4 Espaces vectoriels normés, espaces de Banach

4.1 Applications linéaires continues

Comme un espace vectoriel normé est, comme on l'a vu muni d'une distance, toutes les notions de continuité, de limite *etc.* , y ont un sens.

Proposition. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Les applications $(x, y) \mapsto x + y$ de $E \times E$ dans E et $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ de $\mathbb{R} \times E$ dans E sont continues.*

Définition. Un espace de Banach est un espace vectoriel (réel ou complexe) normé complet.

Sous-espaces de Banach. On appelle sous-espace de Banach d'un espace de Banach E un sous-espace vectoriel fermé F de E (muni de la restriction à F de la norme de E).

Norme d'une application linéaire. Soient E et F des espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application linéaire. L'application f est continue si et seulement si elle est continue en 0 ce qui a lieu si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ avec $\|f(x)\| \leqslant k\|x\|$ pour tout $x \in E$.
La meilleure constante dans cette inégalité, est le nombre $\sup\{\|f(x)\|;\ \ x \in E,\ \|x\| \leqslant 1\}$ qui s'appelle la *norme* de f et se note $|||f|||$.
Pour $k \in \mathbb{R}_+$ on a $(\|f(x)\| \leqslant k\|x\|$ pour tout $x \in E) \iff (k \geqslant |||f|||)$.
Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des applications linéaires continues, alors $|||g \circ f||| \leqslant |||g|||.|||f|||$.

Proposition. *Soient E et F des espaces vectoriels normés. L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de toutes les applications linéaires de E dans F. L'application $|||\ |||$ est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$. Si F est complet, il en va de même pour $\mathcal{L}(E, F)$.*

Équivalence de normes Soient p et q des normes sur un même espace vectoriel E. On dit que p et q sont *équivalentes* s'il existe $k, \ell \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $k\,p \leqslant q \leqslant \ell\,p$.

Remarquons que les distances associées à des normes équivalentes sont des distances équivalentes, donc uniformément équivalentes.

En particulier si p et q sont des normes équivalentes sur E, alors (E, p) est un espace de Banach si et seulement si (E, q) est un espace de Banach.

Remarquons aussi que contrairement au cas des espaces métriques généraux, il n'y a qu'une seule notion d'équivalence de distances : les distances associées à deux normes sont topologiquement équivalentes si et seulement si elles sont équivalentes.

4.2 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Présentons-les ici à nouveau rapidement.

Sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, on dispose de plusieurs normes : pour $\xi = (x_1, \ldots, x_n)$ on pose
- $\|\xi\|_\infty = \max(|x_1|, \ldots |x_n|)$
- $\|\xi\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$
- $\|\xi\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$.

Ces normes sont équivalentes : on a $\|\xi\|_\infty \leqslant \|\xi\|_2 \leqslant \|\xi\|_1 \leqslant n\|\xi\|_\infty$. Nous allons voir que toutes les normes de $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes. Le point clef est que les boules et les sphères de l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$ sont compactes.

Lemme. *Munissons $\mathbb{R}^n$ de la norme $\| \ \|_\infty$.*

a) Toute application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans un espace vectoriel normé est continue.

b) Toute application linéaire bijective de $\mathbb{R}^n$ dans un espace vectoriel normé est un homéomorphisme.

Démonstration. Notons $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soient (E, N) un espace vectoriel normé et $\varphi : \mathbb{R}^n \to E$ une application linéaire.

a) Pour tout $\xi = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\varphi(\xi) = \varphi(x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) = x_1\varphi(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_n\varphi(\mathbf{e}_n),$$

donc

$$N\big(\varphi(\xi)\big) \leqslant |x_1| N\big(\varphi(\mathbf{e}_1)\big) + \cdots + |x_n| N\big(\varphi(\mathbf{e}_n)\big) \leqslant \|\xi\|_\infty \Big(N\big(\varphi(\mathbf{e}_1)\big) + \cdots + N\big(\varphi(\mathbf{e}_n)\big)\Big);$$

en d'autres termes, φ est continue et l'on a $\|\varphi\| \leqslant N\big(\varphi(\mathbf{e}_1)\big) + \cdots + N\big(\varphi(\mathbf{e}_n)\big)$.

b) Supposons φ bijective. Notons $S = \{\xi \in \mathbb{R}^n ; \|\xi\|_\infty = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. L'application $N \circ \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ est continue d'après (a). Comme φ est injective et N est une norme, pour tout $\xi \in S$, on a $N\big(\varphi(\xi)\big) > 0$. Comme S est compact, il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ qui minore $\{N \circ \varphi(\xi); \xi \in S\}$. Soit $\xi \in \mathbb{R}^n$; si ξ n'est pas nul, posons $\eta = \|\xi\|_\infty^{-1}\xi$. Alors $\eta \in S$, donc $N\big(\varphi(\eta)\big) \geqslant a$; on en déduit que $N\big(\varphi(\xi)\big) \geqslant a\|\xi\|_\infty$. Cette dernière égalité étant aussi vraie si ξ est nul, on en déduit que, pour tout $u \in E$, on a $N(u) = N\Big(\varphi\big(\varphi^{-1}(u)\big)\Big) \geqslant a\|\varphi^{-1}(u)\|_\infty$, ou encore $\|\varphi^{-1}(u)\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{a}N(u)$. Donc φ^{-1} est continue (et $\|\varphi^{-1}\| \leqslant a^{-1}$). □

Théorème. *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.*

a) Toutes les normes sur E sont équivalentes.
Munissons E d'une norme.

b) Toute application linéaire de E dans un espace vectoriel normé est continue.

Démonstration. Choisissons une application linéaire bijective φ de $\mathbb{R}^n$ sur E, où n désigne la dimension de E.

a) Soient N et N' des normes sur E. Par le lemme ci-dessus, l'application φ^{-1} est un homéomorphisme de (E, N) sur $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$ et l'application φ est un homéomorphisme de $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$ sur (E, N'). Leur composée, l'identité de E, est donc un homéomorphisme de (E, N) sur (E, N').

b) Soit ψ une application linéaire de E dans un espace vectoriel normé F. Par le lemme ci-dessus, l'application φ^{-1} est un homéomorphisme de E sur $\mathbb{R}^n$ et l'application $\psi \circ \varphi$ est continue de $\mathbb{R}^n$ dans F. Leur composée ψ est donc continue. □

Il résulte de ce théorème que pour tout espace vectoriel normé E de dimension finie n, il existe un homéomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^n$ sur E.

