

(Agrégation interne 1998 - première épreuve de mathématiques)

**I. Etude du groupe  $GL(2, \mathbb{Z})$**

1. a) Rappelons que si  $ad - bc \neq 0$ , on a  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ . On trouve

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) La matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  admet un inverse dans  $M_2(\mathbb{R})$  si et seulement si  $\det(A) \neq 0$ .

Si  $A$  admet un inverse dans  $M_2(\mathbb{Z})$ , on a  $\det A \in \mathbb{Z}$  et  $\det A^{-1} \in \mathbb{Z}$ , donc  $1 = \det A \det A^{-1}$ . Cela implique que  $\det A = \pm 1$ .

Inversement, si  $\det A = \pm 1$ , alors  $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ .

2. a) On a  $\begin{pmatrix} 3 & b \\ c & 3 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \iff bc = 8$ , soit

$$(b, c) \in \{(1, 8), (-1, -8), (2, 4), (-2, -4), (4, 2), (-4, -2), (8, 1), (-8, -1)\}.$$

b) On a  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$  si et seulement si  $bc = ad - 1$ . Si  $(a, d)$  n'est pas égal à l'un des couples  $(1, 1)$ ,  $(-1, -1)$ , alors  $ad \neq 1$ , donc l'ensemble des solutions est l'ensemble fini non vide des couples de la forme  $(\delta, \frac{ad - 1}{\delta})$ , où  $\delta$  parcourt l'ensemble fini, non vide des diviseurs de  $ad - 1$ .

c) Lorsque  $(a, d)$  est l'un des couples  $(1, 1)$ ,  $(-1, -1)$ , l'ensemble des solutions est  $\{(0, n); n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(n, 0); n \in \mathbb{Z}\}$ ; il est infini.

3. a) Pour  $(b, d) \in \mathbb{Z}^2$ , on a  $3d - 2b = 1$ , si et seulement si  $3d - 2b = 3 - 2$ , soit,  $3(d - 1) = 2(b - 1)$ . Dans ce cas,  $3(d - 1)$  est pair, donc  $d - 1$  est pair. Il existe donc  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $d = 2k + 1$ . L'équation devient  $3k = b - 1$ . Donc l'ensemble des  $(b, d) \in \mathbb{Z}^2$ , tels que  $3d - 2b = 1$  est  $\{(3k + 1, 2k + 1); k \in \mathbb{Z}\}$ .

Pour  $(b, d) \in \mathbb{Z}^2$ , on a  $\begin{pmatrix} 3 & b \\ 2 & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$  si et seulement si  $\begin{pmatrix} 3 & b \\ 2 & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$  ou  $\begin{pmatrix} 3 & -b \\ 2 & -d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ , i.e. si et seulement si  $(b, d) \in \{(\varepsilon(3k + 1), \varepsilon(2k + 1)); \varepsilon \in \{-1, 1\}; k \in \mathbb{Z}\}$ .

b) Soit  $(a, c) \in \mathbb{Z}^2$ . D'après le théorème de Bézout, il existe  $(b, d) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $ad - bc = 1$  si et seulement si  $a$  et  $c$  sont premiers entre eux. Dans ce cas, soit  $(b_0, d_0)$  une solution. Alors un couple  $(b, d)$  est solution, si et seulement si  $a(d - d_0) = c(b - b_0)$ .

\* Si on a  $a(d - d_0) = c(b - b_0)$ , alors  $a$  divise  $c(b - b_0)$  et, d'après le théorème de Gauss, puisque  $a$  et  $c$  sont premiers entre eux,  $a$  divise  $b - b_0$  : il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $b - b_0 = ak$ . L'égalité  $a(d - d_0) = c(b - b_0)$  impose alors  $a(d - d_0) = ack$ . Si  $a \neq 0$  on trouve  $(b, d) = (b_0 + ka, d_0 + kc)$ . Si  $a = 0$ , comme  $ad - bc = 1$  il vient  $c = \pm 1$  et  $b = b_0 = -c$ , donc, encore tout couple  $(b, d)$  solution est nécessairement de la forme  $(b_0 + ka, d_0 + kc)$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

\* Inversement, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , le couple  $(b_0 + ka, d_0 + kc)$  est aussi solution.

