On utilisera librement la remarque suivante :
**Remarque.** Soient $I$ un intervalle ouvert $a \in I$ et $g, h : I \to \mathbb{R}$ des fonctions, et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On suppose que $g$ est dérivable au sens généralisé en $a$ et $h$ est dérivable en $a$. Alors $\lambda g$ et $g+h$ sont dérivables au sens généralisé en $a$ et l'on a $(\lambda g)'(a) = \lambda g'(a)$ et $(g+h)'(a) = g'(a) + h'(a)$ avec les conventions

$$\lambda.(\pm\infty) = \pm\infty \text{ si } \lambda > 0, \quad \lambda.(\pm\infty) = \mp\infty \text{ si } \lambda < 0 \quad \text{et} \quad \pm\infty + x = \pm\infty \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

## I. La fonction racine cubique

### *A. Dérivées au sens généralisé.*

1. L'application $g^{-1}$ est continue et strictement croissante comme réciproque d'une application continue strictement croissante. Soit $a \in J$. Posons $b = g^{-1}(a)$. Pour $y \in I$ distinct de $b$ posons $h(y) = \dfrac{g(y) - g(b)}{y - b}\cdot$ Pour $x \in J$ distinct de $a$, on a $\dfrac{g^{-1}(x) - g^{-1}(a)}{x - a} = \dfrac{1}{h \circ g^{-1}(x)}$.
   Sachant que $g^{-1}$ est continue en $a$ et $h$ admet la limite $g'(b)$ en $b$, on trouve, la fonction $h \circ g^{-1}$ admet en $a$ la limite $g'(b)$. Comme la fonction $g$ est strictement croissante, la fonction $h$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, donc $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{h \circ g^{-1}(x)} = \dfrac{1}{g'(b)}$ avec les conventions $\dfrac{1}{0} = +\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty} = 0$.
2. (a) Si $g$ admet un maximum local en $c$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in ]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$, on ait $x \in I$ et $g(x) - g(c) \leqslant 0$. Alors, pour $x <\in ]c-\varepsilon, c[$, on a $\dfrac{g(x) - g(c)}{x - c} \geqslant 0$ et pour $x \in ]c, c+\varepsilon[$, on a $\dfrac{g(x) - g(c)}{x - c} \leqslant 0$. On a :
   $g'(c) = \lim\limits_{x \to c,\ x < c} \dfrac{g(x) - g(c)}{x - c}$, donc $g'(c) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ ;
   $g'(c) = \lim\limits_{x \to c,\ x > c} \dfrac{g(x) - g(c)}{x - c}$, donc $g'(c) \in \mathbb{R}_- \cup \{-\infty\}$.
   Il vient $g'(c) = 0$.

   (b) Posons $u = \dfrac{g(b) - g(a)}{b - a}$ et, pour $x \in I$, $h(x) = g(x) - ux$. La fonction $h$ est dérivable au sens généralisé, pour $x \in I$ on a, on a $h'(x) = g'(x) - u$ (avec la convention $\pm\infty - u = \pm\infty$) et $h(a) = h(b)$. Nous devons démontrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $h'(c) = 0$.
   Comme la fonction $h$ est continue sur le segment $[a, b]$ elle y est bornée et y atteint ses bornes. Posons $m = \inf\{h(x);\ x \in [a, b]\}$ et $M = \sup\{h(x);\ x \in [a, b]\}$. Si $m = M$, alors $h$ est constante sur $[a, b]$, et on trouve $h'(c) = 0$ pour tout $c \in [a, b]$. Sinon, $m$ et $M$ ne peuvent être tous deux égaux à $h(a)$ ; quitte à changer $g$ en $-g$, on peut supposer que $M \neq h(a)$. Comme le « sup » est atteint, il existe $c \in [a, b]$ tel que $h(c) = M$ ; comme $h(b) = h(a) < M$, il vient $c \in ]a, b[$. Alors $h$ atteint un maximum local en $c$, donc $h'(c) = 0$ d'après (a).
3. (a) D'après la question 2.b), il existe $c \in J_x$ tel que $g'(c) = \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}\cdot$ Donc $\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} \in \{g'(y);\ y \in J_x\}$ et en particulier $\inf\{g'(y),\ y \in J_x\} \leqslant \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} \leqslant \sup\{g'(y),\ y \in J_x\}$ (ces bornes étant bien sûr prises dans $\overline{\mathbb{R}}$).