Proposition. *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.*

Corollaire. *Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé.*

Théorème de Riesz. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé. On a équivalence entre :*

(i) E est de dimension finie

(ii) La fermée B de centre 0 et de rayon 1 est compacte

(iii) E est localement compact i.e. tout point admet un voisinage compact.

Démonstration. **(i)⇒(iii)** Tout espace vectoriel normé de dimension finie n est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. Il est donc localement compact.

(iii)⇒(ii) Soit (E, N) un espace vectoriel normé localement compact. Soit V un voisinage compact de 0 dans E. Il existe alors $r > 0$ tel que V contienne la boule fermée de centre 0 et de rayon r. Comme cette boule est fermée dans le compact V, elle est compacte. Comme la multiplication par $1/r$ est continue B est compacte.

(ii)⇒(i) Nous utiliserons un lemme :

Lemme. *Soit F un sous espace vectoriel fermé de E distinct de E. Il existe $x \in E$ tel que $N(x) \leqslant 1$ et $d(x, F) = \inf\{N(x - z);\ z \in F\} \geqslant 1/2$.*

Démonstration. Puisque $E \neq F$, il existe $y \in E \notin F$. Comme F est fermé, $d(y, F) \neq 0$. Quitte à remplacer y par $\dfrac{1}{2d(y, F)}y$, on peut supposer que $d(y, F) = \inf\{N(y - z);\ z \in F\} = 1/2$. Il existe alors $z \in F$ tel que $x = y - z$ satisfasse $N(x) \leqslant 1$. Notons que $d(x, F) = d(y, F) = 1/2$. □

Supposons que E n'est pas de dimension finie et construisons, par récurrence, une suite x_n de points de B telle que, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n \neq m$, on a $N(x_n - x_m) \geqslant 1/2$.

Posons $x_0 = 0$. Supposons $(x_0, \dots, x_n)$ construits, et notons F le sous-espace vectoriel qu'ils engendrent. Il est de dimension finie, donc fermé et distinct de E. D'après le lemme, il existe $x_{n+1} \in E$ tel que $N(x_{n+1}) \leqslant 1$ et $d(x_{n+1}, F) \geqslant 1/2$. En particulier, puisque pour $k \leqslant n$ on a $x_k \in F$, il vient $N(x_k - x_{n+1}) \geqslant 1/2$. Toute suite extraite de la suite (x_n) ainsi construite, n'est pas de Cauchy, donc elle n'est pas convergente. Il s'ensuit que B n'est pas compacte. □

Le théorème de Riesz nous dit que dans un espace vectoriel normé de dimension infinie, les boules fermées de rayon non nul ne sont pas compactes. En particulier, en dimension infinie, *les fermés bornés ne sont pas toujours compacts.*

4.3 Espaces préhilbertiens

Produit scalaire. Soit E un espace vectoriel réel. Une forme bilinéaire symétrique $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est dite *positive* si pour tout $x \in E$, on a $\varphi(x, x) \in \mathbb{R}_+$. Si de plus on a $\varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$, on dit que φ est *définie positive* (ou positive non dégénérée).

Un *produit scalaire* sur E est une forme bilinéaire définie positive.

Un *espace préhilbertien* est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

En général, les produits scalaires se notent $(x, y) \mapsto \langle x|y\rangle$.

Lorsque E est un espace vectoriel complexe, un produit scalaire est une forme *sesquilinéaires* $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ (linéaire par rapport à une des variables, antilinéaire par rapport à l'autre ([7]) hermitienne ($\varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}$ pour $x, y \in E$) définie positive.

7. Les deux conventions existent : selon les auteurs, c'est l'application $x \mapsto \varphi(x, y)$ ou l'application $y \mapsto \varphi(x, y)$ qui est linéaire.

Inégalité de Cauchy-Schwarz. Soit φ une forme hermitienne positive sur un espace vectoriel E. Pour tout $x, y \in E$, on a $|\varphi(x,y)|^2 \leqslant \varphi(x,x)\varphi(y,y)$.

Norme associée. Si $(E, \langle\ |\ \rangle)$ est un espace préhilbertien, l'application $x \mapsto \langle x|x\rangle^{1/2}$ est une norme sur E notée $\|\ \|$. Un espace préhilbertien est donc un espace vectoriel normé.

Théorème de Pythagore. Soient $(E, \langle\ |\ \rangle)$ un espace préhilbertien, et $x, y \in E$. On a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re\langle x|y\rangle$. Donc si x et y sont orthogonaux, *i.e.* si $\langle x|y\rangle = 0$, on a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Familles orthonormales.. Une famille $(e_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est dite orthonormale si les e_i sont deux à deux orthonormaux de norme 1.

Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ une famille orthonormée et $x \in E$. Notons F le sous-espace vectoriel engendré par les e_i. Posons $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \langle x|e_i\rangle e_i$. Alors $y \in F$ et $\langle y|e_i\rangle = \langle x|e_i\rangle$, donc $x - y \in F^\perp$. Pour $z \in F$ on a $y - z \in F$ et $x - y \in F^\perp$ donc $\|x-z\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 \geqslant \|x-y\|^2$ donc $d(x,F)^2 = \|x-y\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2 = \|x\|^2 - \displaystyle\sum_{i=1}^{k} |\langle x|e_i\rangle|^2$.

Procédé d'orthonormalisation de (Gram-)Schmidt. Un espace vectoriel hermitien de dimension finie possède une base orthonormale. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une base de E ; il existe une unique base orthonormale de E vérifiant les deux conditions suivantes :

a) Pour $k = 1, \ldots, n$ les espaces vectoriels engendrés par $(e_1, \ldots, e_k)$ et $(x_1, \ldots, x_k)$ coïncident ;

b) $\langle e_k|x_k\rangle \in \mathbb{R}_+$.

