I. Quelques inégalités

1. Pour tout $t \in [0,1]$, on a $|f^{(k)}(t)| \leqslant M_k$, donc $m_k^2 \leqslant \int_0^1 M_k^2\,dt = M_k^2$.

   On a $f^{(k)}(x) = \int_0^x f^{k+1}(t)\,dt$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il vient

$$|f^{(k)}(x)|^2 \leqslant \Big(\int_0^x dt\Big)\Big(\int_0^x (f^{k+1}(t))^2 dt\Big) \leqslant m_{k+1}^2.$$

2. a) On a $m_k^2 = \int_0^1 f_k(t)^2\,dt = \Big[f^{(k-1)}f^{(k)}\Big]_0^1 - \int_0^1 f^{(k-1)}(t)f^{k+1)}(t)\,dt$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\Big|\int_0^1 f^{(k-1)}(t)f^{k+1)}(t)\,dt\Big| \leqslant m_{k-1}m_{k+1}$; or $f^{(k-1)}(0)f^{(k)}(0) = f^{(k-1)}(1)f^{(k)}(1) = 0$ (condition (ii)).

   b) D'après la question 1, il vient $1 = m_0 \leqslant M_0 \leqslant m_1$, donc $\mu_1 \geqslant \mu_0$.
   Soit $k \geqslant 1$ et supposons que $\mu_{k-1} \leqslant \mu_k$. La question 2.a) donne $\mu_k^{2k} \leqslant \mu_{k-1}^{k-1}\mu_{k+1}^{k+1} \leqslant \mu_k^{k-1}\mu_{k+1}^{k+1}$, donc $\mu_k \leqslant \mu_{k+1}$.

II. Deux fonctions auxiliaires
A. La fonction $\tilde{F}$

1. a) Soient $t \in [0,1]$ et $z = x + iy$; on a $|e^{-zt}| = e^{-tx}$. Si $x \geqslant 0$, alors $e^{-x} \leqslant e^{-tx} \leqslant 1$. Comme $f(t)^2 \geqslant 0$, il vient $|F(z)| \leqslant \int_0^1 |e^{-tz}|f(t)^2\,dt \leqslant \int_0^1 f(t)^2\,dt = m_0^2 = 1$ et $F(x) \geqslant \int_0^1 e^{-x}f(t)^2\,dt = e^{-x}$.

   b) Fixons $z \in \mathbb{C}$. Pour $t \in [0,1]$, on a $e^{-tz} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(-tz)^\ell}{\ell!}$. Rappelons le

> **Théorème d'intégration terme à terme.** Soit une suite (u_ℓ) de fonctions à valeurs complexes, intégrables sur I, telle que la série $\sum u_\ell$ converge simplement vers une fonction S continue par morceaux sur I, et telle que la série $\sum_\ell \int_I |u_\ell|$ converge. Alors S est intégrable sur I et on a $\int_I S = \sum_\ell \int_I u_\ell$.

   Ici, posons $u_\ell(t) = \frac{(-tz)^\ell}{\ell!}f(t)^2$; et $S(t) = e^{-tz}f(t)^2$.
   - Les fonctions u_ℓ et S sont continues (donc intégrables) sur $[0,1]$;
   - $|u_\ell(t)| \leqslant \frac{|z|^\ell}{\ell!}f(t)^2$, donc $\int_0^1 |u_\ell| \leqslant \frac{|z|^\ell}{\ell!}m_0^2 = \frac{|z|^\ell}{\ell!}$, donc $\sum_\ell \int_I |u_\ell|$ converge.

   Par le théorème d'intégration terme à terme, on a $F(z) = \int_0^1 S(t)\,dt = \sum_{\ell=0}^{\infty} z^\ell \int_0^1 \frac{(-t)^\ell}{\ell!}f(t)^2\,dt$.

   Cette série entière converge pour tout $z \in \mathbb{C}$, donc son rayon de convergence est infini.

2. Rappelons les théorèmes de continuité et de dérivation sous le signe $\int$

> **Théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre.** Soient X un ouvert de $\mathbb{R}^n$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et h une fonction définie sur $X \times I$ et à valeurs complexes. On suppose que, pour tout t dans I, la fonction partielle $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur X et que, pour tout x dans X, la fonction partielle $t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux sur I. S'il existe une fonction Q intégrable sur I et telle que, pour tout x dans X et tout t dans I, $|h(x,t)| \leqslant Q(t)$, alors la fonction $F : x \mapsto \int_I h(x,t)\,dt$ est continue sur X.

