Développement décimal des nombres réels

`On trouvera beaucoup d'information sur ce thème dans`
D. PERRIN, *Mathématiques d'école : Nombres, mesures et géométrie.* Cassini.

Les nombres et les opérations sur les nombres sont des objets que l'on rencontre bien sûr très tôt en mathématiques. On rencontre d'abord les nombres entiers positifs, puis, comme ils sont insuffisants pour la soustraction et la division, on est amené à introduire les entiers relatifs puis les nombres rationnels. Le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est insuffisant : il manque des points qui auraient dû y être : $\mathbb{Q}$ n'est pas complet... On est ainsi amené à introduire le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. On n'aura pas tout à fait fini puisque des idées d'algèbre et géométrie nous conduiront ensuite à construire le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Un nombre réel peut être donné comme solution d'une équation plus ou moins simple :
— $\sqrt{2}$ est solution de l'équation $x^2 = 2$;
— π de l'équation $\sin x = 0$...
Par contre tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.

Ainsi, on peut construire $\mathbb{R}$ comme l'ensemble des limites de nombres rationnels ($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$). Cette idée se réalise de la façon suivante.
— on sait quand une suite de nombres rationnels devrait avoir une limite : cela a lieu si et seulement si c'est une suite de Cauchy.
— on sait quand deux suites de nombres rationnels devraient avoir la même limite : cela a lieu si et seulement si leur différence tend vers 0.
La construction mathématique est alors la suivante. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites de Cauchy de nombres rationnels (c'est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ des suites de nombres rationnels) ; sur $\mathcal{C}$ on définit une relation R en écrivant

$$(u_n)R(v_n) \iff \lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0.$$

On démontre que R est une relation d'équivalence et on définit $\mathbb{R}$ comme le quotient d'équivalence $\mathcal{C}/R$. On plonge alors $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$: l'image des nombres rationnels sont les classes des suites constantes ; on définit les opérations (addition, multiplication) sur $\mathbb{R}$: on les définit sur les suites et on vérifie qu'elles passent au quotient. On écrit $x \leqslant y$ s'il existe des suites (u_n) et (v_n) de classes respectives x et y telles que l'on ait $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in N$; on vérifie que $\leqslant$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$; en particulier, on définit $\mathbb{R}_+$ comme l'ensemble des classes des suites positives.

Une autre façon de concevoir $\mathbb{R}$ est de *choisir* pour chaque nombre réel une suite de nombres rationnels convergeant vers ce nombre. Par exemple, comme notre façon de compter est basée sur le nombre 10, un nombre réel est limite de la suite de ses développements décimaux. On aurait pu évidemment choisir un développement en base b pour un entier $b \geqslant 2$ quelconque... Mais comme nos mains nous offrent dix doigts, c'est le nombre dix qui a été choisi !

1 Développement décimal

Écriture décimale des nombres entiers positifs. Pour décrire les nombres entiers, on pourrait imaginer :
— utiliser un symbole différent pour chaque nombre - cela est évidemment impossible : il faudrait une infinité de symboles différents...

— mettre une barre pour chaque entier - cette méthode est utilisée lors de dépouillements de scrutins et certaines rencontres sportives ; on regroupe alors par paquets de cinq ou de dix ; cependant, pour des nombres moyennement grands, cette méthode est fastidieuse tant à l'écriture qu'à la lecture.

L'écriture décimale permet avec dix symboles de pouvoir exprimer de façon relativement compacte n'importe quel nombre entier.

Nous ne rappelons pas ici le principe de cette écriture, ni les algorithmes des opérations dans cette écriture. Rappelons par contre les tests de division que cette écriture permet.

Division par 10^n. Un nombre entier est divisible par 10^n si et seulement si les n derniers chiffres de son écriture décimale sont nuls. Le reste d'un nombre entier dans la division par 10^n est le nombre obtenu en conservant les n derniers chiffres de son écriture décimale. On en déduit qu'un nombre est divisible par 2^n (ou 5^n) si et seulement si le nombre obtenu en conservant les n derniers chiffres de son écriture décimale l'est.

Division par 3, par 9. Tout nombre entier est congru modulo 9, donc modulo 3, à la somme de ses chiffres (dans l'écriture décimale) : c'est la base de la *preuve par 9*. En effet 10 est congru à 1 modulo 9, donc 10^k est congru à 1 modulo 9 pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, 10^k$ est congru modulo 9 à $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$.

Division par 11. Remarquons que 10 est congru à -1 modulo 11, donc 10^k est congru à $(-1)^k$ modulo 11 pour tout $k \in \mathbb{N}$. On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, 10^k$ est congru modulo 11 à $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$. On trouve ainsi facilement le reste modulo 11 d'un nombre entier.

Nombres décimaux - approximation décimale des nombres réels

Définition. Un nombre $x \in \mathbb{R}$ est dit *décimal* s'il existe $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = m\, 10^{-n}$. En particulier, un nombre décimal est rationnel.

Approximation décimale. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Posons $p_n = E(10^n x)$ (où E désigne la partie entière), $a_n = 10^{-n} p_n$ et $b_n = 10^{-n}(p_n + 1)$, de sorte que $p_n \in \mathbb{Z}$ et $a_n \leqslant x < b_n$. Les nombres a_n et b_n sont décimaux ; le nombre a_n est appelé l'*approximation décimale par défaut* de x à l'ordre n. Si $x \neq a_n$, on dit que b_n est l'*approximation décimale par excès* de x à l'ordre n.