La construction des e_k est algorithmique : on pose $y_1 = x_1$ et $e_1 = \|y_1\|^{-1} y_1$; supposant $(e_1, \ldots, e_k)$ construits, on pose $y_{k+1} = x_{k+1} - \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \langle x|e_i\rangle e_i$ puis $e_{k+1} = \|y_{k+1}\|^{-1} y_{k+1}$.

Notons que la matrice de passage de la base $(e_1, \ldots, e_n)$ à $(x_1, \ldots, x_n)$ est triangulaire supérieure avec des coefficients strictement positifs sur la diagonale. On peut interpréter ce procédé de deux façons :

Décomposition d'Iwasawa. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$; il existe une unique matrice $K \in O(n)$ et T triangulaire supérieure avec des coefficients strictement positifs sur la diagonale telles que $A = KT$.
En effet, écrivons A comme matrice de passage $P_{B_0,B}$ de la base (orthonormée) canonique B_0 dans une base B. Écrire $A = KT$ c'est trouver une base B_1 telle que la matrice de passage P_{B_0,B_1} soit orthogonale et $P_{B_1,B}$ soit triangulaire supérieure avec des coefficients strictement positifs sur la diagonale : c'est la base du procédé de (Gram-)Schmidt.

Décomposition de Cholesky. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ définie positive ; il existe une unique matrice T triangulaire supérieure avec des coefficients strictement positifs sur la diagonale telles que $A = {}^tTT$.
En effet, la matrice A est la matrice d'un produit scalaire dans une base B. Si T triangulaire supérieure avec des coefficients strictement positifs sur la diagonale est la matrice de passage d'une B_0 vers B, alors B_0 est orthonormée si et seulement si la matrice du produit scalaire dans la base B_0 est I_n, *i.e.* si et seulement si $A = {}^tTT$.

Exemples de produits scalaires. Suites de carré sommable. Notons ℓ^2 lespace vectoriel des suites $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 < +\infty$. Pour $(a_n), (b_n) \in \ell^2$, la série de terme général $(a_n b_n)$ converge (car $|2a_n b_n| \leqslant a_n^2 + b_n^2$). On pose $\big\langle (a_n)|(b_n)\big\rangle = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$.

Fourier Notons D l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes, périodiques de période 2π, et telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $2f(x) = \lim\limits_{t\to 0} f(x+t) + f(x-t)$. Pour $f, g \in E$, posons $\langle f|g\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt$.

4.4 Polynômes orthogonaux

Nous développons ici un troisième exemple de prduit scalaire.

Soient $I =]a, b[$ un intervalle ouvert non vide et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive. On suppose que l'ensemble $\{t \in]a, b[; \varphi(t) \neq 0\}$ est dense dans I. Notons E_φ l'ensemble des fonctions continues $g \in C(I; \mathbb{R})$ telles que la fonction $t \mapsto \varphi(t)\big|g(t)\big|^2$ soit intégrable. L'ensemble E_φ est un sous-espace vectoriel de $C(I; \mathbb{R})$ et l'application $(f, g) \mapsto \langle f|g\rangle = \displaystyle\int_a^b \varphi(t)f(t)g(t)\,dt$ est un produit scalaire sur E_φ.

Supposons de plus que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $t \mapsto \varphi(t)t^{2n}$ est intégrable sur I, de sorte que $t \mapsto t^n$ appartient à E_φ ; on en déduit que toute fonction polynomiale appartient à E_φ.

Comme I est ouvert et non vide, il est infini. Donc l'application qui à un polynôme P associe l'élément $t \mapsto P(t)$ de $C(I; \mathbb{R})$ est injective. Pour simplifier les notations qui suivent, nous identifierons abusivement polynôme et application polynomiale définie sur I. En particulier, on note X l'application $t \mapsto t$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons E_n le sous-espace vectoriel de E_φ formé des polynômes de degré $< n$. Notons P_n le projecteur orthogonal de E_{n+1} d'image E_n. Enfin posons $h_n = X^n - P_n(X^n)$. On a les propriétés suivantes :

a) comme $P_n(X^n)$ est un polynôme de degré $< n$, h_n est un polynôme unitaire de degré n ; en particulier, $h_0 = 1$ et $h_n \in E_{n+1}$;

b) h_n est orthogonal à E_n.

Ces propriétés (a) et (b) caractérisent le polynôme h_n. Notons que si $n \neq m$, alors les polynômes h_n et h_m sont orthogonaux.

Sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X] \subset E_\varphi$, considérons la forme bilinéaire $B : (f, g) \mapsto \langle Xf|g\rangle$; comme $B(f, g) = \displaystyle\int_a^b \varphi(t)tf(t)g(t)\,dt = B(g, f)$, la forme B est symétrique.

Propriétés des polynômes orthogonaux h_n.

- **Formule de récurrence.** Soit $f \in E_{n-1}$; on a $\langle Xh_n|f\rangle = B(h_n, f) = B(f, h_n) = \langle Xf|h_n\rangle = 0$ puisque $Xf \in E_n$. Comme h_{n+1} et Xh_n sont unitaires, il en résulte que $h_{n+1} - Xh_n$ est un élément de E_{n+1} orthogonal à E_{n-1}. Or $E_{n+1} \cap E_{n-1}^\perp$ admet comme base (h_{n-1}, h_n). Il existe donc $\alpha_n \in \mathbb{R}$ et $\beta_n \in \mathbb{R}$ tels que $h_{n+1} = (X - \alpha_n)h_n - \beta_n h_{n-1}$.
- **Interprétation des racines.** Notons $T_n : E_n \to E_n$ l'application $f \mapsto P_n(Xf)$. Pour $f, g \in E_n$, on a $\langle T_n(f)|g\rangle = \langle P_n(Xf)|g\rangle = \langle Xf|g\rangle$, puisque $Xf - P_n(Xf)$ appartient à $E_n^\perp$. On a donc $\langle T_n(f)|g\rangle = B(f, g)$. En particulier, l'endomorphisme T_n de E_n est symétrique. Il admet donc une base orthonormale de vecteurs propres. Soit f un vecteur propre pour T_n de valeur propre λ. Alors, pour tout $g \in E_n$, on a $0 = \langle T_n(f) - \lambda f|g\rangle = \langle Xf - \lambda f|g\rangle$. On en déduit que $(X - \lambda)f \in E_n^\perp$; comme de plus $(X - \lambda)f$ est de degré $\leqslant n$, il est proportionnel à h_n. En d'autres termes, f est vecteur propre pour la valeur propre λ si et seulement si λ est une racine de h_n et f est proportionnel au quotient de h_n par $X - \lambda$.
- **Position des racines**

  a) Comme T_n est diagonalisable, il admet une base $q_1, \ldots, q_n$ de vecteurs propres ; ce sont des polynômes de degré $n - 1$ que l'on peut évidemment supposer unitaires. Par ce qui précède, on a $(X - \lambda_i)q_i = h_n$ où λ_i est la valeur propre associée ; comme les q_i sont distincts, il existe n nombres réels distincts $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $X - \lambda_i$ divise h_n ; autrement dit, h_n a n racines réelles distinctes.

