

8 Fonctions de plusieurs variables

Pour ce chapitre, en dehors des livres « généralistes » (e.g. [Liret Martinais, Lelong-Ferrand Arnaudès, Monier Analyse, Ramis Deschamps Odoux] etc.), on peut vraiment recommander [Rouvière].

Munissons \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^p de normes, notées $\| \cdot \|$ sans préciser lesquelles : de toute façon elles sont toutes équivalentes !

Les fonctions considérées dans cette section sont définies sur un ouvert de $E = \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $F = \mathbb{R}^p$. Plus généralement, on peut supposer que E et F sont des espaces de Banach.

8.1 Fonctions différentiables

Soit Ω un ouvert de $E = \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \rightarrow F = \mathbb{R}^p$ une application.

Dérivée selon un vecteur. Soient $a \in \Omega$ et $v \in \mathbb{R}^n$ un vecteur. L'ensemble $U = \{t \in \mathbb{R}; a + tv \in \Omega\}$ est un ouvert de \mathbb{R} contenant 0. On dit que f est *dérivable en a selon le vecteur v* si l'application $t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0. En particulier, lorsque v est le i -ème vecteur e_i de la base canonique de \mathbb{R}^n , on dit que f admet une dérivée partielle qui se note alors $\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Développement limité à l'ordre 1. Comment écrire le développement limité à l'ordre 1 de f en un point a de Ω ? On devra écrire $f(a + h) = f(a) + L(h) + \varepsilon(h)$ où $L(h)$ doit être du premier degré donc *une application linéaire* et $\varepsilon(h)$ doit être un o de h , autrement dit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\varepsilon(h)\|}{\|h\|} = 0$.

Remarquons que si f admet un tel développement limité, alors, pour tout $v \in E$, on a $f(a + tv) = f(a) + tL(v) + \varepsilon(tv)$, d'où l'on déduit que $L(v)$ est alors la dérivée de f selon le vecteur v (d'où l'on déduit l'unicité de L).

Définition (Différentiabilité en un point). On dit que f est *différentiable* en a si elle admet un développement limité $f(a + h) = f(a) + L(h) + \varepsilon(h)$ comme ci-dessus. L'application linéaire $L : E \rightarrow F$ ainsi définie s'appelle la *différentielle* de f en a et se note $(df)_a$.

Interprétation géométrique (plan tangent à une surface). Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On considère la surface $\Sigma = \{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Si $(a, b, c) \in \Sigma$ et f est différentiable en (a, b) de différentielle $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, le plan $P = \{(a + h, b + k, c + L(h, k)); (h, k) \in \mathbb{R}^2\}$ est tangent en (a, b, c) à la surface Σ .

Matrice jacobienne, déterminant jacobien. L'application linéaire $(df)_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est une matrice à p lignes et n colonnes, appelée *matrice jacobienne* : c'est la matrice $J_a = (b_{i,j})$ où $b_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$. Lorsque $n = p$, le déterminant de la matrice jacobienne s'appelle *déterminant jacobien*.

Proposition (Différentielle d'une fonction composée). Soient $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$ et $G = \mathbb{R}^q$ des espaces de Banach, U un ouvert de E , V un ouvert de F , $f : U \rightarrow V$ et $g : V \rightarrow G$ des applications. Si f est différentiable en un point $a \in U$ et g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et l'on a $(d(g \circ f))_a = (dg)_{f(a)} \circ (df)_a$.

Inégalité des accroissements finis. Soient E et F des espaces de Banach. On note $\| \cdot \|_E$ et $\| \cdot \|_F$ leurs normes respectives. Soient Ω un ouvert convexe de E et $f : \Omega \rightarrow F$ une application différentiable en tout point de Ω . Soit $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in \Omega$, on ait $\| (df)_x \| \leq M$. Alors pour tout $x, y \in \Omega$, on a $\|f(x) - f(y)\|_F \leq M \|x - y\|_E$.