Théorème de dérivation sous le signe $\int$. Soient X et I deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et h une fonction définie sur $X \times I$ et à valeurs complexes, telle que, pour tout x dans X, la fonction partielle $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur I. On suppose que h admet une dérivée partielle $h'_x(x,t)$ en tout point de $X \times I$, que pour tout t dans I, la fonction $x \mapsto h'_x(x,t)$ est continue sur X. S'il existe une fonction Q intégrable sur I et telle que, pour tout x dans X et tout t dans I, $|h'_x(x,t)| \leqslant Q(t)$, alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\,dt$ est dérivable sur X et on a $F'(x) = \displaystyle\int_I h'_x(x,t)dt$.

Posons $H(x,y,t) = e^{-xt-iyt} f(t)^2$. Remarquons que :

(i) La fonction $(x,y) \mapsto H(x,y,t)$ est de classe C^∞ (toutes les fonctions $(x,y) \mapsto \dfrac{\partial^{j+k} H}{\partial x^j \partial y^k}(x,y,t)$ sont continues) ;

(ii) Pour tout $(j,k) \in \mathbb{N}^2$, et tout $(x,y,t) \in \mathbb{R}^2 \times [0,1]$, on a $\dfrac{\partial^{j+k} H}{\partial x^j \partial y^k}(x,y,t) = (-t)^j(-it)^k H(x,y,t)$;

(iii) pour tout $M \in \mathbb{R}_+$ et tout $(j,k) \in \mathbb{N}^2$, si $x \geqslant -M$, on a $\left|\dfrac{\partial^{j+k} H}{\partial x^j \partial y^k}(x,y,t)\right| \leqslant e^M f(t)^2$;

(iv) La fonction $Q : t \mapsto e^M f(t)^2$ est continue sur $[0,1]$ (donc intégrable) - et indépendante de (x,y).

On déduit du théorème de continuité que pour tout $(j,k) \in \mathbb{N}^2$ les fonctions $(x,y) \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial^{j+k} H}{\partial x^j \partial y^k}(x,y,t)\,dt$ sont continues sur l'ouvert $]-M,+\infty[\, \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$. Cela étant vrai pour tout M, ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

On déduit du théorème de dérivation que, pour tout $y \in \mathbb{R}$ et tout $(j,k) \in \mathbb{N}^2$, (sur tout intervalle $]-M,+\infty[$ donc sur $\mathbb{R}$) la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial^{j+k} H}{\partial x^j \partial y^k}(x,y,t)\,dt$ est dérivable et sa dérivée en x est $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial^{j+1+k} H}{\partial x^{j+1} \partial y^k}(x,y,t)\,dt$.

De même, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $(j,k) \in \mathbb{N}^2$, la fonction $y \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial^{j+k} H}{\partial x^j \partial y^k}(x,y,t)\,dt$ et sa dérivée en y est $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial^{j+k+1} H}{\partial x^j \partial y^{k+1}}(x,y,t)\,dt$.

Donc, par récurrence sur m, l'application $\tilde{F}$ est de classe C^m pour tout m et pour tout $(j,k) \in \mathbb{N}^2$ et tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\frac{\partial^{j+k} \tilde{F}}{\partial x^j \partial y^k}(x,y) = i^k \int_0^1 (-t)^{j+k} e^{-t(x+iy)} f(t)^2\,dt.$$

En particulier $\dfrac{\partial^{j+k} \tilde{F}}{\partial x^j \partial y^k} = i^k \dfrac{\partial^{j+k} \tilde{F}}{\partial x^{j+k}}$.

3. On établit cette propriété par récurrence sur k. Elle est vraie par définition de F pour $k = 0$. Supposons qu'elle soit vraie pour k avec $0 \leqslant k < n$. Par intégration par partie, on a

$$\int_0^1 e^{-tz}(f^2)^{(k)}(t)\,dt = \left[\frac{e^{-tz}}{-z}(f^2)^{(k)}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{-tz}}{-z}(f^2)^{(k+1)}\,dt = \frac{1}{z}\int_0^1 e^{-tz}(f^2)^{(k+1)}\,dt$$

puisque $(f^2)^{(k)}(t) = \displaystyle\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} f^{(j)}(t) f^{(k-j)}(t)$ est nul en $t = 0$ et en $t = 1$.