L'ensemble des couples  $(b, d)$  tels que  $ad - bc = 1$  est donc  $\{(b_0 + ka, d_0 + kc); k \in \mathbb{Z}\}$ .

## II. Réseaux de $\mathbb{C}$

1. a) Posons  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Les nombres complexes  $u' = au + cv$ ,  $v' = bu + dv$  sont indépendants sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si leurs composantes dans la base  $(u, v)$  ne sont pas proportionnelles, *i.e.* si le déterminant  $\det A = ad - bc$  de la matrice de passage  $A$  n'est pas nul.
  - b) Si  $\mathcal{R}(u', v') \subset \mathcal{R}$ , alors  $u' \in \mathcal{R}$  et  $v' \in \mathcal{R}$ , donc leurs composantes dans la base  $u, v$  sont entières, *i.e.*  $A \in M_2(\mathbb{Z})$ . Inversement, si  $A \in M_2(\mathbb{Z})$ , alors  $u' \in \mathcal{R}$  et  $v' \in \mathcal{R}$ , et comme  $\mathcal{R}$  est un sous-groupe de  $\mathbb{C}$ , il contient le sous-groupe  $\mathcal{R}(u', v')$  de  $\mathbb{C}$  engendré par  $u', v'$ .
  - c) La matrice de passage de la base  $(u', v')$  à  $(u, v)$  est  $A^{-1}$ . Par (a), on a  $\mathcal{R}(u, v) \subset \mathcal{R}(u', v')$  si et seulement si  $A^{-1} \in M_2(\mathbb{Z})$ . Donc  $\mathcal{R}(u, v) = \mathcal{R}(u', v')$  si et seulement si  $A \in M_2(\mathbb{Z})$  et  $A^{-1} \in M_2(\mathbb{Z})$ , ce qui est équivalent d'après I.1.b), à  $A \in GL(2, \mathbb{Z})$ .
2. a) Par (a), le couple  $(3u + 2v, bu + dv)$  est une base du réseau  $\mathcal{R}(u, v)$  si et seulement si  $\begin{pmatrix} 3 & b \\ 2 & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$ , *i.e.*  $(b, d) \in \{(\varepsilon(3k + 1), \varepsilon(2k + 1)); \varepsilon \in \{-1, 1\}; k \in \mathbb{Z}\}$  (d'après I.3.a)).
  - b) Le nombre  $au + cv$  est basique pour  $\mathcal{R}$  si et seulement s'il existe  $b, d$  tel que  $ad - bc = \pm 1$  ce qui a lieu si et seulement si  $a$  et  $c$  sont premiers entre eux (théorème de Bézout).
  - c) Soit  $u' = au + cv$  un élément non nul de  $\Delta \cap \mathcal{R} \neq \{0\}$ . Écrivons  $a = a'd$  et  $c = c'd$  avec  $d = PGCD(a, c)$  et  $a'$  et  $c'$  premiers entre eux. Posons  $\delta = a'u + c'v$ . C'est un élément basique de  $\mathcal{R}$  d'après (c) et  $\delta = \frac{u'}{d} \in \Delta$ . Puisque  $\delta$  est basique, il existe  $v' \in \mathcal{R}$  tel que  $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\delta, v') = \{m\delta + nv'; (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$ ; or, puisque  $\mathcal{R} \not\subset \Delta$  on a  $v' \notin \Delta$ , donc  $m\delta + nv' \in \Delta \iff n = 0$ , soit  $\Delta \cap \mathcal{R} = \mathbb{Z}\delta$ .
  - d) Les éléments  $u$  et  $u + 2v$  sont basiques mais comme  $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$ ,  $(u, u + 2v)$  n'est pas une base de  $\mathcal{R}$ .
3. a) Écrivons  $\frac{v}{u} = re^{i\theta}$  (avec  $r = \frac{|v|}{|u|}$ ). On a
 