  b) Soit λ une racine (réelle) de h_n. Si q est le quotient de h_n par $X - \lambda$, on a $h_n = (X - \lambda)q$ et $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)(t - \lambda)q(t)^2\,dt = \langle h_n|q\rangle = 0$, donc $t - \lambda$ ne garde pas un signe constant sur $]a, b[$; on en déduit que $\lambda \in]a, b[$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$. Notons $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ les racines de h_n et $\mu_1 < \cdots < \mu_n < \mu_{n+1}$ celles de h_{n+1}. Pour $j \in \{1, \dots, n+1\}$, notons f_j un vecteur propre de norme 1 de T_{n+1} pour la valeur propre μ_j et, si $j \leqslant n$, notons e_j un vecteur propre de norme 1 de T_n pour la valeur propre λ_j. Si $g = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, on a $\|g\|^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$ et $B(g,g) = \langle T_n(g), g\rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^2$. De même, si $g = \sum_{j=1}^{n+1} y_j f_j$, on a $\|g\|^2 = \sum_{j=1}^{n+1} y_j^2$ et $B(g,g) = \sum_{j=1}^{n+1} \mu_j y_j^2$.

Fixons $k \in \{1, \dots, n\}$. Notons F_-, F_+ les sous-espaces vectoriels de E_n engendrés respectivement par les e_j pour $j \leqslant k$ et par les e_j pour $j \geqslant k$. Notons aussi G_-, G_+ les sous-espaces vectoriels de E_{n+1} engendrés respectivement par les f_j pour $j \leqslant k+1$ et par les f_j pour $j \geqslant k$. La dimension de F_- est k, celle de F_+ est $n-(k-1)$, celle de G_- est $k+1$ et celle de G_+ est $n+1-(k-1)$; donc les sous-espaces vectoriels $F_- \cap G_+$ et $F_+ \cap G_-$ de E_{n+1} ne sont pas nuls. Soient $g \in F_- \cap G_+$ et $h \in F_+ \cap G_-$ des vecteurs non nuls.

Comme $g \in F_- \cap G_+$, il existe $x_1, \dots, x_k, y_k, \dots, y_{n+1} \in \mathbb{R}$ tels que $g = \sum_{j=1}^{k} x_j e_j = \sum_{j=k}^{n+1} y_j f_j$; écrivons aussi $h = \sum_{j=k}^{n} u_j e_j = \sum_{j=1}^{k+1} v_j f_j$. Comme g est un élément non nul de E_n, il n'est pas proportionnel à f_k (qui est de degré n car proportionnel à $h_{n+1}/(X-\mu_k)$) ; il existe donc $j > k$ tel que $y_j \neq 0$. On trouve $B(g,g) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j^2 \leqslant \lambda_k \|g\|^2$ et $B(g,g) = \sum_{j=k}^{n+1} \mu_j y_j^2 > \mu_k \sum_{j=k}^{n+1} y_j^2 = \mu_k \|g\|^2$.
On en déduit que $\mu_k < \lambda_k$.
De même, h n'est pas proportionnel à f_{k+1}, donc $\lambda_k \|h\|^2 \leqslant B(h,h) < \mu_{k+1} \|h\|^2$.
Cela montre que l'on a $\mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \dots \mu_n < \lambda_n < \mu_{n+1}$.

Nous allons à présent donner quelques exemples de polynômes orthogonaux. Nous utiliserons un lemme simple.

Lemme. *Soient $k \in \mathbb{N}$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f une fonction de classe C^{k+1} sur I. On suppose que, pour tout $j \leqslant k$, la fonction $t \mapsto t^j f^{(j)}(t)$ tend vers 0 aux bords de I. Alors l'intégrale $\int_a^b t^k f^{(k+1)}(t)\,dt$ est convergente et l'on a $\int_a^b t^k f^{(k+1)}(t)\,dt = 0$.*

Démonstration. En effet, une primitive de $t \mapsto t^k f^{(k+1)}(t)$ est la fonction $t \mapsto \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \frac{k!}{j!}\, t^j\, f^{(j)}(t)$. □

Exemples. a) On suppose $I = \,]-1,1[$ et $\varphi = 1$. Notons q_n la dérivée n-ième du polynôme $(X^2-1)^n$ et posons $h_n = \frac{n!}{(2n)!} q_n$. C'est un polynôme unitaire. Pour tout $k < n$, on peut écrire $h_n = f^{(k+1)}$, où f est proportionnel à la dérivée d'ordre $n-k-1$ de $(X^2-1)^n$. En particulier, pour tout $j \in \mathbb{N}$, tel que $j \leqslant k$ on a $f^{(j)}(-1) = f^{(j)}(1) = 0$. Par le lemme, on trouve $\int_{-1}^{1} h_n(t) t^k\,dt = 0$. Cela montre que h_n est le n-ième polynôme orthogonal. Ces polynômes h_n s'appellent les *polynômes de Legendre*.

b) On suppose $I = \,]-1,1[$ et, pour $t \in I$, $\varphi(t) = (1-t^2)^{-1/2}$. Rappelons qu'il existe un polynôme T_n de degré n tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $T_n(\cos x) = \cos nx$. Pour $n \neq 0$, le polynôme $2^{1-n} T_n$ est unitaire ; notons le h_n. On pose aussi $h_0 = 1$. Pour $n, m \in \mathbb{N}$ distincts, faisant le changement de variable $t = \cos x$, pour $x \in]0, \pi[$, puisque $\varphi(t)\,dt = -dx$, on trouve