4. On a $(f^2)^{(k)} = \displaystyle\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} f^{(j)} f^{(k-j)}$ et pour tout $t \in [0,1]$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re} z \geqslant 0$, $|e^{-tz}| \leqslant 1$; il vient

$$|F(z)| \leqslant \frac{1}{|z|^k}\int_0^1 |(f^2)^{(k)}(t)|dt \leqslant \frac{1}{|z|^k}\int_0^1 \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} |f^{(j)}(t) f^{(k-j)}(t)|\,dt \leqslant \frac{1}{|z|^k}\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} m_j m_{k-j}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Or pour tout $j \in [\![0,k]\!]$, on a $m_j m_{k-j} = \mu_j^j \mu_{k-j}^{k-j} \leqslant \mu_k^k$ (puisque $\mu_j \leqslant \mu_k$ et $\mu_{k-j} \leqslant \mu_k$), donc $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} m_j m_{k-j} \leqslant \mu_k^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} = (2\mu_k)^k$.

B. La fonction v

5. a) Remarquons que, pour $x > 0$ et $s \in \mathbb{R}$, la mesure principale de l'angle des vecteurs de composantes $(1,0)$ et (x,s) du plan euclidien, c'est-à-dire l'argument (dans $]-\pi/2, \pi/2[$) de $x + is$, est égale à $q(x,s) = \operatorname{Arctan}\Big(\dfrac{s}{x}\Big)$. On peut donc prolonger continûment cette fonction (à valeurs dans $]-\pi,\pi[$) sur $\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R}_- \times \{0\}$.
En particulier, $q(0,s) = \dfrac{\pi}{2}$ si $s > 0$ et $q(0,s) = -\dfrac{\pi}{2}$ si $s < 0$.
On prolongera donc continûment h_b en posant $h_b(0,y) = \pi$ si $y > b$ et $h_b(0,y) = 0$ si $y < b$.
b) Pour $x, b \in \mathbb{R}_+^*$, on a $h_b(x,0) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\Big(\dfrac{b}{x}\Big) = \operatorname{Arctan}\Big(\dfrac{x}{b}\Big)$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{h_b(x,0)}{x} = \frac{1}{b}\cdot$

6. a) Pour tout $(b,x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on a $h_b(x,y) \geqslant 0$ donc $v(x,y) \geqslant 0$. De plus, la fonction Arctan étant croissante, $\operatorname{Arctan}\Big(\dfrac{y-b}{x}\Big) \leqslant \operatorname{Arctan}\Big(\dfrac{y+b}{x}\Big)$, donc
$$h_b(x,y) + h_b(x,-y) \leqslant \pi + \operatorname{Arctan}\Big(\frac{y-b}{x}\Big) - \operatorname{Arctan}\Big(\frac{y+b}{x}\Big) \leqslant \pi,$$
donc $v(x,y) \leqslant n$. Par continuité, cette inégalité reste vraie pour $(x,y) \in D$.
b) On a $h_b(0,y) = 0$ si $y < b$ et $h_b(0,y) = \pi$ si $y > b$. On en déduit que $h_b(0,y) + h_b(0,-y) = 0$ si $|y| < b$ et $h_b(0,y) + h_b(0,-y) = \pi$ si $|y| > b$. Donc $v(0,y)$ est le nombre de k tels que $b_k < |y|$. En d'autres termes, si $|y| < b_1$, alors $v(0,y) = 0$, si $b_k < |y| < b_{k+1}$, alors $v(0,y) = k$ et si $b_n < |y|$, alors $v(0,y) = n$.