   (b) Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, posons $V_\alpha = ]a - \alpha, a[ \cup ]a, a + \alpha[$. Par hypothèse, pour tout intervalle ouvert $U$ de $\overline{\mathbb{R}}$ contenant $\ell$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour $y \in V_\alpha$ on ait $f'(y) \in U$ ; pour $x \in V_\alpha$, on a $J_x \subset V_\alpha$ ; on a alors $\inf\{g'(y),\ y \in J_x\} \in \overline{U}$ et $\sup\{g'(y),\ y \in J_x\} \in \overline{U}$. Cela démontre que $\inf\{g'(y),\ y \in J_x\}$ et $\sup\{g'(y),\ y \in J_x\}$ tendent vers $\ell$ (dans $\overline{\mathbb{R}}$) lorsque $x$ tend vers $a$. D'après (a) et en utilisant le théorème des « encadrements », on trouve $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} = \ell$. Autrement dit $g$ est dérivable au sens généralisé en $a$ et $g'(a) = \ell$.

### *B. La fonction racine cubique*

1. (a) Posons $g(x) = x^3$. La fonction $g$ est strictement croissante, dérivable et bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. D'après 1.(a), sa fonction réciproque $f$ est dérivable au sens généralisé. En particulier, on a $f'(0) = \dfrac{1}{g'(f(0))} = \dfrac{1}{0} = +\infty$.

   (b) Pour $s \in \mathbb{R}^*$, on a $f'(s) = \dfrac{1}{g'(f(s))} = \dfrac{|s|^{-2/3}}{3}\cdot$ La fonction $f'$ est paire et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a donc $f'(s) \leqslant f'(t) \iff f'(|s|) \leqslant f'(|t|) \iff |s| \geqslant |t|$.

(c) La fonction $g : x \mapsto f(x+a) - f(x-a)$ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable en tout point $x$ distinct de $\pm a$, et l'on a $g'(x) = f'(x+a) - f'(x-a)$. Pour $x < 0$, on a $|x+a| < |x-a|$ donc $f'(x+a) > f'(x-a)$ ; donc $g$ est croissante sur $]-\infty, -a[$ et sur $]-a, 0[$ ; pour $x > 0$, on a $|x+a| > |x-a|$ donc $f'(x+a) < f'(x-a)$ ; donc $g$ est décroissante sur $]0, a[$ et sur $]a, +\infty[$. La fonction $g$ atteint donc son maximum en 0.

(d) Si $x = y$ il n'y a rien à démontrer ; sinon, posons $a = \left|\dfrac{x-y}{2}\right|$ et $z = \dfrac{x+y}{2}$ de sorte que $x = z+a$ et $y = z-a$ ou $x = z-a$ et $y = z+a$ ; comme $f$ est croissante, on a $|f(x) - f(y)| = |f(z+a) - f(z-a)| = f(z+a) - f(z-a)$ ; comme $f$ est impaire on a $f(a) - f(-a) = 2\left|f\left(\dfrac{x-y}{2}\right)\right|$. La question (c) donne donc $|f(x) - f(y)| \leqslant 2\left|f\left(\dfrac{x-y}{2}\right)\right|$.

(e) Soit $\varepsilon > 0$ ; comme $f$ est continue en 0, il existe $\alpha$ tel que pour tout $z \in \mathbb{R}$ tel que $|z| < \alpha$ on ait $|f(z)| < \varepsilon$. D'après (d), on trouve que si $|x-y| < 2\alpha$, $|f(x) - f(y)| < 2\varepsilon$. Donc $f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

2. (a) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$, on a $\dfrac{1}{4}x^2 + xy + y^2 = \left(y + \dfrac{x}{2}\right)^2 \geqslant 0$, donc $x^2 + xy + y^2 \geqslant \dfrac{3}{4}x^2$.