La démonstration de l'inégalité des accroissements finis n'est pas au programme ; elle l'est si l'on suppose f de classe C^1 .

Corollaire. Une application différentiable de différentielle nulle définie sur un ouvert connexe d'un espace de Banach à valeurs dans un espace de Banach est constante.

Une fonction f définie sur un ouvert $\Omega \subset E = \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $F = \mathbb{R}^p$ est dite de classe C^1 si l'application qui à tout point a de Ω fait correspondre la différentielle df_a de f en a est continue (comme application de Ω dans $\mathcal{L}(E, F) = M_{p,n}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{pn}$).

Théorème. Pour qu'une fonction soit de classe C^1 sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, il faut et il suffit qu'elle admette des dérivées partielles continues sur Ω .

La composée de deux fonctions de classe C^1 est de classe C^1 .

Gradient. Soient E un espace vectoriel euclidien, Ω un ouvert de E et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 . Pour $a \in \Omega$, l'application $(df)_a$ est une forme linéaire sur E . Il existe un vecteur $(\nabla f)_a$ appelé gradient de f en a tel que, pour $h \in E$ on ait $(df)_a(h) = \langle (\nabla f)_a | h \rangle$. Si $E = \mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique, $(\nabla f)_a$ est le vecteur de composantes $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

8.2 Différentielles d'ordre supérieur

Soit $f : \Omega \rightarrow F$ une application de classe C^1 . Si sa différentielle qui est application df de Ω dans $\mathcal{L}(E, F)$ est de classe C^1 , on dira que f est de classe C^2 . Par récurrence, on dit que f est de classe C^k si df est de classe C^{k-1} . Cela revient à dire que toutes les dérivées partielles d'ordre $\leq k$ existent et sont continues.

Théorème de Schwarz. Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : \Omega \rightarrow F$ de classe C^2 . Alors pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

Soient Ω un ouvert de E et $f : \Omega \rightarrow F$ de classe C^2 . Pour $a \in \Omega$ l'application l'application $(d^2 f)_a = (d(df))_a$ est une application linéaire de E dans $\mathcal{L}(E, F)$ donc une application bilinéaire de $E \times E$ dans F . Le théorème de Schwarz dit que l'application bilinéaire $(d^2 f)_a$ est symétrique.

Formule de Taylor-Young à l'ordre 2. Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : \Omega \rightarrow F$ de classe C^2 . On a un développement limité pour f au voisinage d'un point $a = (a_1, \dots, a_n)$ de Ω et $h = (h_1, \dots, h_n)$ tel que $a + h \in \Omega$,

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + o(\|h\|^2) \\ &= f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n h_i^2 \frac{\partial^2 f}{(\partial x_i)^2}(a) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + o(\|h\|^2). \end{aligned}$$

Extremums locaux. Soient E un espace vectoriel de dimension finie, Ω un ouvert de E , a un point de Ω et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

- a) Si f est différentiable en a et présente un extremum local en a , alors la forme linéaire $(df)_a$ est nulle.
- b) Si f est de classe C^2 et présente un minimum (resp. maximum) local en a , la forme bilinéaire symétrique $(d^2 f)_a$ est positive (resp. négative).
- c) Si f est de classe C^2 , si $(df)_a = 0$ et si $(d^2 f)_a$ est définie positive (resp. définie négative) alors f présente un minimum (resp. maximum) local en a .

Supposons que $E = \mathbb{R}^2$. Posons $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$ et $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$. Alors $(d^2 f)_a$ est définie positive (*resp.* négative) si et seulement si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ (*resp.* $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$).

8.3 Difféomorphismes

Définition. Soient U un ouvert de E et V un ouvert de F . Un *difféomorphisme* de classe C^k de U sur V est une application bijective $f : U \rightarrow V$ telle que f et f^{-1} soient de classe C^k .