$$\begin{aligned} |au + bv|^2 &= |u|^2(a + bre^{i\theta})^2 = |u|^2((a + br \cos \theta)^2 + b^2r^2 \sin^2 \theta) \\ &= (a|u| + b|v| \cos \theta)^2 + b^2|v|^2 \sin^2 \theta \\ &\geq b^2|v|^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$
  - b) On trouve de même  $|au + bv|^2 = (a|u| \cos \theta + b|v|)^2 + a^2|u|^2 \sin^2 \theta \geq a^2|u|^2 \sin^2 \theta$ . Soit  $M \in \mathbb{R}_+^*$ . Si  $|au + bv| \leq M$ , il vient  $b^2 \leq \frac{M^2}{|v|^2 \sin^2 \theta}$  et donc  $|b| \leq \frac{M}{|v| \sin \theta}$  et  $|a| \leq \frac{M}{|u| \sin \theta}$ . Donc dans la boule de centre 0 et de rayon  $M$  il y a au plus  $\left(2E\left(\frac{M}{|v| \sin \theta}\right) + 1\right) \left(2E\left(\frac{M}{|u| \sin \theta}\right) + 1\right)$  éléments de  $\mathcal{R}$ .
4. a) Soit  $u_0$  un élément non nul de  $\Gamma$ . Comme  $\Gamma$  est discret, l'ensemble  $\{u \in \Gamma \setminus \{0\}; |u| \leq |u_0|\}$  est fini et non vide, donc il existe un élément  $u$  de module minimum dans cet ensemble. On aura bien  $|u| \leq |w|$  pour tout  $w \in \Gamma \setminus \{0\}$ . De même, soit  $v_0 \in \Gamma \setminus \mathbb{R}u$ ; l'ensemble  $\{v \in \Gamma \setminus \mathbb{R}u; |v| \leq |v_0|\}$  est fini et non vide, donc il existe un élément  $v$  de module minimum dans cet ensemble. Puisque  $\Gamma$  est un sous-groupe de  $\mathbb{C}$  contenant  $u$  et  $v$ , il contient le sous-groupe  $\mathcal{R}(u, v)$  qu'ils engendrent.
  - b) Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Notons  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$  les composantes de  $z$  dans la  $\mathbb{R}$ -base  $(u, v)$  de  $\mathbb{C}$ , de sorte que  $z = su + tv$ . Posons  $m = E(s + 1/2)$  et  $n = E(t + 1/2)$ , de sorte que  $-1/2 \leq s - m < 1/2$  et  $-1/2 \leq t - n < 1/2$ , soit  $|s - m| \leq 1/2$  et  $|t - n| \leq 1/2$ . Alors  $z' = mu + nv \in \mathcal{R}$  et  $z - z' = xu + yv$  avec  $x = s - m$  et  $y = t - n$ ; on a bien  $|x| \leq \frac{1}{2}$ ,  $|y| \leq \frac{1}{2}$ .

- c) Comme  $|u|$  est minimum, il vient  $|u| \leq |v|$ . On a  $|z - z'| \leq |x||u| + |y||v| \leq (|x| + |y|)|v| \leq |v|$ .
- d) Si  $z_1$  et  $z_2$  ne sont pas dans une même demi-droite vectorielle on a l'inégalité stricte  $|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$ .
- e) Si  $x$  et  $y$  sont tous deux non nuls,  $xu$  et  $yv$  ne sont pas dans une même (demi-)droite vectorielle, donc l'inégalité  $|z - z'| \leq |x||u| + |y||v|$  est stricte. Si  $x$  ou  $y$  est nul, l'inégalité  $(|x| + |y|)|v| \leq |v|$  est stricte. Dans tous les cas, l'inégalité  $|z - z'| \leq |v|$  est stricte.
- f) Supposons  $z \in \Gamma$  et soit  $z' \in \mathcal{R}$  tel que  $z - z' = xu + yv$  avec  $|x| \leq 1/2$  et  $|y| \leq 1/2$ . Alors  $z - z' \in \Gamma$  et  $|z - z'| < |v|$ ; par minimalité de  $|v|$ , il vient  $z - z' \in \mathbb{R}u$ , soit  $z - z' = xu$  donc  $|z - z'| < |u|$ . Par minimalité de  $|u|$ , il vient  $z = z'$ . Cela prouve que  $\Gamma \subset \mathcal{R}$ , d'où l'égalité.