(b) Soient $x_0, x \in \mathbb{R}$ tels que $x_0 \neq 0$ et $x \neq x_0$. Posons $y = f(x)$ et $y_0 = f(x_0)$. On a

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{y^3 - y_0^3} = \frac{1}{y_0^2 + y_0 y + y^2}.$$

D'après (a), on a on a $y_0^2 + y_0 y + y^2 \geqslant \dfrac{3}{4}y_0^2 > 0$, donc $0 < \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant \dfrac{4}{3y_0^2}$. Or $f'(x_0) = \dfrac{1}{3y_0^2}$, donc $0 < \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 4f'(x_0)$.

### *C. Construction d'une suite dense.*

1. (a) La fonction $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(t) = \cos t - t \sin t$. Puisque $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, la fonction $g \circ f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour $t \neq 0$, on a $(g \circ f)'(t) = f'(t) g'(f(t))$. Or $\lim\limits_{t \to 0} f'(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to 0} g'(f(t)) = g'(f(0)) = 1$, donc $\lim\limits_{t \to 0} (g \circ f)'(t) = +\infty$. D'après A.3.(b), cela implique que $g \circ f$ est dérivable au sens généralisé en 0 et $(g \circ f)'(0) = +\infty$.

(b) Remarquons que pour $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{3f(x)^2}$, de sorte que $(g \circ f)'(x) = h(f(x))$, où l'on a posé $h(t) = \dfrac{g'(t)}{3t^2} = \dfrac{\cos t}{3t^2} + \dfrac{\sin t}{t}\cdot$ Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} h(t) = 0$, il vient $\lim\limits_{x \to +\infty} (g \circ f)'(x) = 0$.

2. (a) Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $g(k\pi) = (-1)^k k\pi$ et $g((k+1)\pi) = (-1)^{k+1}(k+1)\pi$. Si $x \in \mathbb{R}$ satisfait $k\pi \geqslant |x|$, alors $x$ est dans le segment d'extrémités $g(k\pi)$ et $g((k+1)\pi)$. Puisque $g$ est continue, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un nombre $y(k, x) \in [k\pi, (k+1)\pi]$ tel que $g(y(k, x)) = x$. Or $g((k+1)\pi) \neq x$, donc $y(k, x) \in [k\pi, (k+1)\pi[$

(b) On a $a_{n_k} - x = (g \circ f)(n_k) - (g \circ f)(y(k, x)^3)$ de sorte qu'il existe $z_k \in [n_k, y(k, x)^3]$ tel que $a_{n_k} - x = (n_k - y(k, x)^3)(g \circ f)'(z_k)$. Lorsque $k \to \infty$, puisque $y(k, x) \geqslant k\pi$ et $z_k \geqslant y(k, x)^3 - 1$, il vient $z_k \to \infty$, donc $(g \circ f)'(z_k) \to 0$. Comme $|n_k - y(k, x)^3| < 1$, il vient $\lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k} - x = 0$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par la question précédente, il existe une suite $(n_k)$ de nombres entiers naturels telle que $\lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k} = x$ ; donc $x$ est adhérent à $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Cela étant vrai pour tout $x$, l'adhérence de $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est $\mathbb{R}$, autrement dit $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

4. Rappelons que pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$ la série de terme général $(n^{-\alpha})$ converge. Comme $0 < \lambda_n < n^{-2}$ la la série de terme général $(\lambda_n)$ converge. On a $|a_n| \leqslant n^{1/3}$, donc $|f(a_n)| \leqslant n^{1/9}$, donc $|\lambda_n f(a_n)| \leqslant n^{-\alpha}$ avec $\alpha = 2 - 1/9$. On en déduit que la série $\lambda_n f(a_n)$ est absolument convergente donc convergente.

## II. Construction de la fonction *F*

1. ***Construction.***

(a) Remarquons d'abord que la série de terme général $\lambda_n f(-a_n) = -\lambda_n f(a_n)$ converge par hypothèse. Soit $M \in \mathbb{R}_+$. Pour $|x| \leqslant M$, on a $|f(x - a_n) - f(-a_n)| \leqslant 2|f(x/2)|$ d'après la question B.1.(d). Donc $|\lambda_n(f(x - a_n) - f(-a_n))| \leqslant 2^{2/3} M^{1/3} \lambda_n$. Il s'ensuit que la série de fonctions de terme général $\lambda_n(f(x - a_n) - f(-a_n))$ converge normalement sur l'intervalle $[-M, M]$. Il en résulte que la série de fonctions de terme général $x \mapsto \lambda_n f(x - a_n)$ converge uniformément sur $[-M, M]$. Si $K$ est un compact de $\mathbb{R}$, il est borné donc contenu dans un intervalle de la forme $[-M, M]$. Il en résulte que la série de fonctions de terme général $x \mapsto \lambda_n f(x - a_n)$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}$.