Proposition. On suppose que $f : U \rightarrow V$ est un homéomorphisme. Si f est différentiable en a et df_a est un inversible, alors f^{-1} est différentiable en $f(a)$ et $(df^{-1})_{f(a)} = (df_a)^{-1}$. Si de plus f est de classe C^k , f^{-1} est de classe C^k .

Proposition. Soient E et F des espaces de Banach. L'ensemble $U = \{T \in \mathcal{L}(E, F); T \text{ homéomorphisme}\}$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E, F)$ et $\varphi : T \mapsto T^{-1}$ est continue, de classe C^∞ . On a $(d\varphi)_T(h) = -T^{-1}hT^{-1}$.

Théorème d'inversion locale. Soient E et F des espaces de Banach, U un ouvert de E et $f : U \rightarrow F$ de classe C^1 . Soit $a \in U$. On suppose que $(df)_a$ est inversible. Il existe un voisinage ouvert U_0 de a tel que la restriction de f à U_0 soit un difféomorphisme de classe C^1 de U_0 sur un ouvert de F .

D'après la proposition ci-dessus, si f est de plus de classe C^k , il en va de même pour sa réciproque.

Théorème des fonctions implicites. Soient E, F et G des espaces de Banach U un ouvert de $E \times F$ et $f : U \rightarrow G$ une application de classe C^1 . Soit $a = (b, c)$ un point de U . On suppose que $f(a) = 0$ et que la différentielle partielle $(d_2 f)_a : F \rightarrow G$ est inversible. Alors il existe des ouverts V, W de E et F et une application $g : V \rightarrow W$ de classe C^1 tels que $\{b, c\} \in V \times W \subset U$, $g(b) = c$ et, pour $(x, y) \in V \times W$ on ait l'équivalence $f(x, y) = 0 \iff y = g(x)$. On a $(dg)_b = -(d_2 f)_a^{-1}(d_1 f)_a$. Si f est de classe C^k , il en va de même pour g .

8.4 Exercices

8.1 Exercice. On munit \mathbb{R}^2 et \mathbb{R} de leur topologie usuelle. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

1. Calculer df .
2. En quels points de \mathbb{R}^2 l'application df est-elle nulle ?
3. Pour chacun de ces points déterminer s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum local ou global.

8.2 Exercice. (Point de Fermat) Soient E un espace affine euclidien et $A \in E$. Notons f_A l'application $M \mapsto AM$ qui à $M \in E$ associe sa distance à A .

1. Démontrer que f_A est de classe C^2 dans $E \setminus \{A\}$ et calculer sa différentielle et sa différentielle seconde (*on pourra bien choisir un repère et effectuer un développement limité*).

Soient A, B, C trois points non-alignés de E . Posons $f = f_A + f_B + f_C$.

2.
 - a) Démontrer que f atteint son minimum en un point au moins.
 - b) Établir que la fonction f est strictement convexe sur E .
 - c) En déduire que f possède un unique minimum situé dans le plan affine contenant le triangle ABC .

3. Supposons que f atteigne son minimum en un point F de $E \setminus \{A, B, C\}$.
 - a) Établir que ce point satisfait à l'équation suivante : $\overrightarrow{FA}/FA + \overrightarrow{FB}/FB + \overrightarrow{FC}/FC = \vec{0}$.
 - b) Dans le cas précédent, démontrer que les trois angles sous les quels le point F voit les côtés du triangle sont égaux à $2\pi/3$. (On dit pour cela que F est le *centre optique* du triangle ABC .)
 - c) Dans quels cas est-ce que F coïncide avec le centre de gravité G ?
 - d) Le triangle ABC est bordé extérieurement par trois triangles équilatéraux BCA' , CAB' et ABC' . Démontrer que F est situé sur les cercles circonscrits de ces trois triangles.
 - e) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{A'FB}$ et en déduire que A, F, A' sont alignés. En déduire que les droites AA' , BB' et CC' sont concurrentes en F .
4. On suppose que l'un des angles du triangle ABC est supérieur ou égal à $2\pi/3$. démontrer que le minimum de f est atteint en l'un des sommets. Lequel?
5. On suppose qu'aucun des angles du triangle ABC n'est supérieur ou égal à $2\pi/3$. Démontrer qu'il existe un centre optique F de ABC et que ce point est l'unique minimum de f sur \mathbb{R}^2 .