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} T_n(t)T_m(t)\,\varphi(t)\,dt &= -\int_{\pi}^{0} T_n(\cos x)T_m(\cos x)\,dx \\ &= \int_0^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx \\ &= 0, \qquad \text{car } n \neq m.\end{aligned}$$

Cela montre que h_n est le n-ième polynôme orthogonal.

c) On suppose $I =]-1,1[$ et, pour $t \in I$, $\varphi(t) = (1-t^2)^{1/2}$. Rappelons qu'il existe un polynôme S_n de degré n tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin x\, S_n(\cos x) = \sin(n+1)x$. Pour tout n, le polynôme $2^{-n}S_n$ est unitaire; notons le h_n. Pour $n, m \in \mathbb{N}$ distincts, faisant le changement de variable $t = \cos x$, pour $x \in]0, \pi[$, puisque $\varphi(t)\,dt = -(\sin x)^2 dx$, on trouve

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} S_n(t)S_m(t)\,\varphi(t)\,dt &= -\int_{\pi}^{0} (\sin x)^2\, S_n(\cos x)S_m(\cos x)\,dx \\ &= \int_0^{\pi} \sin(n+1)x\, \sin(m+1)x\,dx \\ &= 0, \qquad \text{puisque } n \neq m.\end{aligned}$$

Cela montre que h_n est le n-ième polynôme orthogonal.

Les polynômes T_n et S_n s'appellent les *polynômes de Tchebycheff* de première et deuxième espèce respectivement.

d) On suppose $I =]0, +\infty[$ et, pour $t \in I$, $\varphi(t) = e^{-t}$. La dérivée n-ième de la fonction $t \mapsto t^n e^{-t}$ s'écrit $t \mapsto (-1)^n h_n(t) e^{-t}$, où h_n est un polynôme unitaire de degré n. Pour tout $k < n$, on peut écrire $h_n(t)\,e^{-t} = f^{(k+1)}(t)$, où f est une fonction proportionnelle à la dérivée d'ordre $n-k-1$ de $t \mapsto t^n e^{-t}$. En particulier, pour tout $j \leqslant k$ on a $f^{(j)}(0) = 0$. Par ailleurs, comme $f^{(j)}$ et le produit d'une fonction polynomiale par $t \mapsto e^{-t}$, on a $\lim_{t \to +\infty} f^{(j)}(t)t^j = 0$. Par le lemme précédent, on trouve $\int_0^{+\infty} h_n(t)t^k e^{-t}\,dt = 0$. Cela montre que h_n est le n-ième polynôme orthogonal. Ces polynômes h_n s'appellent les *polynômes de Laguerre*.

e) On suppose $I = \mathbb{R}$ et, pour $t \in I$, $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$. La dérivée n-ième de la fonction $t \mapsto e^{-t^2/2}$ s'écrit $t \mapsto (-1)^n h_n(t) e^{-t^2/2}$, où h_n est un polynôme unitaire de degré n. Pour tout $k < n$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on peut écrire $h_n(t)e^{-t^2/2} = f^{(k+1)}(t)$, où f est proportionnel à la dérivée d'ordre $n-k-1$ de $t \mapsto e^{-t^2/2}$. Comme $f^{(j)}$ et le produit d'une fonction polynomiale par $t \mapsto e^{-t^2/2}$, on a $\lim_{t \to \pm\infty} f^{(j)}(t)t^j = 0$. Par le lemme, on trouve $\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)t^k e^{-t^2/2}\,dt = 0$. Cela montre que h_n est le n-ième polynôme orthogonal. Ces polynômes h_n s'appellent les *polynômes de Hermite*.

4.5 Exercices

4.5.1 Espaces vectoriels normés

4.1 Exercice. Soient E un espace vectoriel normé complexe, B la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 et ℓ une forme linéaire sur E. Montrer que pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda \in \ell(B)$ et $|\mu| \leqslant 1$, on a $\lambda\mu \in \ell(B)$. En déduire que pour toute partie ouverte non vide U de E et toute forme linéaire ℓ non continue, on a $\ell(U) = \mathbb{C}$.

4.2 Exercice. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et p, q des normes sur E.

1. On suppose que $B_p(0,1) \subset \overline{B}_q(0,1)$. Montrer que $q \leqslant p$.
2. On suppose que $B_p(0,1) = B_q(0,1)$. Montrer que $p = q$.

4.3 Exercice. Notons $C^1([0,1];\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que les applications $p : f \mapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ et $q : f \mapsto |f(0)| + \|f'\|_\infty$ sont des normes équivalentes sur $C^1([0,1];\mathbb{C})$.
2. Les normes p et $f \mapsto \|f\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?
3. Montrer que $C^1([0,1];\mathbb{C})$ muni de la norme q est un espace de Banach.

4.4 Exercice. Démontrer que dans un espace vectoriel normé
• l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même rayon ;
• l'intérieur d'une boule fermée de rayon non nul est la boule ouverte de même rayon.
Ces deux énoncés sont faux dans le cas d'un espace métrique quelconque !

4.5 Exercice. Démontrer que, dans un espace vectoriel normé, l'adhérence d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.

4.6 Exercice. Soient (E,p) et (F,q) des espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application linéaire de rang fini (ce qui signifie que le sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} f$ de F est de dimension finie). Démontrer que f est continue si et seulement si son noyau est fermé.

4.7 Exercice.
1. Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $y \in F$ tel que $d(x,F) = \|x-y\|$. En déduira que, si $E \neq F$, pour tout $y \in F$ et tout $\lambda > 0$, il existe $x \in E$, tel que $d(x,F) = \|x-y\| = \lambda$.
2. Soient E un espace de Banach et (F_n) une suite strictement croissante de sous-espaces vectoriels de E de dimension finie.
   a) Construire une suite (x_n) d'éléments de E tels que $x_n \in F_n$, $d(x_{n+1}, F_n) = \|x_{n+1} - x_n\| = 3^{-n}$.
   b) Montrer que la suite (x_n) converge dans E et que sa limite x vérifie $d(x,F_n) \geqslant \dfrac{3^{-n}}{2}$.
   c) En déduire que l'on a $E \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$.
3. Démontrer qu'un espace de Banach n'admet pas de base (algébrique) infinie dénombrable.
4. Démontrer, en adaptant la preuve ci-dessus, qu'un espace de Banach n'est pas réunion d'une suite strictement croissante de sous-espaces fermés.