C. Inégalités reliant $\tilde{F}$ et v

7. a) On sait que $v(0,y) \in [\![0,n]\!]$ (question 6.b). Si $v(0,y) = 0$, l'inégalité résulte de II.1.a). Si $v(0,y) = k \in [\![1,n]\!]$ alors $|y| \geqslant b_k$, donc $\dfrac{2\mu_k}{|y|} \leqslant \dfrac{1}{e}$; on déduit alors de II.4 que $|\tilde{F}(0,y)| \leqslant e^{-k}$.
b) L'application $(x,y) \mapsto e^{v(x,y)}|\tilde{F}(x,y)|$ est continue sur D ; l'ensemble $U = \{(x,y) \in D;\ e^{v(x,y)}|\tilde{F}(x,y)| < e^{\varepsilon}\}$ est donc ouvert dans D. Si $|y_0| \notin \{b_1, \dots, b_n\}$, alors $(0,y_0) \in U$, d'après (a), donc il existe r tel que les points de D distants de $(0,y_0)$ de moins que r soient dans U.
Sinon, soit k le plus grand j tel que $|y_0| = b_j$. On a $\dfrac{2\mu_k}{|y_0|} = \dfrac{1}{e}$; on déduit alors de II.4 que $|\tilde{F}(0,y_0)| \leqslant e^{-k}$; posons $v_k(x,y) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{j=0}^{k} \big(h_{b_j}(x,y) + h_{b_j}(x,-y)\big)$ et $\hat{v}_k(x,y) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{j=k+1}^{n} \big(h_{b_j}(x,y) + h_{b_j}(x,-y)\big)$. Par 6.a), on a $v_k \leqslant k$; la fonction $\hat{v}_k$ se prolonge par continuité en $(0,y_0)$ en posant $\hat{v}_k(0,y_0) = 0$. Il s'ensuit qu'il existe $r > 0$ tel que pour $(x,y) \in D$ tel que $(x^2 + (y-y_0)^2) \leqslant r^2$ on ait $e^{v(x,y)}|\tilde{F}(x,y)| \leqslant e^{k+\hat{v}_k(x,y)}|\tilde{F}(x,y)| < e^{\varepsilon}$.

III. L'opérateur Δ de Laplace

A. Deux fonctions harmoniques

1. Sur $\mathring{D}$, on a $\dfrac{\partial h_b}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{y-b}{x^2+(y-b)^2}$, $\dfrac{\partial h_b}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x}{x^2+(y-b)^2}$, $\dfrac{\partial^2 h_b}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{2x(y-b)}{(x^2+(y-b)^2)^2}$ et $\dfrac{\partial^2 h_b}{\partial y^2}(x,y) = -\dfrac{2x(y-b)}{(x^2+(y-b)^2)^2}$. Donc $\Delta h_b = 0$.
On en déduit immédiatement que $\Delta \tilde{h}_b = 0$ où l'on a posé $\tilde{h}_b(x,y) = h_b(x,-y)$. Donc $\Delta v = 0$.
2. La fonction u est de classe C^∞ (comme composée de fonctions de classe C^∞).
Soit J un ouvert de $\mathbb{R}$ et $h : J \to \mathbb{C}^*$ une fonction de classe C^2 ; posons $\varphi(t) = \ln|h(t)| = \dfrac{1}{2}\ln(h(t)\overline{h}(t))$. On a
$$\varphi'(t) = \frac{1}{2}\frac{h'(t)\overline{h}(t) + h(t)\overline{h}'(t)}{h(t)\overline{h}(t)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{h'(t)}{h(t)} + \frac{\overline{h'(t)}}{\overline{h(t)}}\Big) = \operatorname{Re}\Big(\frac{h'(t)}{h(t)}\Big) \quad \text{et} \quad \varphi''(t) = \operatorname{Re}\Big(\frac{h''(t)h(t) - h'(t)^2}{h(t)^2}\Big).$$

En prenant pour h une fonction partielle $x \mapsto \tilde{F}(x,y)$ ou $y \mapsto \tilde{F}(x,y)$, il vient, pour $(x,y) \in W$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = \mathrm{Re}\left(\frac{\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^2}(x,y)\tilde{F}(x,y) - \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(x,y)^2}{\tilde{F}(x,y)^2}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = \mathrm{Re}\left(\frac{\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial y^2}(x,y)\tilde{F}(x,y) - \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y}(x,y)^2}{\tilde{F}(x,y)^2}\right).$$

Or $\dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial y}(x,y) = i\dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial y^2}(x,y) = -\dfrac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^2}(x,y)$, donc $\Delta u = 0$.