8.3 Exercice. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, posons $F(x, y) = x - y + \sin xy$.

1. Démontrer qu'il existe un intervalle ouvert I contenant 0 et une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tels que $f(0) = 0$ et, pour tout $x \in I$ on ait $F(x, f(x)) = 0$.
2. Calculer $f'(0)$.
3. Démontrer que f admet en 0 un développement limité à l'ordre 2 et calculer ce développement.

8.4 Exercice. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on pose $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$ et $g(x, y, z) = x^2 - 3xy + 2z^2$. Considérons l'application $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$F(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z)).$$

1. Calculer dF .
2. Démontrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 1) & \frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(1, 1, 1) & \frac{\partial g}{\partial z}(1, 1, 1) \end{pmatrix}$$

est inversible.

3. Démontrer qu'il existe un intervalle J centré en 1 et des applications $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ et $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $\varphi(1) = \psi(1) = 1$ et pour tout $x \in J$ on a $F(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0$.
4. Calculer les $\varphi'(1)$ et $\psi'(1)$.

8.5 Exercice. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Soit $(x_0, y_0) \in U$ tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Posons $z_0 = f(x_0, y_0)$.

1. Démontrer qu'il existe un voisinage ouvert V de (x_0, z_0) et une application F de classe C^1 tels que, pour tout $(x, z) \in V$ on ait

$$(x, F(x, z)) \in U \quad \text{et} \quad f(x, F(x, z)) = z.$$

Indication. On pourra considérer l'application $\varphi : (x, y) \mapsto (x, f(x, y))$.

2. Soit $(x, z) \in V$. Posons $y = F(x, z)$. Calculer $\frac{\partial F}{\partial x}(x, z)$ et $\frac{\partial F}{\partial z}(x, z)$ en fonction $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

8.6 Exercice. Notons E l'espace vectoriel réel des matrices 2×2 (à coefficients réels) et $f : E \rightarrow E$ l'application $A \mapsto A^2$.

1. Démontrer que l'application f est différentiable et déterminer sa différentielle df .
2. Notons $I \in E$ la matrice identité. Démontrer qu'il existe des voisinages ouverts U et V de I tels que f induise un difféomorphisme de U sur V .

8.7 Exercice. Soient E un espace de Banach et $f : E \rightarrow E$ de classe C^1 . On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$, avec $k < 1$ tel que pour tout $x \in E$, on a $\|df_x\| \leq k$. On pose $F(x) = x - f(x)$.

1. Démontrer que l'application f est lipschitzienne.
2. a) Soit $a \in E$. Démontrer que l'équation $x = f(x) + a$ admet une et une seule solution dans E .
b) Démontrer que l'application F est bijective.
3. Démontrer que F est un difféomorphisme de classe C^1 de E sur E .

8.8 Exercice. On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne de \mathbb{R}^n . Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 . On suppose qu'il existe une norme N sur \mathbb{R}^n telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on ait $N(F(x) - F(y)) \geq N(x - y)$.