Comme $10p_n \leqslant 10^{n+1}x < 10(p_n + 1)$, il vient $10p_n \leqslant p_{n+1} < 10(p_n + 1)$; en particulier, la suite (a_n) est croissante ; et puisque $p_{n+1} < 10(p_n + 1)$, il vient $p_{n+1} + 1 \leqslant 10(p_n + 1)$, donc la suite (b_n) est décroissante. Enfin $b_n - a_n = 10^{-n}$, donc les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes ; puisque pour tout n on a $a_n \leqslant x \leqslant b_n$, la limite commune de ces deux suites est x.

Discutons quelques aspects de cette approximation décimale.

Densité de $\mathbb{Q}$. L'approximation décimale nous permet d'écrire tout nombre réel comme limite d'une suite de nombres décimaux. En d'autres termes, les nombres décimaux forment un sous-ensemble dense de $\mathbb{R}$; on en déduit *a fortiori* que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Développement décimal propre. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre entier $c_n = p_n - 10p_{n-1}$ est compris entre 0 et 9. C'est la *n-ième décimale de x après la virgule.* On a (par récurrence sur n) $a_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k 10^{-k}$ et, puisque x est la limite des a_k, il vient

$$x = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k 10^{-k}.$$

Cette expression s'appelle le *développement décimal propre* de x. On obtient alors l'*écriture décimale (infinie) de x* sous la forme

$$x = a_0, c_1 c_2 c_3 \ldots$$

b) Inversement, donnons-nous une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres entiers relatifs tels que pour $n \geqslant 1$ on ait $0 \leqslant c_n \leqslant 9$. La série (à termes positifs) de terme général $(c_k 10^{-k})_{k\geqslant 1}$ est convergente car majorée par la série géométrique $\sum 9\,10^{-k}$. Posons $x = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k 10^{-k}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, le nombre $q_n = \sum_{k=0}^{n} c_k 10^{n-k}$ est entier et l'on a

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} c_k 10^{n-k} \leqslant 9 \sum_{k=1}^{+\infty} 10^{-k} = 1.$$

Cette inégalité est stricte à moins que $c_k = 9$ pour tout $k > n$.
Distinguons deux cas :

— Si l'ensemble des k tels que $c_k \neq 9$ est infini, le développement décimal propre de x est

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k 10^{-k}.$$

— Supposons qu'à partir d'un certain rang, tous les c_k sont égaux à 9. Notons $m \in \mathbb{N}$ le plus petit entier tel que $c_k = 9$ pour tout $k > m$; posons $c'_k = c_k$ pour $k < m$ et $c'_m = 1 + c_m$. Le développement décimal propre de x est

$$x = \sum_{k=0}^{m} c'_k 10^{-k}.$$

Dans ce dernier cas, l'expression $x = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k 10^{-k} = \sum_{k=0}^{m} c_k 10^{-k} + \sum_{k=m+1}^{+\infty} 9.10^{-k}$ s'appelle le *développement décimal impropre* de x.

Une bijection. Notons $A = \mathbb{Z} \times \{0, \ldots, 9\}^{\mathbb{N}^*}$ l'ensemble des suites $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres entiers relatifs tels que pour $n \geqslant 1$ on ait $0 \leqslant c_n \leqslant 9$. Notons aussi $A' \subset A$ l'ensemble des suites (c_n) comportant une infinité de termes distincts de 9. On a construit une application $f : \mathbb{R} \to A$ qui à $x \in \mathbb{R}$ associe son développement décimal propre, et une application $g : A \to \mathbb{R}$ donnée par $g\Big((c_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_k 10^{-k}$.

On a vu ci-dessus que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ (1.a) et que $f \circ g\Big((c_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big) = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A'$ (1.b). On en déduit que f et g induisent par restriction des bijections réciproques l'une de l'autre entre $\mathbb{R}$ et A'.

Théorème de Cantor. *Le corps $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que $[0;1[$ n'est pas dénombrable.

Soit $f : \mathbb{N}^* \to [0,1[$ une application. Définissons alors le réel $a = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ de la manière suivante.

— On choisit la première décimale a_1 de a dans l'ensemble $\{0, \dots, 8\}$ et distincte de la première décimale de $f(1)$; on a donc $a \neq f(1)$.

— On choisit ensuite a_2 dans l'ensemble $\{0, \dots, 8\}$ et distinct de la deuxième décimale de $f(2)$; donc $a \neq f(2)$.

— Plus généralement, on choisit la n-ième décimale a_n de a dans l'ensemble $\{0, \dots, 8\}$ et distincte de la n-ième décimale de $f(n)$; donc $a \neq f(n)$.

— Les décimales de a ne peuvent valoir 9, donc le développement $a = 0, a_1 a_2 \dots$ est le développement décimal propre de a. Comme $a \neq f(n)$ pour tout n l'application f n'est pas surjective. □

Remarque : développement décimal des nombres strictement négatifs. Pour les nombres réels négatifs l'usage est d'écrire plutôt $x = -|x|$ où l'on développe $|x|$ dans son écriture décimale. Ainsi, le nombre $-\pi$ s'écrit $-3,14159\dots$ plutôt que $(-4), 85840\dots$

2 Cas des nombres rationnels

Soit a un nombre rationnel positif. Notons $a = \dfrac{p}{q}$ son *écriture irréductible*, *i.e.* avec p et q des nombres entiers premiers entre eux. Nous allons étudier le développement décimal de a : nous démontrerons qu'il est périodique et étudierons sa période en fonction du dénominateur q.

a) — Si les seuls diviseurs premiers de q sont 2 et 5, on écrit $q = 2^k 5^\ell$. Alors $10^m a \in \mathbb{N}$ où $m = \max(k, \ell)$, de sorte que a est un nombre décimal (avec m chiffres après la virgule).