4.5.2 Espaces préhilbertiens

4.8 Exercice. Soient E un espace vectoriel réel et $f : E \to \mathbb{R}_+$ une application qui vérifie

$$\forall x,y \in E, \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)\,.$$

1. Montrer que $f(0) = 0$ et que pour tout $y \in E$, on a $f(-y) = f(y)$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in E$, on a $f(kx) = k^2 f(x)$. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{Q}$, on a $f(kx) = k^2 f(x)$.
3. Montrer que, pour tout $x,y,z \in E$, on a
$$f(x+y+z) = f(x+y) + f(x+z) + f(y+z) - f(x) - f(y) - f(z)\,.$$
4. Montrer que l'application $(x,y) \mapsto f(x+y) - f(x) - f(y)$ est $\mathbb{Q}$-bilinéaire.
5. Montrer que toute norme sur E vérifiant l'identité de la médiane
$(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2)$ est issue d'un produit scalaire.

Projection sur un convexe

4.9 Exercice. Soient E un espace préhilbertien.

1. Soit C une partie de E et $x \in E$.
   a) Soit $y \in C$ tel que, pour tout $z \in C$, on ait $\Re\big(\langle x-y|z-y\rangle\big) \leqslant 0$. Démontrer que l'application $x \mapsto \|x-z\|$ définie sur C atteint en y son minimum.
   b) On suppose que C est une partie convexe complète non vide de E. Montrer qu'il existe un et un seul point y_0 de C en lequel la fonction $y \mapsto \|y-x\|$ (définie sur C) atteint son minimum. Le point y_0 ainsi défini s'appelle le *projeté* de x sur C ; on le notera $p_C(x)$.
   c) Démontrer que pour tout $x \in E$ et tout $z \in C$, on a $\Re\big(\langle x-p_C(x)|z-p_C(x)\rangle\big) \leqslant 0$.
2. Soient E un espace hilbertien réel et $(e_1, \ldots, e_n)$ un système orthonormal dans E. Notons C l'enveloppe convexe de $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Soit $x \in E$.
   a) Pour $j \in 1, \ldots, n$, on pose $a_j = \langle x|e_j\rangle$. Posons aussi $a = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j$, $b_j = a_j + \dfrac{1-a}{n}$ et $y = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_j e_j$. Montrer que $p_C(x) = p_C(y)$.
   b) Montrer qu'il existe un unique $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \sup\{b_j - c, 0\} = 1$.
   c) Montrer que $p_C(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \sup\{b_j - c, 0\} e_j$.

4.10 Exercice. Soient E un espace préhilbertien et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale de E. Notons F le sous-espace vectoriel de E engendré par les e_n. Montrer que, pour $x \in E$, on a $d(x,F)^2 = \|x\|^2 - \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x|e_n\rangle|^2$.

4.5.3 Un peu de Fourier...

4.11 Exercice. Soit $a \in \mathbb{C}$. Notons f la fonction périodique de période 2π telle que, pour tout $x \in [0, 2\pi[$, on ait $f(x) = e^{ax}$.

1. Notons b la partie réelle de a. Montrer que si $b = 0$, alors on a $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)|^2 = 1$ et que si $b \neq 0$, alors on a $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)|^2 = \frac{e^{4\pi b}-1}{4\pi b}\cdot$
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Montrer que pour tout nombre réel non nul a on a
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \Big(\frac{\pi}{a}\Big)\Big(\frac{e^{2a\pi}+1}{e^{2a\pi}-1}\Big)\cdot$$
4. Montrer que pour tout nombre réel c non entier on a $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n-c)^{-2} = \Big(\frac{\pi}{\sin \pi c}\Big)^2$.

4.12 Exercice. On considère la suite de polynômes à coefficients réels $(P_k)_{k\geqslant 1}$ caractérisés par les relations $P_1 = \pi - X$ et, pour tout $k \geqslant 1$, $P'_{k+1} = P_k$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} P_k(t)\,dt = 0$.

1. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a $P_k(2\pi - t) = (-1)^k P_k(t)$.
2. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$ et tout $n \in \mathbb{Z}$ non nul, on a $(2\pi)^{-1} \displaystyle\int_0^{2\pi} P_k(t) e^{-int}\, dt = (in)^{-k}$.
3. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $P_{2k+1}(\pi) = 0$ et, pour $k \geqslant 1$,
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_k(t)^2\, dt = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2k} = (-1)^k P_{2k}(0)\,.$$
4. En déduire les égalités $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

4.5.4 Polynômes orthogonaux

Dans les exercices qui suivent on reprend les notations de la section 5 : on se donne un intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$ et une fonction continue positive $\varphi : I \to \mathbb{R}$. On suppose que l'ensemble $\{t \in I ; \varphi(t) \neq 0\}$ est dense dans I et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $t \mapsto \varphi(t) t^{2n}$ est intégrable sur I. On note (h_n) la suite des polynômes orthogonaux unitaires associés à φ. On désigne par E_φ l'espace préhilbertien des fonctions $g \in C(I;\mathbb{R})$ telles que la fonction $t \mapsto \varphi(t)\big|g(t)\big|^2$ soit intégrable.

4.13 Exercice. Montrer que $\beta_n \|h_{n-1}\|^2 = \langle X h_n | h_{n-1}\rangle = \langle h_n | X h_{n-1}\rangle = \|h_n\|^2$, où β_n est donné par la formule de récurrence $h_{n+1} = (X - \alpha_n) h_n - \beta_n h_{n-1}$.

4.14 Exercice. On suppose qu'il existe $a \in]0, +\infty]$ tel que $I =]-a, a[$ et que φ est une fonction paire. Montrer que, pour n pair, le polynôme h_n est pair et que, pour n impair, le polynôme h_n est impair. En déduire que les α_n de la formule de récurrence ($h_{n+1} = (X - \alpha_n) h_n - \beta_n h_{n-1}$) sont nuls.