1. Démontrer que F est injective.
2. Soit $a \in \mathbb{R}^n$.
 - a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Démontrer que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}(F(a + tx) - F(a))$ admet une limite lorsque $t \rightarrow 0$. En déduire que $N((dF)_a(x)) \geq N(x)$.
 - b) Montrer que $(dF)_a$ est bijective.
 - c) Soient $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable et $a \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $(d(Q \circ F))_a = 0$. Démontrer que $(dQ)_{F(a)} = 0$.
 - d) Démontrer qu'il existe un voisinage ouvert U de a et un voisinage ouvert V de $F(a)$ tels que la restriction de F soit un difféomorphisme de U sur V .
3. Démontrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on ait $\|F(x) - F(y)\| \geq k\|x - y\|$.
4. Soit $b \in \mathbb{R}^n$. Pour $u, x \in \mathbb{R}^n$, posons $Q(u) = \|u - b\|^2$ et $\varphi(x) = Q \circ F(x) = \|F(x) - b\|^2$.
 - a) Démontrer que Q est différentiable et donner une expression de dQ .
 - b) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\|F(x) - b\| + \|b - F(0)\| \geq k\|x\|$. En déduire qu'il existe $R \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'on ait $\|x\| > R \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(0)$.
 - c) Notons B la boule fermée de \mathbb{R}^n de centre 0 et de rayon R . Démontrer que l'on a $\inf\{\varphi(z); z \in \mathbb{R}^n\} = \inf\{\varphi(z); z \in B\}$ et que cet « inf » est atteint en un point a de B .
 - d) Démontrer que $F(a) = b$.
5. Démontrer que F est un difféomorphisme de \mathbb{R}^n sur \mathbb{R}^n .
6. On se propose de donner une autre démonstration de la surjectivité de F .
 - a) Déduire de la question 2.d) que $F(\mathbb{R}^n)$ est ouvert dans \mathbb{R}^n .
 - b) Soit (x_n) une suite de points de \mathbb{R}^n tels que la suite $(F(x_n))$ soit convergente. Démontrer que la suite (x_n) est de Cauchy.
 - c) Démontrer que $F(\mathbb{R}^n)$ est fermé dans \mathbb{R}^n .
 - d) En déduire que F est surjective.

8.5 Solutions

Exercice 8.1.

- On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3x$.
- On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ si et seulement si $x^2 = y$ et $y^2 = x$. Deux solutions possibles $(0, 0)$ et $(1, 1)$.
- On a $r = \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(0, 0) = 0 = \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(0, 0) = t$ et $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = -3$, donc on n'a pas d'extremum local en $(0, 0)$.
On a $r = \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(1, 1) = 6 = \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(1, 1) = t$ et $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) = -3$. Il vient $rt - s^2 = 27 > 0$, donc on a un extremum local en $(1, 1)$ qui est un minimum local puisque $r \geq 0$. Ce n'est pas un minimum global puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x, 0) = -\infty$.

Exercice 8.2.

- On choisit un repère orthonormé, dont on peut fixer l'origine en A , de sorte que $f_A(M) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

La fonction $M \mapsto AM^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ est polynomiale, donc de classe C^∞ ; elle est positive et ne s'annule qu'en A ; la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* ; donc f_A est de classe C^∞ sur $E \setminus \{A\}$.

Soit $M_0 \in E$ distinct de A . Notons \vec{u}_0 le vecteur $\overrightarrow{AM_0}/AM_0$. Soit \vec{w} un « petit » vecteur et effectuons un développement limité à l'ordre 2 de $f_A(M_0 + \vec{w})$. Pour cela, on écrit $\vec{w} = t\vec{u}_0 + \vec{v}$ avec $t = \vec{w} \cdot \vec{u}_0$ et $\vec{v} = \vec{w} - (\vec{w} \cdot \vec{u}_0)\vec{u}_0$ orthogonal à \vec{u}_0 . Pour $|t| < AM_0$, on a

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(AM_0 + t)^2 + \|\vec{v}\|^2} \\ &= (AM_0 + t) \sqrt{1 + \frac{\|\vec{v}\|^2}{(AM_0 + t)^2}} \\ &= AM_0 + t + \frac{\|\vec{v}\|^2}{2AM_0} + o(\|\vec{w}\|^2). \end{aligned}$$