— Inversement, si a est décimal avec m chiffres après la virgule, on a $10^m a \in \mathbb{N}$, de sorte que $q | 10^m$ (puisque $\dfrac{p}{q}$ est l'écriture irréductible de $\dfrac{10^m a}{10^m}$), puis que q est de la forme $2^k 5^\ell$ avec $k \leqslant m$ et $\ell \leqslant m$. Enfin, si a possède exactement m chiffres après la virgule, $10^{m-1} a \notin \mathbb{N}$, donc $m = \max(k, \ell)$.

b) — Supposons que le dénominateur q est premier avec 10 et $q \neq 1$. Notons $p = dq + r$ la division euclidienne de p par q avec $1 \leqslant r \leqslant q - 1$. Notons que $r \neq 0$ puisque p et q sont premiers entre eux et $q > 1$.

Comme q et 10 sont premiers entre eux, la classe de 10 est un élément du groupe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Notons k l'ordre de 10 dans ce groupe. Il en résulte que $10^k \equiv 1 \quad [q]$, donc q divise $10^k - 1$. Ecrivons alors $10^k - 1 = bq$ et enfin

$$a = d + \frac{br}{10^k - 1} = d + br \sum_{n=1}^{+\infty} 10^{-nk}.$$

Remarquons que $br < bq = 10^k - 1$. Notons $br = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} c_j 10^{k-j}$ son développement décimal (autrement dit l'écriture décimale de l'entier br est $br = c_1 c_2 \dots c_k$). On a alors $a = d + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^{k} c_j 10^{-(nk+j)}$. Le développement décimal de a est donc $a = d + \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} c_j 10^{-j}$ où l'on a prolongé les c_j par périodicité, posant $c_{j+nk} = c_j$ (pour $n \in \mathbb{N}$ et $1 \leqslant j \leqslant k$). En d'autres termes, le développement décimal de a est $a = d, c_1 \dots c_k c_1 \dots c_k \dots$; il est périodique après la virgule, et k est un multiple de sa période.

— Inversement, si le développement décimal d'un nombre réel a est périodique de période ℓ après la virgule, on a : $a = d, c_1 \dots c_\ell c_1 \dots c_\ell \dots$, c'est-à-dire :

$$a = d + \sum_{j=1}^{+\infty} c_j 10^{-j} = d + \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^{\ell} c_j 10^{-(n\ell+j)} = d + \Big(\sum_{j=1}^{\ell} c_j 10^{\ell-j} \Big) \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} 10^{-n\ell} \Big).$$

Enfin $a = d + \dfrac{u}{10^\ell - 1}$ où $u = \displaystyle\sum_{j=1}^{\ell} c_j 10^{\ell-j}$, donc l'écriture irréductible de a est $\dfrac{p}{q}$ où q est un diviseur de $10^\ell - 1$. En particulier 10 et q sont premiers entre eux et l'ordre de 10 dans le groupe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ divise ℓ.

c) Dans le cas général, on écrit $q = 2^k 5^\ell q'$ avec $q' > 1$ et premier avec 10. Posons $m = \max(k, \ell)$. Alors l'écriture irréductible de $10^m a$ est de la forme $\dfrac{p'}{q'}$ de sorte que l'écriture décimale de a est périodique à partir de la $m+1$-ème décimale après la virgule de période k où k est l'ordre de 10 dans le groupe $(\mathbb{Z}/q'\mathbb{Z})^*$.

On a donc démontré l'énoncé qui suit.

Théorème. — *Le développement décimal d'un nombre réel est fini ou périodique (à partir d'un certain rang) si et seulement s'il est rationnel.*

— *Soit* $a = \dfrac{p}{2^k 5^\ell q}$ *un nombre rationnel avec* $k, \ell \in \mathbb{N}$ *et* q *premier avec* $10p$. *Posons* $m = \max(k, \ell)$.

a) Le développement décimal de a *est fini si et seulement si* $q = 1$.

b) Si $q \neq 1$, *le développement décimal de* a *est périodique à partir du* $m+1$*-ème chiffre après la virgule et sa période est l'ordre de* 10 *dans le groupe* $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$.

□

Remarque. On peut remplacer le développement décimal par le développement en base b où b est un nombre entier $\geqslant 2$ quelconque. On pourra ainsi écrire :

— tout nombre entier positif A (de manière unique) sous la forme $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k b^k$ avec $N \in \mathbb{N}$ et, pour tout $i \in \{0, \dots, N\}$, $a_i \in \{0, \dots, b-1\}$; cette suite (a_i) s'appelle le développement en base b de l'entier A.

— tout nombre réel positif A est somme d'une série $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k b^{-k}$ avec $a_0 \in \mathbb{N}$ et, pour $i \geqslant 1$, $a_i \in \{0, \dots, b-1\}$, avec unicité si l'on impose que l'ensemble des $i \in \mathbb{N}$ tels que $a_i \neq b-1$ est infini. La suite (a_i) s'appelle alors le développement en base b propre du nombre réel A.