### III. Similitudes de centre 0 laissant stable un réseau

1. a) Les similitudes directes de centre 0 sont les applications de la forme  $w \mapsto zw$  (ou  $z \in \mathbb{C}^*$ ). Donc les similitudes directes de centre 0 laissant  $\mathcal{R}$  stable sont les applications  $w \mapsto zw$  avec  $z \in Z(\mathcal{R}) \setminus \{0\}$ .
  - b) Si  $w \in \mathcal{R}$  et  $k \in \mathbb{Z}^*$ , il vient  $kw \in \mathcal{R}$  donc l'homothétie de centre 0 et rapport  $k$  stabilise  $\mathcal{R}$ . Inversement si l'homothétie de rapport  $k \in \mathbb{R}^*$  laisse  $\mathcal{R}$  stable, on a  $ku = au + bv$  avec  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ ; comme  $(u, v)$  est libre (sur  $\mathbb{R}$ ) cela implique  $k \in \mathbb{Z}$ . On a donc  $Z(\mathcal{R}) \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}$ .
  - c) On a vu que  $\mathbb{Z} \subset Z(\mathcal{R})$ , donc  $0 \in Z(\mathcal{R})$  et  $1 \in Z(\mathcal{R})$ . Si  $x, y \in Z(\mathcal{R})$ , pour tout  $w \in \mathcal{R}$  on a  $xw \in \mathcal{R}$  et  $yw \in \mathcal{R}$ , donc  $(x - y)w \in \mathcal{R}$  (car  $\mathcal{R}$  est un sous-groupe additif de  $\mathbb{C}$ ). On en déduit que  $x - y \in Z(\mathcal{R})$ , donc  $Z(\mathcal{R})$  est un sous-groupe additif de  $\mathbb{C}$ . Enfin, puisque  $yw \in \mathcal{R}$  et  $x \in Z(\mathcal{R})$ , il vient  $xyw \in \mathcal{R}$ . Comme cela est vrai pour tout  $w \in \mathcal{R}$ , on trouve  $xy \in Z(\mathcal{R})$ . Donc  $Z(\mathcal{R})$  est un sous-anneau de  $\mathbb{C}$ .
  - d) La multiplication par  $1/u$  est une similitude directe qui transforme le réseau  $\mathcal{R}(u, v)$ , en  $\mathcal{R}(1, w)$  où  $w = v/u \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .  
Soient  $z \in Z(\mathcal{R}(1, w))$  et  $x \in \mathcal{R}(u, v)$ . On a  $x/u \in \mathcal{R}(1, w)$ , donc  $z(x/u) \in \mathcal{R}(1, w)$ , soit  $zx \in \mathcal{R}(u, v)$ . Cela prouve que  $z \in Z(\mathcal{R}(u, v))$ .  
Soient  $z \in Z(\mathcal{R}(u, v))$  et  $x \in \mathcal{R}(1, w)$ . On a  $xu \in \mathcal{R}(u, v)$ , donc  $z(xu) \in \mathcal{R}(u, v)$ , soit  $zx \in \mathcal{R}(1, w)$ . Cela prouve que  $z \in Z(\mathcal{R}(1, w))$ .  