(b) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. Alors $F(y) - F(x)$ est somme des nombres strictement positifs $\lambda_n\big(f(y - a_n) - f(x - a_n)\big)$ (vu que $f$ est strictement croissante et les $\lambda_n$ sont strictement positifs) donc est strictement positif. Ainsi, la fonction $F$ est strictement croissante. Sa restriction à chaque compact de $\mathbb{R}$ est continue comme somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues. Donc $F$ est continue.

(c) Posons $G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n f(x - a_n)$. De même que $F$, la fonction $G$ est strictement croissante. Pour $x > a_0$, on a $G(x) > G(a_0)$, donc $F(x) - F(a_0) = \lambda_0 f(x - a_0) + G(x) - G(a_0) > \lambda_0 f(x - a_0)$ ; pour $x < a_0$, on trouve de même $F(x) - F(a_0) = \lambda_0 f(x - a_0) + G(x) - G(a_0) < \lambda_0 f(x - a_0)$.

(d) On a $\lim_{x \to +\infty} f(x - a_0) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x - a_0) = -\infty$. Comme pour $x > a_0$ on a $F(x) > F(a_0) + \lambda_0 f(x - a_0)$, on en déduit que $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$. De même $\lim_{x \to -\infty} F(x) = -\infty$

(e) L'application $F$ est strictement croissante donc injective ; comme elle est continue, son image est un intervalle ; par (d) elle n'est ni majorée ni minorée, donc son image est $\mathbb{R}$. En d'autres termes elle est surjective, donc bijective.

2. Pour $x, x_0 \in \mathbb{R}$ tels que $x \neq x_0$, on a $F(x) - F(x_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k (f(x - a_k) - f(x_0 - a_k))$, donc

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0}.$$

Or, comme $f$ est croissante, cette série est à termes positifs, donc sa somme majore ses sommes partielles. Autrement dit, pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} \leqslant \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}.$$

3. Comme $f'(0) = +\infty$, on a $\lim_{x \to a_n} \frac{f(x - a_n)}{x - a_n} = +\infty$. Or

$$\lambda_n \frac{f(x - a_n)}{x - a_n} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(a_n - a_k)}{x - a_n} \leqslant \frac{F(x) - F(a_n)}{x - a_n}.$$

Donc $\lim_{x \to a_n} \frac{F(x) - F(a_n)}{x - a_n} = +\infty$. Donc $F$ est dérivable au sens généralisé en $a_n$ et $F'(a_n) = +\infty$.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $g : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x - a_k)$ est dérivable en $x_0$ et sa dérivée vaut $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x - a_k)$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $0 < |x - x_0| < \varepsilon$, alors $\left| \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - g'(x_0) \right| \leqslant 1$ et en particulier $1 + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x - a_k)$.

(b) Soit $M \in \mathbb{R}_+$. Comme la série de terme général (positif) $(\lambda_n f'(x_0 - a_n))$ est supposée divergente, il existe $n$ tel que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x - a_k) \geqslant M + 1$. Par (a), il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $0 < |x - x_0| < \varepsilon$, on a $1 + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x - a_k)$ ; dans ce cas, on a

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} \geqslant -1 + \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x_0 - a_k) \geqslant M.$$

Cela démontre que $\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = +\infty$, autrement dit que $F$ est dérivable au sens généralisé en $x_0$ et $F'(x_0) = +\infty$.

5. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq x_0$, on a d'après I.B.2.(b)

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} \leqslant 4 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0 - a_k),$$

soit

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} + 4 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0 - a_k).$$

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Comme la série de terme général $\lambda_n f'(x_0 - a_n)$ est convergente, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0 - a_k) < \varepsilon/4$. Posons $\beta = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0 - a_k)$ et notons $g$ l'application $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f(x - a_k)$. L'application $g$ est dérivable en $x_0$ et $g'(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x_0 - a_k)$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour $x \in \mathbb{R}$ satisfaisant $0 < |x - x_0| < \alpha$ on ait $\left|\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - g'(x_0)\right| \leqslant \varepsilon/4$. Alors d'après les questions 2. et 5.(a) on a

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \leqslant \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leqslant \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + 4\beta.$$

Posons $\ell = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0 - a_k) = g'(x_0) + \beta$. On a

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \geqslant g'(x_0) - \varepsilon/4 \geqslant \ell - \varepsilon/2,$$

et

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + 4\beta \leqslant g'(x_0) + \varepsilon/4 + 4\beta = \ell + \varepsilon/4 + 3\beta \leqslant \ell + \varepsilon.$$

Il vient $\ell - \varepsilon/2 \leqslant \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leqslant \ell + \varepsilon$.
On a donc démontré que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ satisfaisant $0 < |x - x_0| < \alpha$, on ait

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - \ell\right| \leqslant \varepsilon.$$

Donc $F$ est dérivable en $x_0$ et $F'(x_0) = \ell$.

6. La fonction $F$ est dérivable au sens généralisé en tout point de $\mathbb{R}$. D'après la question I.A.1. la fonction réciproque $F^{-1}$ de $F$ est dérivable au sens généralisé en tout point de $\mathbb{R}$ ; de plus, pour $x \in \mathbb{R}$, si $F'(x) \neq +\infty$, alors $F'(x) \geqslant \lambda_0 f'(x - a_0) > 0$, donc $F'$ ne s'annule pas. Donc $(F^{-1})'$ est partout fini. En d'autres termes $F^{-1}$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.

## III. Parties denses de $\mathbb{R}$

### *A. Intersections d'ouverts denses.*

1. (a) Démontrons l'existence de $u_n$ et $v_n$ par récurrence sur $n$. Comme $V_0$ est ouvert et dense et $I$ est ouvert et non vide, $V_0 \cap I$ est ouvert et non vide, donc contient un segment $[u_0, v_0]$.
Supposons $u_n$ et $v_n$ construits. Comme $V_{n+1}$ est ouvert et dense et $]u_n, v_n[$ est ouvert et non vide, $V_{n+1} \cap ]u_n, v_n[$ est ouvert et non vide, donc contient un segment $[u_{n+1}, v_{n+1}]$.
(b) La suite $u_n$ est croissante et la suite $v_n$ est décroissante. Comme $u_n < v_n < v_0$ la suite $u_n$ est majorée donc convergente. Soit $u$ sa limite. De même la suite $v_n$ est décroissante et minorée donc convergente. Soit $v$ sa limite. Comme pour tout $n$ on a $u_n < v_n$, il vient $u \leqslant v$. Comme $u_n$ est croissante et $v_n$ décroissante, on a $u_n \leqslant u \leqslant v \leqslant v_n$. Donc pour tout $n$, on a $u \in [u_n, v_n]$. En particulier $u \in [u_0, v_0]$ donc $u \in I$ et $u \in [u_n, v_n] \subset V_n$. Donc $u \in I \cap B \neq \emptyset$.
2. Comme l'ensemble $B$ rencontre tout ouvert non vide de $\mathbb{R}$, il est dense dans $\mathbb{R}$.
3. L'ensemble $V'_n = V_n \cap \mathbb{R} - \{x_n\}$ est ouvert et dense donc $B' = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V'_n$ est dense dans $\mathbb{R}$. Or $B' = B - \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

### *B. Parties contenant des « gros compacts »*

1. (a) Comme $c_k \in I_k$, les ouverts $C \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$ recouvrent. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C \not\subset \bigcup_{k=0}^{n} I_k$ ; alors il existe une suite $x_n \in C$ telle que $x_n \notin \bigcup_{k=0}^{n} I_k$. On peut alors extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $y \in C$. Comme $C \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$, il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $y \in I_\ell$ ; comme $I_\ell$ est ouvert, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $x_{\varphi(n)} \in I\ell$ pour $n \geqslant N$. Remarquons que, puisque $\varphi$ est strictement croissante, on a $\varphi(n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ; alors pour $n \geqslant \max(N, \ell)$ et $m = \varphi(n)$, on a $x_m \in I_\ell \subset \bigcup_{k=0}^{m} I_k$, en contradiction avec la construction de $x_m$.