— Le développement en base b d'un nombre réel est fini ou périodique (à partir d'un certain rang) si et seulement s'il est rationnel.

— Soit A un nombre rationnel et écrivons $A = \dfrac{p}{mq}$ où $p, m, q \in \mathbb{N}$ sont deux à deux premiers entre eux, q est premier avec b et m divise une puissance b^k de b.

a) Le développement en base b de a est fini (*i.e.* $a_i = 0$ à partir d'un certain rang) si et seulement si $q = 1$.

b) Si $q \neq 1$, le développement en base b de a est périodique à partir du rang $k+1$ et sa période est l'ordre de b dans le groupe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$.

3 Nombres algébriques, nombres transcendants

Définition. Soit $x \in \mathbb{R}$. On dit que x est *algébrique* s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(x) = 0$. On dit que x est *transcendant* s'il n'est pas algébrique.

L'ensemble $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes à coefficients rationnels est dénombrable. Chaque polynôme a un nombre fini de racines dans $\mathbb{C}$. On en déduit que l'ensemble A des éléments algébriques, réunion sur $P \in \mathbb{Q}[X]$ (non nul) de l'ensemble des racines de P est une partie dénombrable de $\mathbb{C}$. L'ensemble $A \cap \mathbb{R}$ des nombres réels algébriques est aussi dénombrable. Son complémentaire, l'ensemble des nombres transcendants n'est donc pas dénombrable.

Remarque. On a vu que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Soit π un nombre irrationnel. On en déduit que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, qui contient $\mathbb{Q} + \pi$, est dense dans $\mathbb{R}$.

Nous exhiberons en exercice des nombres transcendants (les nombres de *Liouville*).

4 Exercices

Exercice 1.

1. Soit p un nombre premier. Démontrer que le développement décimal de $1/p$ est périodique de période 5 si et seulement si $p | 11\,111$.
2. Soit p un diviseur premier de $11\,111$.
   a) Quel est l'ordre de la classe 10 dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$?
   b) En déduire que $p \equiv 1$ $[10]$.
3. Quel est le plus petit nombre entier p tel que le développement décimal de $1/p$ soit périodique de période 5 ?

Exercice 2. Considérons le nombre $n = 142\,857$. On a $2n = 285\,714$, $3n = 428\,571$, $4n = 571\,428$, $5n = 714\,285$, $6n = 857\,142$. En d'autres termes, multiplier n par k pour $1 \leqslant k \leqslant 6$ fait tourner les décimales de n. On dira qu'on a des *multiplications magiques.* Enfin $7n = 999\,999$. Le but de cet exercice est de comprendre et généraliser ce fait.

Soit p un nombre premier. On suppose que 10 est un générateur du groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ - ce groupe est cyclique. Écrivons $\dfrac{10^{p-1} - 1}{p} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p-1} a_j 10^{p-1-j}$ le développement décimal de l'entier $N = \dfrac{10^{p-1} - 1}{p}$.

1. Quel est le développement décimal du nombre entier pN ? Quel est le développement décimal du nombre rationnel $\dfrac{1}{p}$?
2. Soit k un nombre entier avec $1 \leqslant k \leqslant p - 1$.
   a) Démontrer qu'il existe un unique nombre entier ℓ avec $0 \leqslant \ell \leqslant p - 2$ tel que $10^\ell \equiv k \quad [p]$.
   b) Écrivons $10^\ell N = 10^{p-1} A + R$ la division euclidienne de $10^\ell N$ par 10^{p-1}. Quels sont les développements décimaux de A et R ?
   c) Démontrer que $kN = R + A$. Quel est son développement décimal ?
3. Le calcul des 16 premières décimales du nombre $1/17$ donnent $0,0588235294117647$.
   a) Quel est l'ordre de 10 dans $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^*$?

b) Calculer de tête $2 \times 0588235294117647$ puis $3 \times 0588235294117647$, *etc.* jusqu'à $16 \times 0588235294117647$.

Exercice 3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\delta(x) = \inf\{|x-n|\,;\ n \in \mathbb{Z}\}$ sa distance à $\mathbb{Z}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient $s_0, \dots, s_{n+1} \in [0,1]$. Montrer qu'il existe des nombres entiers i et j satisfaisant $0 \leqslant i < j \leqslant n+1$ et $|s_i - s_j| \leqslant \dfrac{1}{n+1}\cdot$
2. Soient $t_0, \dots, t_n \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe des entiers i et j satisfaisant $0 \leqslant i < j \leqslant n$ et $\delta(t_i - t_j) \leqslant \dfrac{1}{n+1}\cdot$
3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ satisfaisant $1 \leqslant k \leqslant n$ et $\delta(kt) \leqslant \dfrac{1}{n+1}\cdot$
4. En déduire qu'il existe une suite de nombres rationnels p_n/q_n qui converge vers t et telle que $|t - p_n/q_n| < q_n^{-2}$.