On en déduit que $df_A(\vec{w}) = t = \vec{w} \cdot \vec{u}_0$ et $d^2 f_A(\vec{w}, \vec{w}) = \frac{\|\vec{v}\|^2}{AM_0} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{w} - t^2}{AM_0}$, donc,

$$d^2 f_A(\vec{w}_1, \vec{w}_2) = \frac{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 - (\vec{w}_1 \cdot \vec{u}_0)(\vec{w}_2 \cdot \vec{u}_0)}{AM_0}.$$

- Notons $\mathcal{B} = \{M \in E; AM \leq f(A)\}$ la boule fermée de centre A et de rayon $f(A)$. C'est une partie compacte non vide de E : puisque f est continue, il existe $F \in \mathcal{B}$ tel que $f(F) \leq f(M)$ pour tout $M \in \mathcal{B}$. Si $M \notin \mathcal{B}$, on a $f(M) \geq AM > f(A) \geq f(F)$. On en déduit que $f(F) = \inf\{f(M); M \in E\}$.
 - Soient M, N deux points distincts de E et $t \in]0, 1[$. Posons $P = tM + (1 - T)N$. On a donc $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AM} + (1 - t)\overrightarrow{AN}$, donc $f_A(P) \leq tf_A(M) + (1 - t)f_A(N)$, l'inégalité étant stricte si A, M et N ne sont pas alignés. De même, $f_B(P) \leq tf_B(M) + (1 - t)f_B(N)$ et $f_C(P) \leq tf_C(M) + (1 - t)f_C(N)$ et l'une au moins de ces inégalités n'est pas stricte puisque A, B et C n'étant pas alignés, ils ne peuvent être tous trois dans la droite (MN) .

- c) Soient F, G deux points distincts de E et notons H leur milieu. Si $f(F) = f(G)$, alors $f(H) < f(G)$ par stricte convexité, donc f ne peut pas réaliser son minimum en deux points distincts. De plus, soit $M \in E$ et notons N son projeté orthogonal dans le plan (ABC) . On a $AM^2 = AN^2 + MN^2$, donc $f_A(N) \leq f_A(M)$ avec égalité si $M = N$ - et il en va de même pour f_B et f_C . On en déduit que le maximum de f ne peut être atteint en dehors du plan (ABC) .
3. a) Puisque f atteint son minimum en F , le gradient de la fonction f est nul en F , autrement dit $\overrightarrow{AF}/AF + \overrightarrow{BF}/BF + \overrightarrow{CF}/CF = \vec{0}$.
- b) En effet, si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs d'un espace Euclidien satisfaisant $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{u} + \vec{v}\| = 1$, il vient $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{1}{2}$, donc \vec{u} et \vec{v} forment un angle de $2\pi/3$.
- c) Si $F = G$, alors les coordonnées barycentriques de F dans le repère A, B, C sont $(1, 1, 1)$ mais aussi (AF, BF, CF) . Par unicité, il vient $AF = BF = CF$, donc le triangle ABC est invariant par la rotations d'angle $2\pi/3$ de centre F : il est équilatéral.
- d) Puisque $\widehat{BA'C}$ est un angle de mesure $\pi/3$, les points du cercle circonscrit situés sur l'arc de cercle entre B et C et ne contenant pas A' sont les points M du demi-plan (ABC) bordé par la droite (BC) et contenant A tels que \widehat{BMC} soit un angle de mesure $2\pi/3$. On en déduit que F est bien dans cet arc de cercle - et de même pour les deux autres cercles circonscrits.
- e) Par cocyclicité, on a $\widehat{A'FC} = \widehat{A'BC} = \pi/3$. On en déduit que A' est situé sur la demi-droite issue de F opposée à A .
4. Supposons par exemple que l'angle en A soit $\geq 2\pi/3$. On a vu que lorsque F n'est pas un des points A, B ou C , il est situé à l'intérieur du triangle A, B, C (ses coordonnées barycentriques dans le repère A, B, C sont strictement positives) et aussi $\widehat{BFC} = 2\pi/3$. Impossible. Donc F est le point parmi A, B et C en lequel la fonction f est la plus petite. C'est évidemment le point A (puisque BC est le côté le plus long du triangle).
5. Dans ce cas, le gradient en A de $f_B + f_C$ est le vecteur $\vec{w} = \frac{\overrightarrow{BA}}{BA} + \frac{\overrightarrow{CA}}{CA}$ de norme > 1 . On a $f_A(A - t\vec{w}) = |t|\|\vec{w}\|$, donc la dérivée à droite en 0 de $t \mapsto f(A - t\vec{w})$ est $\|\vec{w}\| - \|\vec{w}\|^2$; elle est négative et donc f n'atteint pas son minimum en A .