Donc  $Z(\mathcal{R}(1, w)) = Z(\mathcal{R}(u, v))$ .
  - e) Puisque  $1 \in \mathcal{R}(1, w)$ , si  $z \in \mathcal{R}(1, w)$ , alors  $z = z1 \in \mathcal{R}(1, w)$ . On a donc  $Z(\mathcal{R}(1, w)) \subset \mathcal{R}(1, w)$ .
  - f) On a  $Z(\mathcal{R}(1, (\sqrt{2})i)) = \mathcal{R}(1, (\sqrt{2})i)$  et  $Z(\mathcal{R}(1, (\sqrt[3]{2})i)) = \mathbb{Z}$ .
2. Soit  $z \in Z(\mathcal{R}) \setminus \mathbb{Z}$ . Comme  $Z(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$ , il existe  $a, b \in \mathbb{Z}$  tels que  $z = a + bw$ . Comme  $z \notin \mathbb{Z}$  on a  $b \neq 0$ . Enfin, puisque  $z \in Z(\mathcal{R})$ , il bien  $wz \in \mathcal{R}$ , donc il existe  $c, d \in \mathbb{Z}$  tels que  $wz = c + dw$ . On a donc  $aw + bw^2 = c + dw$ , soit  $bw^2 + (a - c)w - d = 0$ .
  3. a) Si  $\alpha w^2 + \beta w + \gamma = 0$ , pour tout  $a, b \in \mathbb{Z}^2$ , on a  $(\alpha w)(a + bw) = \alpha aw + \alpha bw^2 = \alpha aw - b(\beta w + \gamma) \in \mathcal{R}$ . Donc  $\alpha w \in Z(\mathcal{R})$ .
  - b) Si  $\alpha = 1$ , on a  $w \in Z(\mathcal{R})$ . Puisque  $Z(\mathcal{R})$  est un sous groupe de  $\mathbb{C}$  contenant 1 et  $w$ , il contient  $\mathcal{R}$ , donc  $Z(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ .
  - c) Puisque  $Z(\mathcal{R})$  est contenu dans  $\mathcal{R}$  il est discret. Comme  $Z(\mathcal{R})$  contient  $\mathbb{Z}$  et n'est pas contenu dans  $\mathbb{R}$ , c'est un réseau d'après II.4. Enfin, il existe un élément basique  $\delta \in Z(\mathcal{R}) \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}$  (d'après II.2.b) et l'on a  $\delta\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$  (d'après II.2.c), donc  $\delta = \pm 1$ . Cela prouve que 1 est basique. Autrement dit, le réseau  $Z(\mathcal{R})$  admet une base de la forme  $(1, \tau)$ .
  - d) D'après III.1.c),  $\tau^2 \in Z(\mathcal{R})$ , donc il existe  $a, b \in \mathbb{Z}$  tels que  $\tau^2 = a + b\tau$ . Autrement dit,  $\tau$  est racine du polynôme  $X^2 + pX + q$  où  $p = -b$  et  $q = -a$  sont des entiers. Le trinôme  $X^2 + pX + q$  admet une racine non réelle ( $\tau$ ) donc son discriminant est strictement négatif. On a donc  $p^2 - 4q < 0$  et  $4q = p^2 - (p^2 - 4q) > 0$ , donc  $q > 0$ .