Exercice 4. *Un nombre de Liouville*

1. Démontrer que la série de terme général $10^{-k!}$ est convergente.

   Posons $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} 10^{-k!}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 10^{-k!}$.
2. Démontrer que $0 < S < 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $0 < S - a_n < 2.10^{-(n+1)!}$.
3. Soit P un polynôme non nul à coefficients entiers. Notons p son degré.
   a) Démontrer que pour tout n on a $10^{p.n!}P(a_n) \in \mathbb{Z}$.
   b) Démontrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout n on ait $|P(S) - P(a_n)| \leqslant M.10^{-(n+1)!}$.
   c) Démontrer que $P(S) \neq 0$ (on remarquera que, pour n assez grand, a_n n'est pas racine de P).
4. Démontrer que S est transcendant.

Exercice 5. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré d que l'on peut supposer irréductible. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ une racine de P. Soit $\dfrac{p_n}{q_n}$ une suite de rationnels qui tend vers x. Démontrer que la suite $q_n^d \left| x - \dfrac{p_n}{q_n} \right|$ est bornée inférieurement (*on s'inspirera de l'exercice 4*). Exhiber d'autres nombres transcendants.

Exercice 6. On définit une suite (u_n) en posant $u_0 = a \in \mathbb{C}$ et $u_{n+1} = u_n^{10}$.

1. Décrire la suite u_n.
2. On suppose $|a| \neq 1$. Discuter selon la valeur de a le comportement de cette suite.
3. On suppose ici que $|a| = 1$. On écrit $a = e^{2i\pi\theta}$ où $\theta \in [0,1[$. On note $\theta_n = \dfrac{\arg u_n}{2\pi}$ (l'argument étant pris dans $[0, 2\pi[$).
   a) Exprimer θ_n en fonction du développement décimal de θ.
   b) Pour quelles valeurs de θ la suite (u_n) est-elle constante ?
   c) Pour quelles valeurs de θ la suite (u_n) prend-elle un nombre fini de valeurs ?
   d) Pour quelles valeurs de θ la suite (u_n) converge-t-elle ?
   e) (*) Construire θ tel que $\{u_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans le cercle unité de $\mathbb{C}$.

Exercice 7. (Variante) Étudier l'application $f : [0,1[\to [0,1[$ donnée par $f(x) = 10x - E(10x)$ et les suites récurrentes (u_n) données par un point $u_0 \in [0,1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Décrire l'application f en termes de développement décimal.
2. Quels sont les points fixes de f ?
3. Pour quelles valeurs de u_0 cette suite stationne-t-elle ?
4. Pour quelles valeurs de u_0 cette suite converge-t-elle ?
5. Pour quelles valeurs de u_0 cette suite est-elle périodique ? Pour lesquelles devient-elle périodique à partir d'un certain rang ?
6. Construire un u_0 pour lequel $\{u_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans $[0,1]$.

Solutions des exercices

Exercice 1.

1. On a vu que $1/p$ est périodique de période divisant 5 si et seulement si p divise $10^5 - 1$; la période est exactement 5 si de plus p ne divise pas $10 - 1$. Si p est premier, il doit donc diviser 11 111. Inversement, puisque 9 et 11 111 sont premiers entre eux, tout diviseur premier de 11 111 convient.
2. a) D'après ce qui précède, l'ordre de 10 dans le groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est 5.

   b) L'ordre 10 dans le groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ divise l'ordre de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, donc 5 divise $p-1$. Comme p est impair, il est de la forme $10k+1$.
3. On vérifie immédiatement que 11 ne divise pas 11 111 ; le nombre 21 n'est pas premier ; 31 ne convient pas non plus... mais 41 convient. On trouve $11\,111 = 41 \times 271$.
   NB Comme tout diviseur de 271 divise 11 111 et est donc $\geqslant 41 > \sqrt{271}$, on en déduit que 271 est premier.

Exercice 2.

1. On a $pN = 10^{p-1} - 1$. Son développement décimal est donc $99\dots9$ ($p-1$ chiffres).
   On a $\dfrac{1}{p} = \dfrac{N}{10^{p-1}-1}$. Or $\dfrac{1}{10^{p-1}-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} 10^{-k(p-1)}$. Donc le développement décimal du nombre rationnel $\dfrac{1}{p}$ est
   $$\frac{1}{p} = 0, a_1a_2\dots a_{p-1}a_1a_2\dots a_{p-1}a_1a_2\dots a_{p-1}\dots$$
2. a) La classe de k dans le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un élément de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Or, puisque la classe de 10 est un générateur de ce groupe, on en déduit que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est l'ensemble des classes de 10^ℓ où $0 \leqslant \ell \leqslant p-2$.

   b) Le développement décimal de $10^\ell N$ est $a_1\dots a_{p-1}00\dots0$ (avec ℓ zéros à la fin). Il vient $A = a_1\dots a_\ell$ et $R = a_{\ell+1}\dots a_{p-1}0\dots0$.

   c) On a $k \equiv 10^\ell \quad [p]$, donc $kN \equiv 10^\ell N \quad [pN]$. Or $pN = 10^{p-1}-1$, donc $10^\ell N = 10^{p-1}A + R \equiv A + R \quad [pN]$. Les nombres kN et $A+R$ sont tous deux compris strictement entre 0 et $pN = 10^{p-1}-1$ et congrus modulo pN : ils sont égaux. Le développement décimal en est $a_{\ell+1}\dots a_{p-1}a_1\dots a_\ell$.
3. a) Le développement décimal du nombre $1/17$ admet la période 16 et n'est visiblement pas périodique de période 8 : sa période, qui est l'ordre de (la classe de) 10 dans $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^*$ est bien 16.