(b) Pour $k \in \mathbb{N}$, notons $h_k : x \mapsto \max(0, \alpha_k - |x - c_k|)$ ; posons $h = \sum_{k=0}^{n} h_k$. La fonction $h$ est continue et positive et l'ensemble des points en lesquels elle n'est pas nulle est $\bigcup_{k=0}^{n} I_k$. En particulier, elle ne s'annule pas sur $C$. Posons $m = \inf\{h(x);\ x \in C\}$. Comme $C$ est compact, cet « inf » de la fonction $h$ est atteint, donc $m > 0$. Posons alors $g(x) = \min\Big(1, \dfrac{h(x)}{m}\Big)$. La fonction $g$ est continue et

– pour tout $x \in C$, on a $h(x) \geqslant m$, donc $g(x) = 1$ ;

– pour tout $x \notin \bigcup_{k=0}^{n} I_k$, on a $h(x) = 0$, donc $g(x) = 0$ .

Notons $\chi_k$ la fonction qui vaut 1 sur $I_k$ et 0 ailleurs et $\varphi = \sum_{k=0}^{n} \chi_k$. La fonction $\varphi$ est en escalier ; pour $x \notin \bigcup_{k=0}^{n} I_k$ on a $g(x) = \varphi(x) = 0$ ; pour $x \in I_k$ ; on a $g(x) \leqslant 1 = \chi_k(x) \leqslant \varphi(x)$. Donc $g \leqslant \varphi$. Or $\int_a^b \chi_k(t)dt \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_k(t)dt = 2\alpha_k$. On trouve

$$\int_a^b g(t)\,dt \leqslant \int_a^b \varphi(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b \chi_k(t)dt \leqslant \sum_{k=0}^{n} 2\alpha_k < \varepsilon.$$

2. (a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Par hypothèse, il existe un compact $C \subset A \cap [a, b]$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour toute fonction continue $g : [a, b] \to [0, 1]$ satisfaisant $g(x) = 1$ pour tout $x \in C$ on ait $\int_a^b g(t)\,dt \geqslant \varepsilon$. D'après 1, $C$ n'est pas dénombrable, donc $A \cap [a, b]$ non plus.

   (b) Soit $D$ une partie dénombrable de $A$. Soit $U$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ ; il contient un segment $[a, b]$ avec $a < b$. Comme $[a, b] \cap A$ n'est pas dénombrable, l'intersection $[a, b] \cap A$ n'est pas contenue dans $D$, donc $(A - D) \cap U \neq \emptyset$. Cela démontre que l'ensemble $A - D$ est encore dense dans $\mathbb{R}$.

## IV. Les points de pente infinie

### *A. Densité des points de pente infinie.*

1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant \lambda_n g_T(x - a_n) \leqslant \lambda_n T$. Comme la série de terme général $\lambda_n T$ est convergente, la série de fonctions de terme général $x \mapsto \lambda_n g_T(x - a_n)$ est normalement convergente. En particulier la série de terme général $\lambda_n g_T(x - a_n)$ converge.

   (b) On a $g_T(0) = T$ et, pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a $g_T(x) = \inf\Big(T, \dfrac{|x|^{-2/3}}{3}\Big)$. La fonction $g_T$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (comme « inf » de deux fonctions continues) et égale à $T$ au voisinage de 0 : elle est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction $G_T$ est somme d'une série normalement convergente de fonctions continues : elle est continue.

   (c) On a vu que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F'(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n f'(x - a_n)$, au sens que si un des termes de la série vaut $+\infty$ ou si cette série à termes positifs diverge, on écrit $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n f'(x - a_n) = +\infty$.

   Comme pour tout $x$, tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $T \in \mathbb{R}_+^*$ on a $g_T(x - a_n) \leqslant f'(x - a_n)$, on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n g_T(x - a_n) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n f'(x - a_n)$, soit $G_T(x) \leqslant F'(x)$. Comme cela a lieu pour tout $T$, on trouve $\sup\{G_T(x);\ T \in \mathbb{R}_+\} \leqslant F'(x)$.

   Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $M < F'(x)$. Alors $M$ ne majore pas les sommes partielles $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x - a_k)$, donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x - a_k) > M$. Si $x$ est égal à un des $a_k$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$, alors, pour $T = \dfrac{M+1}{\lambda_k}$, on a $\lambda_k g_T(x - a_k) = M + 1$, donc $G_T(x) > M$ ; sinon, pour $T = \max\{f'(x - a_k);\ 0 \leqslant k \leqslant n\}$, on a $\sum_{k=0}^{n} g_T(x - a_k) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x - a_k) > M$. Dans tous les cas, on a trouvé $T \in \mathbb{R}_+$ tel que $G_T(x) > M$, donc $\sup\{G_T(x);\ T \in \mathbb{R}_+\} > M$. Cela étant vrai pour tout $M < F'(x)$, on a $\sup\{G_T(x);\ T \in \mathbb{R}_+\} \geqslant F'(x)$.

2. (a) S'il existe $T \in \mathbb{R}_+$ tel que $G_T(x) > M$, alors $F'(x) \geqslant G_T(x) > M$, donc $x \in U_M$. Si $x \in U_M$, alors $F'(x) > M$, et comme $F'(x) = \sup\{G_T(x);\ T \in \mathbb{R}_+\}$, $M$ ne majore pas $\{G_T(x);\ T \in \mathbb{R}_+\}$, donc il existe $T \in \mathbb{R}_+$ tel que $G_T(x) > M$.

(b) Pour tout $T \in \mathbb{R}_+$, la fonction $G_T$ est continue, donc l'ensemble $\{x \in \mathbb{R};\ G_T(x) > M\}$ est ouvert ; la réunion $U_M = \bigcup_{T \in \mathbb{R}_+} \{x \in \mathbb{R};\ G_T(x) > M\}$ est donc ouverte. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $F'(a_n) = +\infty$. Donc $D \subset U_M$ et $U_M$ est dense.

3. On a $A = \{x \in \mathbb{R};\ F'(x) = +\infty\} = \{x \in \mathbb{R};\ \forall M \in \mathbb{N},\ F'(x) > M\} = \bigcap_{M \in \mathbb{N}} U_M$. Comme pour tout $M \in \mathbb{N}$, l'ensemble $U_M$ est ouvert et dense, l'intersection $A$ est dense dans $\mathbb{R}$, et comme $D$ est dénombrable $A - D$ est encore dense dans $\mathbb{R}$ (d'après III.A).

**B. Densité de l'ensemble des points de pente finie.**

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $C = \{x \in [a,b];\ x \notin U_M\}$. Soit $g : [a,b] \to [0,1]$ une fonction continue telle que $g(t) = 1$ pour tout $x \in C$. Pour tout $x \in [a,b]$, on a $g(x) = 1$ ou $F'(x) > M$, donc $Mg(x) + F'(x) \geqslant M$. Posons alors $\Phi(x) = M \int_a^x g(t)dt + F(x)$. La fonction $\Phi$ est continue sur $[a,b]$ dérivable au sens généralisé en tout point de $]a,b[$ et $\Phi'(x) = Mg(x) + F'(x) \geqslant M$ ; il vient $\Phi(b) - \Phi(a) \geqslant M(b-a)$ (d'après I.A.2.(b)) soit $\int_a^b Mg(t)\,dt + F(b) - F(a) \geqslant M(b-a)$.

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\varepsilon > 0$ et $a + \varepsilon < b$. Posons $M = \dfrac{F(b) - F(a)}{b - a - \varepsilon}$ et $C = \{x \in [a,b];\ x \notin U_M\} \subset B \cap [a,b]$. D'après la question précédente, pour toute fonction continue $g : [a,b] \to [0,1]$ satisfaisant $g(x) = 1$ pour tout $x \in C$ on a
$\int_a^b g(t)\,dt \geqslant b - a - \dfrac{F(b) - F(a)}{M} \geqslant \varepsilon$. D'après III.B, pour toute partie dénombrable $N \subset \mathbb{R}$, l'ensemble $B - N$ est dense dans $\mathbb{R}$.