Exercice 8.3.

1. On a $F(0, 0) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = -1$, donc on peut appliquer le théorème des fonctions implicites et écrire localement $F(x, y) = 0 \iff y = f(x)$: il existe des intervalles ouverts I, J et une application $f : I \rightarrow J$ de classe C^∞ tels que $0 \in I \cap J$ et, pour $(s, t) \in I \times J$ on ait l'équivalence $F(s, t) = 0 \iff t = f(s)$.
2. Pour $x \in I$, on a $F(x, f(x)) = 0$, soit $f(x) = x + \sin xf(x)$. On a $\sin xf(x) \sim_0 xf(x) = o(x)$ puisque f est continue en 0 et $f(0) = 0$. Il vient $f'(0) = 1$.
3. Il vient $f(x) = x + xf(x) + o(xf(x)) = x + x^2 + o(x^2)$ (puisque $f(x) \sim_0 x$).

Exercice 8.4.

1. La matrice Jacobienne de f , *i.e.* la matrice de df dans les bases canoniques est

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x - 3y & -3x & 4z \end{pmatrix}.$$

2. On a $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 1) & \frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(1, 1, 1) & \frac{\partial g}{\partial z}(1, 1, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ qui est inversible.

3. Il s'agit encore d'une application directe du théorème des fonctions implicites.

4. D'après le théorème des fonctions implicites, on a $\begin{pmatrix} \varphi'(1) \\ \psi'(1) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/7 \\ 2/7 \end{pmatrix}$.

Exercice 8.5.

1. On applique le théorème d'inversion locale à $\varphi : (x, y) \mapsto (x, f(x, y))$: la matrice jacobienne de

φ en (x, y) est $\begin{pmatrix} 1 & \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ 0 & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$ qui est inversible pour $(x, y) = (x_0, y_0)$. Notons $\psi : V' \rightarrow U'$ la

réciproque de φ définie sur un voisinage de (x_0, z_0) . Pour $(u, y) \in U'$ et $(x, z) \in V'$, on a

$$(u, y) = \psi(x, z) \iff (x, z) = \varphi(u, y) \iff x = u \text{ et } z = f(x, y)$$

donc $\psi(x, z)$ est de la forme $(x, F(x, z))$.

2. On a $\psi(x, z) = (x, y)$ et $d\psi_{(x,z)} = d\varphi_{x,y}^{-1}$. Il vient donc $\begin{pmatrix} 1 & \frac{\partial F}{\partial x}(x, z) \\ 0 & \frac{\partial F}{\partial z}(x, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ 0 & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}^{-1}$; il

vient $\frac{\partial F}{\partial z}(x, z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)^{-1}$ et $\frac{\partial F}{\partial x}(x, z) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)^{-1}$.

Exercice 8.6.

1. On a $f(A + H) = f(A) + AH + HA + H^2 = f(A) + AH + HA + o(\|H\|)$. On en déduit que f est différentiable en A et que $df_A(H) = AH + HA$.

2. L'application $A \mapsto df_A$ est linéaire, donc continue. On a $df_I(H) = 2H$, donc df_I est l'homothétie de rapport 2 : elle est bijective, et l'on peut appliquer le théorème d'inversion locale.