- e) Ecrivons  $p = 2k + p'$  avec  $p' = 0$  ou  $p' = 1$ . Posons  $\tau' = \tau + k$ . Puisque  $(1, \tau)$  est une base de  $Z(\mathcal{R})$ , il en va de même pour  $(1, \tau')$ . Or  $\tau'$  est racine du trinôme  $(X - k)^2 + p(X - k) + q = X^2 + p'X + q'$  avec  $q' = k^2 - pk + q$ .

#### IV. Rotations de centre 0 laissant stable un réseau

1. Un élément non réel de  $\mathbb{Z}[\tau]$  s'écrit  $a + b\tau$  avec  $b \neq 0$ .
  - a) Lorsque  $\tau = i\sqrt{q}$ , on a  $|a + b\tau|^2 = a^2 + qb^2$ . Le module sera minimum si  $|a|$  et  $|b|$  sont les plus petits possibles soit  $a = 0$  et  $b = \pm 1$ .
  - b) Si  $\tau = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{4q - 1})$ , on a  $4|a + b\tau|^2 = (2a - b)^2 + (4q - 1)b^2$ . En particulier  $|\tau|^2 = q$ . Puisque  $|b| \geq 1$ , on ne peut avoir  $(2a - b)^2 + (4q - 1)b^2 \leq 4q$  à moins que  $|b| = 1$  et  $|2a - b| \leq 1$ . Cela donne les 4 points suivants :  $\tau, -\tau, \tau + 1$  et  $-\tau - 1$ .
2. Les rotations de centre 0 qui laissent  $\mathbb{Z}[\tau]$  invariant sont des similitudes de module 1 qui laissent  $\mathbb{Z}[\tau]$  invariant. Ce sont donc des multiplications par des éléments de module 1 de  $\mathbb{Z}[\tau]$ . Le module d'un élément non réel de  $\mathbb{Z}[\tau]$  est  $\geq \sqrt{q}$  d'après la question précédente.
  - \* Si  $q \neq 1$  les seules rotations possibles sont la multiplication par  $\pm 1$ .
  - \* Si  $q = 1$  et  $p = 0$  ( $\tau = i$ ) on obtient les multiplications par  $\pm 1$  et  $\pm i$  soit les rotations d'angle  $k\pi/2$ .
  - \* Si  $q = 1$  et  $p = 1$  ( $\tau = j$ ) on obtient les multiplications par  $\pm 1, \pm\tau$  et  $\pm\tau + 1$  soit les rotations d'angle  $k\pi/3$ .
3. a) Soit  $u_0 \in I$ . Comme  $I$  est contenu dans  $\mathcal{R}$  qui est discret, l'ensemble  $\{u \in I \setminus \{0\}; |u| \leq |u_0|\}$  est fini, donc il existe un élément  $u$  de module minimum dans cet ensemble. On aura bien  $|u| \leq |w|$  pour tout  $w \in I \setminus \{0\}$ .
  - b) Posons  $v = \tau u$ . Comme  $I$  est un idéal, on a bien  $v \in I$ ; comme  $|v| = |u|$ , on a bien  $|v| = \min\{|w|; w \in I \setminus \mathbb{R}u\}$ . Par II.4. le réseau  $I$  est égal à  $\mathcal{R}(u, v)$ .
  - c) On a démontré que tout idéal non nul de  $I$  est de la forme  $\mathcal{R}(u, \tau u) = u\mathbb{Z}[\tau]$ . Donc l'anneau  $\mathbb{Z}[\tau]$  est principal.
4. Soit  $I$  un idéal non nul de  $\mathbb{Z}[\tau]$ . Soit  $u \in I$  un élément non nul de module minimum. Comme  $\tau u \in I$ ,  $I$  n'est pas contenu dans  $\mathbb{R}u$ . Soit  $v \in I$  un élément non colinéaire à  $u$  de module minimum. D'après II.4, on a  $I = \mathcal{R}(u, v)$ .  
 Posons  $q = \frac{v}{u}$ . Comme  $|u| \leq |v|$  on a  $|q| \geq 1$ . Comme  $|v \pm u| \geq |v|$ , il vient  $|q \pm 1| \geq |q|$  et comme  $q$  et  $q \pm 1$  ont même partie imaginaire, il vient  $|(\operatorname{Re} q) \pm 1| \geq |\operatorname{Re} q|$  ce qui donne  $|\operatorname{Re} q| \leq \frac{1}{2}$ . Enfin, puisque  $|q| \geq 1$ , il vient  $(\operatorname{Im} q)^2 \geq 1 - \frac{1}{4}$ , soit  $|\operatorname{Im} q| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ .  
 Puisque  $\tau u \in I = \mathcal{R}(u, v)$ , il existe  $a, b \in \mathbb{Z}$  tels que  $\tau u = au + bv$ , soit  $\tau = a + bq$ . On a donc  $\operatorname{Im} \tau = b \operatorname{Im} q$ . Comme  $\operatorname{Im} \tau < \sqrt{3}$  cela impose  $b = \pm 1$ , donc  $I = \mathcal{R}(u, v) = \mathcal{R}(u, \tau u) = u\mathbb{Z}[\tau]$  donc  $\mathbb{Z}[\tau]$  est principal.