4.15 Exercice. On suppose que $I =]-1, 1[$ et que pour $t \in I$, on a $\varphi(t) = (1 - t^2)^a$, où a est un nombre réel strictement supérieur à -1. Montrer que la fonction $t \mapsto (1 - t^2)^a h_n(t)$ est proportionnelle à la dérivée n-ième de $t \mapsto (1 - t^2)^{n+a}$.

4.16 Exercice. Pour $j \in \mathbb{N}$, posons $a_j = \displaystyle\int_I t^j \varphi(t)\, dt$. On note E_n l'espace vectoriel des polynômes réels de degré $< n$. Écrire la matrice du produit scalaire dans les bases $(h_0, \ldots, h_{n-1})$ et $(1, X, \ldots, X^{n-1})$. En déduire l'égalité
$$\prod_{0 \leqslant j < n} \|h_j\|^2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & \ldots & a_{2n-2} \end{vmatrix}$$

4.17 Exercice. On note T_n l'application qui à $f \in E_n$ associe le projeté orthogonal de Xf dans E_n.
1. Quel est le polynôme caractéristique de T_n ?
2. Écrire les matrices de l'application T_n dans la base $(1, X, \ldots, X^{n-1})$ et dans la base $(h_0, \ldots, h_{n-1})$.
3. Montrer que $(-1)^n h_n$ est le polynôme caractéristique de la matrice
$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_1 & \beta_2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_{n-2} & \beta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$
(où les α_k et les β_k sont définis par la formule de récurrence $h_{k+1} = (X - \alpha_k) h_k - \beta_k h_{k-1}$).

4.6 Solutions

Exercice 4.1. Si $\lambda \in \ell(B)$, il existe $x \in B$ tel que $\ell(x) = \lambda$. Alors $\mu x \in B$, donc $\lambda\mu \in \ell(B)$. Si ℓ n'est pas continue, alors $\ell(B)$ n'est pas borné ; donc pour tout $z \in \mathbb{C}$ il existe $\lambda \in \ell(B)$ tel que $|z| < \lambda$; posant $\mu = z/\lambda$, il vient $z \in \ell(B)$, soit $\ell(B) = \mathbb{C}$. Il existe $x \in U$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x + rB = B(x,r) \subset U$; il vient $\ell(U) \supset \{\ell(x) + rz;\ z \in \ell(B)\} = \mathbb{C}$.

Exercice 4.2.

1. Soit $x \in E$. Pour tout $\varepsilon > 0 \in \mathbb{N}$, il vient $(p(x)+\varepsilon)^{-1}x \in B_p(0,1) \subset \overline{B}_q(0,1)$, donc $q(x) \leqslant p(x)+\varepsilon$. Comme cela est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, il vient $q(x) \leqslant p(x)$.
2. Résulte immédiatement de 1.

Exercice 4.3.

1. Soient $f, g \in C^1([0,1];\mathbb{C})$. Il est clair que pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $p(\lambda f) = |\lambda| p(f)$ et $q(\lambda f) = |\lambda| q(f)$; on a $\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$, $\|f'+g'\|_\infty \leqslant \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty$ et $|f'(0)+g'(0)| \leqslant |f'(0)| + |g'(0)|$ d'où les inégalités triangulaires pour p et q. Enfin $q \leqslant p$ et si $q(f) = 0$, alors $f' = 0$ donc f est constante et comme $f(0) = 0$, f est nulle, donc p et q sont des normes. Enfin, pour $t \in [0,1]$, on a $f(t) = f(0) + \displaystyle\int_0^t f'(s)\,ds$, donc $|f(t)| \leqslant q(f)$. Il vient $\|f\|_\infty \leqslant q(f)$, donc $p(f) \leqslant 2q(f)$, ce qui prouve que p et q sont équivalentes.
2. Pour $f_n = \sin nx$, on a $\|f_n\|_\infty \leqslant 1$ et $\|f_n'\|_\infty = n$, donc $p(f) \geqslant n$. On en déduit que p et $f \mapsto \|f\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.
3. Si (f_n) est de Cauchy pour la norme q, alors, comme p et q sont équivalentes, (f_n) est de Cauchy pour la norme p. On en déduit que (f_n) et (f_n') sont de Cauchy pour la norme $\|\ \|_\infty$. Elle convergent unformément vers des fonctions g et h respectivement. Par le théorème de dérivation d'une limite (p. 60), il vient $g' = h$.

Exercice 4.4. Soient (E,N) un un espace vectoriel normé, x un point de E et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

Puisque l'application $y \mapsto N(y-x)$ est continue, la boule $\overline{B}(x,r)$ est une partie fermée de E, donc $\overline{B}(x,r)$ contient l'adhérence de $B(x,r)$. Soit $y \in \overline{B}(x,r)$; pour $n \in \mathbb{N}$, posons $y_n = x + \dfrac{n}{n+1}(y-x)$. On a $y_n - x = \dfrac{n}{n+1}(y-x)$, donc $N(y_n - x) = \dfrac{n}{n+1}N(y-x) \leqslant \dfrac{nr}{n+1} < r$, donc $y_n \in B(x,r)$; de plus $\dfrac{n}{n+1}$ tend vers 1. Par la prop. 4.1, $\dfrac{n}{n+1}(y-x)$ tend vers $y-x$, donc y_n tend vers y. Il en résulte que y est adhérent à $B(x,r)$. Cela montre que $\overline{B}(x,r) \subset \overline{B(x,r)}$.

Comme la boule $B(x,r)$ est ouverte, elle est contenue dans l'intérieur de $\overline{B}(x,r)$. Soit y un point intérieur à $\overline{B}(x,r)$; pour $n \in \mathbb{N}$, posons $y_n = x + \dfrac{n+2}{n+1}(y-x)$. Comme ci-dessus, la suite (y_n) converge vers y. Donc, pour n assez grand, $y_n \in \overline{B}(x,r)$. On en déduit que $y \in B(x,r)$, puisque $N(y-x) = \dfrac{n+1}{n+2}N(y_n - x) < r$.