   b) D'après la discussion ci-dessus, pour $1 \leqslant k \leqslant 16$, on obtient le développement décimal de $k \times 0588235294117647$ par permutation circulaire à partir de 0588235294117647. En les classant par ordre croissant, on trouve
   $2 \times 0588235294117647 = 1176470588235294$, $3 \times 0588235294117647 = 1764705882352941$
   $4 \times 0588235294117647 = 2352941176470588$, $5 \times 0588235294117647 = 2941176470588235$
   $6 \times 0588235294117647 = 3529411764705882$, $7 \times 0588235294117647 = 4117647058823529$
   $8 \times 0588235294117647 = 4705882352941176$, $9 \times 0588235294117647 = 5294117647058823$
   $10 \times 0588235294117647 = 5882352941176470$, $11 \times 0588235294117647 = 6470588235294117$
   $12 \times 0588235294117647 = 7058823529411764$, $13 \times 0588235294117647 = 7647058823529411$
   $14 \times 0588235294117647 = 8235294117647058$, $15 \times 0588235294117647 = 8823529411764705$
   $16 \times 0588235294117647 = 9411764705882352$.

Exercice 3.

1. Quitte à réordonner les s_i, on peut supposer que la suite s_i est croissante. On a $\sum_{k=0}^{n} s_{k+1} - s_k = s_{n+1} - s_0 \leqslant 1 - 0$. Il existe donc k tel que $s_{k+1} - s_k \leqslant \frac{1}{n+1}$.
2. Pour $i = 1, \ldots, n$, posons $s_i = t_i - t_0 - E(t_i - t_0)$ où E désigne la partie entière ; posons aussi $s_{n+1} = 1$. Par (a), il existe i, j avec $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n+1$ tels que $|s_i - s_j| \leqslant \frac{1}{n+1}$. Si $j \neq n+1$, on trouve $|(t_i - t_j) - p| \leqslant \frac{1}{n+1}$, où p est un entier ($p = E(t_i - t_0) - E(t_j - t_0)$). Si $j = n+1$, on trouve $|t_0 - t_i - p| \leqslant \frac{1}{n+1}$ avec $p = E(t_i - t_0) + 1$. Remarquons que dans ce cas $i \neq 0$ puisque $1 > \frac{1}{n+1}$.
3. Posons $t_i = ix$; il existe i, j avec $0 \leqslant i < j \leqslant n$ tels que $\delta(t_i - t_j) \leqslant \frac{1}{n+1}$. On pose alors $k = j - i$; on trouve $\delta(kx) \leqslant \frac{1}{n+1}$.
4. Soit $t \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par 1.c), il existe $q_n \leqslant n$ tel que $1 \leqslant q_n \leqslant n$ et $\delta(q_n t) \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{q_n+1}$. Soit p_n l'entier le plus proche de $q_n t$. On a donc $|t - p_n/q_n| \leqslant \frac{1}{(n+1)q_n} < q_n^{-2}$. Enfin, puisque $|t - p_n/q_n| \leqslant \frac{1}{n+1}$, on a $t = \lim p_n/q_n$.

Exercice 4.

1. Cette série converge extrêmement vite et on peut utiliser plusieurs méthodes. Par exemple, la règle de Cauchy : $(10^{-k!})^{1/k} = 10^{-(k-1)!} \to 0$.
2. Pour $n, k \in \mathbb{N}$, on a $(n+k+1)! - (n+1)! \geqslant k$, donc

$$0 < S - a_n = \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-(n+k+1)!} \leqslant 10^{-(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-k} < 2.10^{-(n+1)!}$$

   En particulier, puisque $a_0 = 0$, il vient $0 < S < 2.10^{-1} < 1$.
3. a) Le nombre a_n est rationnel et s'écrit sous la forme $a_n = \frac{p_n}{q_n}$ où $q_n = 10^{n!}$. Le polynôme P s'écrit $P = \sum_{k=0}^{p} b_k X^k$, donc $q_n^p P(a_n) = \sum_{k=0}^{p} b_k p_n^k q_n^{p-k}$. C'est un entier.
   b) Posons $M = 2\sup\{|P'(t)|;\ t \in [0,1]\}$. Par le théorème des accroissements finis, On a $|P(S) - P(a_n)| \leqslant \frac{M}{2}|S - a_n| \leqslant M.10^{-(n+1)!}$.
   c) Puisque P a un nombre fini de racines, seulement un nombre fini de a_n peuvent être racines de P. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$ on ait $P(a_n) \neq 0$. Dans ce cas, $10^{p.n!}P(a_n)$ est un nombre entier non nul, donc $|10^{p.n!}P(a_n)| \geqslant 1$. Donc, pour $n \geqslant n_0$, on a $|10^{pn!}P(S)| \geqslant |10^{pn!}P(a_n)| - M.10^{pn! - (n+1)!} \geqslant 1 - M.10^{-(n+1-p)n!}$. Or, $\lim_{n\to\infty} M.10^{-(n+1-p)n!} = 0$, donc, pour n assez grand $M.10^{-(n+1-p)n!} < 1$. On en déduit que $P(S) \neq 0$.
4. On a démontré que, pour tout $P \in \mathbb{Z}[X]$ non nul, on a $P(S) \neq 0$, donc S est transcendant.

