V' \to U'$ la réciproque de φ définie sur un voisinage de (x_0, z_0). Pour $(u, y) \in U'$ et $(x, z) \in V'$, on a
$$(u, y) = \psi(x, z) \iff (x, z) = \varphi(u, y) \iff x = u \text{ et } z = f(x, y)$$
donc $\psi(x, z)$ est de la forme $(x, F(x, z))$.
2. On a $\psi(x, z) = (x, y)$ et $d\psi_{(x,z)} = d\varphi^{-1}_{x,y}$. Il vient donc $\begin{pmatrix}1 & \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,z)\\ 0 & \dfrac{\partial F}{\partial z}(x,z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\\ 0 & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}^{-1}$; il vient $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x, z) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)^{-1}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, z) = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)^{-1}$.

Exercice 8.6.

1. On a $f(A + H) = f(A) + AH + HA + H^2 = f(A) + AH + HA + o(\|H\|)$. On en déduit que f est différentiable en A et que $df_A(H) = AH + HA$.
2. L'application $A \mapsto df_A$ est linéaire, donc continue. On a $df_I(H) = 2H$, donc df_I est l'homothétie de rapport 2 : elle est bijective, et l'on peut appliquer le théorème d'inversion locale.

Exercice 8.7.

1. Puisque f est définie sur tout E (qui est convexe), il résulte immédiatement du théorème des accroissements finis que f est k-lipschitzienne.
2. a) L'application $x \mapsto f(x) + a$ est contractante ; puisque E est complet, elle admet un unique point fixe.
   b) D'après la question précédente, tout $a \in E$ admet un unique antécédent par F.
3. Soit $x \in E$. Puisque $|||df_x||| \leqslant k$, l'application linéaire $dF_x = \mathrm{Id}_E - df_x$ est inversible d'inverse $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(df_x)^n$. D'après le théorème d'inversion locale, F induit un difféomorphisme de classe C^1 entre un voisinage U de x et un voisinage V de $F(x)$; on en déduit que F^{-1} est de classe C^1 sur V. Cela étant vrai pour tout x, F est un difféomorphisme de classe C^1.

Exercice 8.8.

1. Si $F(x) = F(y)$, il vient $N(x - y) \leqslant N(Fx) - F(y)) = 0$, donc $x = y$.
2. a) On a $F(a+tx) = F(a)+tdF_a(x)+R_a(tx)$ où R_a est un reste et vérifie donc $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{N(R_a(z))}{N(z)} = 0$. On en déduit que $\dfrac{1}{t}\Big(F(a + tx) - F(a)\Big) = (dF_a)(x)$. Comme pour tout $t \neq 0$, on a $N\Big(\dfrac{1}{t}\Big(F(a+tx) - F(a)\Big)\Big) \geqslant N(x)$ il vient à la limite $N(dF_a(x)) \geqslant N(x)$ (par continuité de N).

b) On déduit de (a) que l'endomorphisme $(dF)_a$ est injectif, donc bijectif puisque on est en dimension finie

c) On a $(d(Q \circ F))_a = (dQ)_{F(a)} \circ dF_a$. Puisque $(dF)_a$ est bijective, si $(d(Q \circ F))_a = 0$, alors $(dQ)_{F(a)} = (d(Q \circ F))_a \circ ((dF)_a)^{-1} = 0$.

d) Cela résulte immédiatement du théorème d'inversion locale puisque $(dF)_a$ est bijective. Notons que $((dF)_a)^{-1}$ est continue puisque on est en dimension finie.

3. Les normes N et $\| \ \|$ étant équivalentes, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on ait $\alpha\|x\| \leqslant N(x) \leqslant \beta\|x\|$ et $\|x\| \leqslant \beta N(x)$. On en déduit que, pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\alpha\|x - y\| \leqslant N(x - y) \leqslant N(F(x) - F(y)) \leqslant \beta\|x - y\|.$$

On peut prendre $k = \dfrac{\alpha}{\beta}\cdot$

4. a) Pour $c, h \in \mathbb{R}^n$, on a $Q(c + h) = Q(c) + 2\langle c - b|h\rangle + \|h\|^2$. Comme $\|h\|^2 = o(\|h\|)$, on en déduit que Q est différentiable en c et $(dQ)_c(h) = 2\langle c - b|h\rangle$.

b) On a $\|F(x) - b\| + \|b - F(0)\| \geqslant \|F(x) - F(0)\| \geqslant k\|x\|$. Donc, si $k\|x\| > 2\|b - F(0)\|$, on a $\|F(x) - b\| \geqslant k\|x\| - \|b - F(0)\| > \|b - F(0)\|$, donc $\varphi(x) = \|F(x) - b\|^2 > \varphi(0)$. Il suffit de poser $R = \dfrac{2\|b - F(0)\|}{k}\cdot$

c) Comme B est compacte, la fonction continue φ y atteint son minimum en un point a. Pour $z \in \mathbb{R}^n$, on a alors

- si $z \in B$ alors $\varphi(z) \geqslant \varphi(a)$ par définition de a
- si $z \notin B$ alors $\varphi(z) > \varphi(0) \geqslant \varphi(a)$ (puisque $0 \in B$).

d) La fonction $\varphi = Q \circ F$ atteint un minimum en a, donc $(d(Q \circ F))_a = 0$; par 2.c), il vient $(dQ)_{F(a)} = 0$; en particulier $2\|F(a) - b\|^2 = (dQ)_{F(a)}(F(a) - b) = 0$ (d'après 4.a), donc $F(a) = b$.

5. On a démontré que F est bijective. Par ailleurs, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, F induit un difféomorphisme de classe C^1 d'un voisinage ouvert U de a sur un voisinage ouvert V de $F(a)$, donc F^{-1} est de classe C^1 sur V. Cela étant vrai pour tout a, F est un difféomorphisme de classe C^1.

6. a) Il résulte de 2.d), que pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, $F(\mathbb{R}^n)$ est un voisinage de $F(a)$, donc $F(\mathbb{R}^n)$ est ouvert. De plus, comme en 5, F est un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ sur $F(\mathbb{R}^n)$.

b) Puisque $(F(x_n))$ est convergente, elle est de Cauchy ; comme $N(x_m - x_n) \leqslant N(F(x_m) - F(x_n))$, on en déduit que (x_n) est aussi de Cauchy.

c) Soit $y \in \overline{F(\mathbb{R}^n)}$. Il existe une suite $(y_n) = (F(x_n))$ convergeant vers y. Par (a), la suite (x_n) est de Cauchy, donc converge vers un point $x \in E$; on a alors $F(x) = y$ puisque F est continue, donc $F(\mathbb{R}^n)$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$).

d) On a vu que l'ensemble $F(\mathbb{R}^n)$ est ouvert et fermé dans l'espace connexe $\mathbb{R}^n$; il n'est pas vide, donc $F(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. On en déduit que F est surjective (c'est donc un difféomorphisme de classe C^1).