Exercice 4.5. Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.

Puisque $0 \in F$, il vient $0 \in \overline{F}$.

Soient $x, y \in \overline{F}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe des suites (x_n) et (y_n) dans F convergeant respectivement vers x et y. Alors, par continuité des opérations, la suite $(\lambda x_n + y_n)$ d'éléments de F converge vers $\lambda x + y$, donc $\lambda x + y \in \overline{F}$.

Exercice 4.6. Si f est continue, alors $\ker f = f^{-1}(\{0\})$ est fermé.

Supposons $\ker f$ fermé. Soit E_1 un sous-espace vectoriel de E, supplémentaire de $\ker f$ dans E. Pour $x \in E_1$, posons $N(x) = \inf\{p(x-y); y \in \ker f\}$. Vérifions que N est une norme.

- Si $N(x) = 0$, alors la distance de x à $\ker f$ est nulle donc, comme $\ker f$ est fermé, on a $x \in \ker f$. Or $x \in E_1$, donc $x = 0$, car $E_1 \cap \ker f = \{0\}$.
- Soient $x \in E_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $y \in \ker f$, on a $N(\lambda x) \leqslant p(\lambda x - \lambda y) = |\lambda| p(x-y)$. Prenant l'« inf » sur y, on obtient $N(\lambda x) \leqslant |\lambda| N(x)$.
- Soient $x, x' \in E_1$. Pour tout $y, y' \in \ker f$, on a
$$N(x+x') \leqslant p(x+x'-y-y') \leqslant p(x-y) + p(x'-y')\,.$$
Prenant l'« inf » sur y et y', on obtient $N(x+x') \leqslant N(x) + N(x')$.

Il s'ensuit que N est une norme sur E_1.

Comme la restriction de f à E_1 est injective, $q \circ f$ est aussi une norme sur E_1.

Or E_1 est de dimension finie, puisque la restriction de f est une application linéaire bijective de E_1 sur $\operatorname{Im} f$. On en déduit que N est équivalente à $q \circ f$, donc il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $q \circ f \leqslant kN$.

Soit $x \in E$. Écrivons $x = y+z$ avec $y \in \ker f$ et $z \in E_1$. Par définition de N, on a $N(z) \leqslant p(y+z) = p(x)$. De plus, on a $f(x) = f(z)$, donc il vient $q(f(x)) = q(f(z)) \leqslant kN(z) \leqslant kp(x)$. Cela montre que f est continue et que l'on a $\|f\| \leqslant k$.

Exercice 4.7.

1. Posons $B = \{z \in F;\ \|x-z\| \leqslant \|x\|\}$. C'est une partie fermée de F, non vide puisque $0 \in B$; pour $z \in B$, on a $\|z\| \leqslant \|x-z\| + \|x\| \leqslant 2\|x\|$, donc B est bornée. Puisque F est de dimension finie, on en déduit que B est compact. L'application continue $z \mapsto \|x-z\|$ y atteint son minimum en un point $y \in B$. Pour $z \in F$, on a alors $\|x-y\| \leqslant \|x-z\|$ si $z \in B$ par définition du minimum et $\|x-y\| \leqslant \|x\| < \|x-z\|$ si $z \notin B$ (par définition de B). Donc $d(x,F) = \|x-y\|$.
Soient alors $y \in F$ et $x_0 \in E \setminus F$. Il existe $y_0 \in F$ tel que $\|x_0 - y_0\| = d(x,F)$. On pose alors $\alpha = \dfrac{\|x_0-y_0\|}{\lambda}$ et $x = y + \alpha(x_0-y_0)$. On a $\|x-y\| = \alpha\|x_0-y_0\| = \lambda$; pour $z \in F$, posant $u = y_0 + \alpha^{-1}(z-y) \in F$ on a $x - z = \alpha(x_0-u)$, donc $\|x-z\| = \alpha\|x_0-u\| \geqslant \lambda$. On a bien $d(x,F) = \|x-y\| = \lambda$.
2. a) On construit la suite x_n par récurrence. Posons $x_0 = 0$ et, supposant x_n construit dans F_n, puisque $F_n \subset F_{n+1}$ et $F_n \neq F_{n+1}$, il existe d'après la question 1, $x_{n+1} \in F_{n+1}$ tel que $d(x_{n+1}, F_n) = \|x_{n+1} - x_n\| = 3^{-n}$.
   b) Pour $p, q \in \mathbb{N}$, $p < q$, on a $x_q - x_p = \sum_{n=p}^{q-1} x_{n+1} - x_n$, donc $\|x_p - x_q\| \leqslant \sum_{n=p}^{q-1} 3^{-n} \leqslant \dfrac{3^{1-p}}{2}$. Il en résulte que la suite (x_n) est de Cauchy. Elle converge ; notons x sa limite.
   Pour $q > n$, on a, par le calcul ci-dessus, $\|x_q - x_{n+1}\| \leqslant \dfrac{3^{-n}}{2}$, donc, à la limite, $\|x - x_{n+1}\| \leqslant \dfrac{3^{-n}}{2}$. Pour $z \in F_n$, on a $3^{-n} \geqslant \|x_{n+1} - z\| \geqslant \|x_{n+1} - x\| + \|x - z\|$, donc $\|x - z\| \geqslant \dfrac{3^{-n}}{2}$.
   Prenant l'inf, il vient $d(x, F_n) \geqslant \dfrac{3^{-n}}{2}$.
   c) On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \notin F_n$, soit $x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$.
3. Un espace vectoriel ayant une base dénombrable $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est réunion des sous-espaces de dimension finie F_n engendrés par $(e_k)_{k\leqslant n}$.
4. On construit grâce au lemme page 38 une suite (x_n) avec $x_n \in F_n$ pour tout n et telle que $\|x_{n+1} - x_n\| = 4^{-n}$ et $d(x_{n+1}, F_n) \geqslant 2^{-2n-1}$. Cette suite est de Cauchy comme ci-dessus et sa limite x satisfait pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x - x_{n+1}\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} 4^{-k} = \dfrac{4^{-n}}{3} < d(x_{n+1}, F_n)$, donc $x \notin F_n$