B. Positivité du laplacien et maximum

3. Supposons qu'une fonction G de classe C^2 possède un maximum local en $(a,b) \in U$; alors la fonction $x \mapsto G(x,b)$ possède un maximum local en a donc $\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}(a,b) \leqslant 0$ et de même $\dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2}(a,b) \leqslant 0$; donc $\Delta G(a,b) \leqslant 0$.
4. Supposons par l'absurde que la fonction G prend une valeur strictement positive α. Choisissons $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\varepsilon(x^2+y^2) < \alpha$ pour tout $(x,y) \in K$ (par exemple, $\varepsilon = \dfrac{\alpha}{M+1}$ où $M = \sup\{x^2+y^2;\ (x,y) \in K\}$). Posons $G_\varepsilon(x,y) = G(x,y) + \varepsilon(x^2+y^2)$; soit (a,b) un point du compact non vide K en lequel G_ε atteint son maximum. Puisque ce maximum est $\geqslant \alpha$, et $\varepsilon(a^2+b^2) < \alpha$, il vient $G(a,b) > 0$. En d'autres termes, G_ε admet un maximum (local) dans l'ouvert $\{(x,y) \in V;\ G(x,y) > 0\}$ de $\mathbb{R}^2$. Or $\Delta G_\varepsilon = \Delta G + 4\varepsilon > 0$. C'est impossible par la question précédente.

C. Démonstration de l'inégalité (*)

5. Pour tout ℓ, on a $x_\ell > 0$, donc $x_0 \geqslant 0$. Par la question II.7.b) il existe un disque ouvert de centre $(0,y_0)$ qui ne rencontre pas K_ε. Donc (x_ℓ, y_ℓ) ne peut converger vers $(0,y_0)$. Il vient $x_0 > 0$.
L'application $(x,y) \mapsto e^{v(x,y)}|\tilde{F}(x,y)|$ est continue sur D, donc en (x_0,y_0). On en déduit $e^{v(x_0,y_0)}|\tilde{F}(x_0,y_0)| = \lim\limits_{\ell\to\infty} e^{v(x_\ell,y_\ell)}|\tilde{F}(x_\ell,y_\ell)| \geqslant e^\varepsilon$ donc $(x_0,y_0) \in K_\varepsilon$.
Soit $(x,y) \in D$. On a $v(x,y) \leqslant n$. Si $z = x+iy$ vérifie $|z| \geqslant b_n$, on a $\dfrac{2\mu_n}{|z|} \leqslant e^{-1}$, donc, d'après II.4, $|\tilde{F}(x,y)| \leqslant e^{-n}$ et $e^{v(x,y)}|\tilde{F}(x,y)| \leqslant 1$; donc $(x,y) \notin K_\varepsilon$. Cela prouve que K_ε est borné.
On a démontré que K_ε est fermé dans $\mathbb{R}^2$ et borné. C'est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$. Remarquons que pour $(x,y) \in K_\varepsilon$, on a $\tilde{F}(x,y) \neq 0$, donc $K_\varepsilon \subset W$.
Pour $(x,y) \in W$, posons $G(x,y) = u(x,y) + v(x,y) - \varepsilon$. Comme $e^{u(x,y)} = |\tilde{F}(x,y)|$, il vient $(x,y) \in K_\varepsilon \iff G(x,y) \geqslant 0$. Or $\Delta G = \Delta u + \Delta v = 0$, donc d'après la question III.4,, on en déduit que $G \leqslant 0$ sur W.
6. Soit $(x,y) \in W$. Comme $u(x,y) + v(x,y) \leqslant \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $u(x,y) + v(x,y) \leqslant 0$. Pour $x > 0$, comme $\tilde{F}(x,0) \geqslant e^{-x}$, il vient $u(x,0) \geqslant -x$, donc $-x + v(x,0) \leqslant u(x,0) + v(x,0) \leqslant 0$. Donc $\dfrac{v(x,0)}{x} \leqslant 1$ pour tout $x > 0$. Prenant la limite quand $x \to 1$ (à l'aide de la question II.5.b), il vient $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{b_k} \leqslant 1$, soit $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{2e\mu_k} \leqslant 1$, d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu_k} \leqslant \pi e$. Enfin, $M_k \geqslant m_k = \mu_k^k$, donc $M_k^{-\frac{1}{k}} \leqslant \mu_k^{-1}$, d'où l'inégalité (*).