Exercice 5. Comme pour l'exercice précédent, $q_n^d P\Big(\dfrac{p_n}{q_n}\Big)$ est entier et non nul, donc $\Big|q_n^d P\Big(\dfrac{p_n}{q_n}\Big)\Big| \geqslant 1$. Or $\Big|q_n^d P\Big(\dfrac{p_n}{q_n}\Big)\Big| = \Big|q_n^d \Big[P\Big(\dfrac{p_n}{q_n}\Big) - P(x)\Big]\Big| \leqslant M q_n^d \Big|x - \dfrac{p_n}{q_n}\Big|$, où M est le maximum de $|P'|$ sur le plus petit segment contenant tous les $\dfrac{p_n}{q_n}$.

Pour exhiber des nombres transcendants, on peut écrire $S = \sum 10^{-n!} a_n$ où a_n est une suite bornée de nombres entiers non nuls, on peut par exemple remplacer 10 par n'importe quel entier $\geqslant 2$ et $n!$ par n'importe quelle suite b_n de nombres entiers croissant suffisamment vite (avec $\lim \dfrac{b_{n+1}}{b_n} \to \infty$).

Exercice 6.

1. On a $u_n = a^{10^n}$.
2. Si $|a| < 1$, la suite (u_n) converge (très vite) vers 0. Si $|a| > 1$, la suite $(|u_n|)$ tend très rapidement vers $+\infty$.
3. a) On a $\theta_n = \langle 10^n \theta \rangle$ où $\langle x \rangle = x - E(x)$ est la *partie fractionnaire* d'un nombre réel x (ici $E(x)$ désigne sa partie entière).

   b) La suite est constante pour $\theta = k/9$ avec $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant 8$.

   c) Si $u_k = u_\ell$, avec $k < \ell$ il vient $a^{10^\ell - 10^k} = 1$, donc a est une racine de l'unité ; inversement, si a est une racine de 1 alors θ est rationnel, donc son développement décimal est périodique (à partir d'un certain rang), donc la suite u_k prend un nombre fini de valeurs.

   d) Supposons que (u_n) tend vers ℓ. Remarquons que
   — $\ell^{10} = \ell$ (par continuité de $z \mapsto z^{10}$) ;
   — pour $b = e^{it}$ avec $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $t \leqslant \dfrac{2\pi}{11}$, on a $|1 - b^{10}| \geqslant |1 - b|$. (En effet on a $|1 - b| = 2 \sin \dfrac{t}{2}$ et $|1 - b^{10}| = 2 \sin 5t$. On a $t \leqslant \dfrac{2\pi}{11}$, donc $0 \leqslant \dfrac{t}{2} \leqslant 5t \leqslant \pi - \dfrac{t}{2}$, donc $\sin 5t \geqslant \sin \dfrac{t}{2}$).

   On en déduit que si u, v sont des nombres complexes de module 1 tels que $|u - v| \leqslant |1 - e^{\frac{2i\pi}{11}}| (= 2 \sin \dfrac{\pi}{11})$, alors $|u^{10} - v^{10}| \geqslant |u - v|$.

   En particulier, si $|u_n - \ell| \leqslant 2 \sin \dfrac{\pi}{11}$, alors $|u_{n+1} - \ell| \geqslant |u_n - \ell$. Comme la suite u_n converge vers ℓ, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$ on a $|u_n - \ell| \leqslant= 2 \sin \dfrac{\pi}{11}$. La suite $|u_n - \ell|$ est croissante à partir de n_0, et ne peut tendre vers 0 que si $u_{n_0} = \ell$; on en déduit que $a^{10^{n_0}}$ est une racine neuvième de 1, donc a est une racine de 1 dont l'ordre divise 9×10^{n_0}.
   La réciproque est claire.

   NB. C'est un fait général. Si (X, d) est un espace métrique, $f : X \to X$ est une application et x_0 est un point fixe *répulsif* de f, *i.e.* si $d(f(x), x_0) \geqslant d(x, x_0)$ pour tout point x dans un voisinage V de x_0, une suite $(f^n(x))$ ne peut converger vers x_0 que s'il existe n tel que $f^n(x) = x_0$. En effet, si $(f^n(x))$ converge vers x_0, alors il existe n_0 tel que, pour pour $n \geqslant n_0$ on a $f^n(x) \in V$. Mais alors, pour $n \geqslant n_0$, on a $d(f^{n+1}(x), x_0) \geqslant d(f^n(x), x_0)$. La suite $d(f^n(x), x_0)$ - à termes positifs - est donc croissante à partir de n_0 et ne peut converger vers 0 que si elle est nulle à partir de n_0. Ici, on a $\lim\limits_{x \to \ell} \dfrac{f(x) - f(\ell)}{x - \ell} = 10\ell^9 = 10$ (car $\dfrac{x^{10} - \ell^{10}}{x - \ell} = \sum\limits_{k=0}^{9} x^k \ell^{9-k}$), donc pour x assez près de ℓ, on a $|f(x) - \ell| \geqslant |x - \ell|$.

   e) Considérons le nombre $\theta = 0,1234567891011121314151617181920212223 24....$ On a donc une suite d'entiers $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, strictement croissante, telle que $p_0 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 1$ le développement décimal de n est lu dans θ de la place $p_{n-1} + 1$ à p_n. On a donc

— $p_n = p_{n-1} + k_n$ où k_n est le nombre de chiffres du développement décimal de n ;
— $n = E(10^{p_n}\theta) - 10^{k_n}E(10^{p_{n-1}}\theta)$.

En particulier, le développement décimal de $\langle 10^{p_{n-1}}\theta\rangle$ commence par n. Soit $x \in [0,1[$. Pour $k \in \mathbb{N}$ posons $m(k) = E(10^k x)$. Alors, si $x \geqslant 1/10$, on a $x = \lim\langle 10^{p_{m(k)-1}}\theta\rangle$, donc $e^{2i\pi x} = \lim u_{p_{m(k)-1}}$.

Si $x < 1/10$, on pose $y = \dfrac{1+x}{10}$, on construit une suite extraite $(u_{\ell(k)})$ qui converge vers $e^{2i\pi y}$; alors $(u_{\ell(k)+1})$ converge vers $(e^{2i\pi y})^{10} = e^{2i\pi x}$.

Exercice 7.

1. Soit $x \in [0,1[$. Écrivons son développement décimal propre $x = 0, a_1a_2\ldots a_n\ldots$ où les a_n ne sont pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang. Alors $10x = a_1, a_2\ldots a_n\ldots$ et $f(x) = 0, a_2\ldots a_n\ldots$; ces développements décimaux sont clairement propres (puisque les a_n ne sont pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang). En d'autres termes, f décale le développement décimal de x et oublie le premier terme de ce développement.
2. Soit $x = 0, a_1a_2\ldots a_n\ldots$ comme ci-dessus. Par unicité du développement décimal propre, on a $f(x) = x$ si et seulement si $a_k = a_{k+1}$ pour tout k, *i.e.* si la suite (a_k) est constante égale à $a \in \{0,\ldots,8\}$ (9 est interdit puisque le développement décimal est supposé propre). Les points fixes de f sont donc les $a/9$ avec a entier entre 0 et 8.
3. La suite stationne si et seulement si, pour un $m \in \mathbb{N}$, $u_m = f^m(u_0)$ est un point fixe de f ; or $u_m = 10^m u_0 - E(10^m u_0)$. On doit donc avoir $10^m u_0 = A + a/9 = B/9$ avec $A, a, B \in \mathbb{N}$; on en déduit immédiatement que (u_n) est stationnaire si et seulement si $u_0 = \dfrac{B}{9\times 10^m}$ avec $B, m \in \mathbb{N}$ (et $B < 9\times 10^m$).
4. Pour $x \in [0,1[$, posons $g(x) = \exp(2i\pi x)$ et $v_n = g(u_n)$. On a $v_{n+1} = v_n^{10}$. Si u_n converge vers ℓ, alors $\ell \in [0,1]$ et, puisque g est continue, $g(u_n)$ converge vers $g(\ell)$. Or $z \mapsto z^{10}$ étant continue, on doit avoir $g(\ell)^{10} = g(\ell)$, ce qui impose (puisque $g(\ell) \neq 0$) que $g(\ell)$ est racine 9-ième de 1, donc $\ell = \dfrac{k}{9}$ avec $k \in \{0,\ldots,9\}$. Remarquons que pour $x \in [0,1[$ et $k \in \{0,\ldots,9\}$, si $|x - \dfrac{k}{9}| < 0{,}01$, alors $x \in \left[\dfrac{k}{10}, \dfrac{k+1}{10}\right[$. Donc, si pour $n \geqslant n_0$ on a $|u_n - \ell| < 0{,}01$, la $n+1$-ième décimale de u_0 est k. On en déduit que (u_n) converge si et seulement si la suite est stationnaire.
5. La suite est périodique si et seulement s'il existe n tel que $u_n = u_0$, ce qui est vrai si et seulement si u_0 est rationnel et dans son écriture en fraction irréductible $u_0 = p/q$ le dénominateur q n'est pas divisible par 2 ou par 5 ; la suite devient périodique à partir d'un certain rang si et seulement si u_0 est rationnel.
6. Prenons $u_0 = 0{,}1234567891011121314....$ Il existe donc $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ d'écriture décimale $k = b_1\ldots b_s$, le développement décimal de $u_{\varphi(k)}$ soit $0, b_1\ldots b_s\ldots$ Démontrons que $\{u_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0,1]$. Soit $\alpha \in [0,1]$ et $\alpha = 0, a_1a_2\ldots a_m\ldots$ un développement décimal de α. Pour $m \in \mathbb{N}$, posons $k_m = 10^m + \sum_{k=1}^{m} a_k 10^{m-k}$. Le développement décimal de $u_{\varphi(k_m)}$ est $0, 1a_1a_2\ldots a_m\ldots$, donc celui de $u_{\varphi(k_m)+1}$ est $0, a_1a_2\ldots a_m\ldots$. On en déduit que $|u_{\varphi(k_m)+1} - \alpha| \leqslant 10^{-m}$, donc la suite $(u_{\varphi(k_m)+1})$ converge vers α.

Dans la preuve de la question 6

a) Le fait de considérer le nombre $10^m + \sum_{k=1}^{m} a_k 10^{m-k}$ et non $\sum_{k=1}^{m} a_k 10^{m-k}$ n'est vraiment utile que si $a_1 = 0$, *i.e.* pour $\alpha < 0{,}1$.

b) On parle d'*un* développement décimal de α afin de pouvoir traiter en même temps le cas $\alpha = 1$.