Corrigé de la seconde épreuve de l'agrégation interne 2012

I-A-1) Fixons $N \in \mathbb{N}$: un point $a \in E$ appartient à $\overline{T_N(u)}$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n \geqslant N\,,\ \|u_n - a\| < \varepsilon \quad ,$$

ce qui montre que : $A = T_N(u) \cup V(u) \subset \overline{T_N(u)}$. Réciproquement, si $a \notin A$, on a : $a \notin V(u)$ donc il existe un réel $r > 0$ et un entier n_0 tels que : $\|u_n - a\| \geqslant r$ pour tout entier $n \geqslant n_0$. Mais l'ensemble $\{\|u_n - a\| \,/\, N \leqslant n < n_0\}$ est fini, donc s'il est non vide il admet un plus petit élément $\delta > 0$, et en posant : $\varepsilon = \min(r\,,\,\delta) > 0$ on obtient : $\|u_n - a\| \geqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$, donc $a \notin \overline{T_N(u)}$, et on en conclut par contraposée que : $\overline{T_N(u)} = A$.

I-A-2) On en déduit que :

$$V(u) \subset F = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{T_N(u)} \quad ,$$

et si $\ell \in F$, pour tout entier naturel N on a : $\ell \in \overline{T_N(u)}$, donc pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un entier $n \geqslant N$ tel que : $\|u_n - \ell\| < \varepsilon$, donc $\ell \in V(u)$ et finalement : $V(u) = F$.

I-A-3.a) L'ensemble $V(u)$ est donc une intersection de fermés de E, donc il est fermé.

I-A-3.b) Si la suite u est bornée, elle admet une valeur d'adhérence par le théorème de Bolzano-Weierstrass puisque E est supposé de dimension finie, donc $V(u)$ est non vide, et il existe un réel M tel que $T_0(u)$ est contenu dans la boule fermée de centre 0 et de rayon M, donc son adhérence l'est aussi donc $V(u)$ est borné : on en conclut que $V(u)$ est compact.

I-A-4.a) Par l'absurde, supposons que l'ensemble $\mathcal{I}$ des entiers n tels que :

$$u_n \notin B = \bigcup_{i=0}^{k} \mathcal{B}(\ell_i\,,\,\varepsilon)$$

soit infini. Cela permet de construire une suite v extraite de u et à valeurs dans $E \setminus B$, et v est bornée donc possède une valeur d'adhérence ℓ, et comme $E \setminus B$ est fermé on obtient : $d(\ell\,,\,\ell_i) \geqslant \varepsilon > 0$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant k$. Mais ℓ est aussi une valeur d'adhérence de u ce qui est contradictoire, donc $\mathcal{I}$ est fini ou vide, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $n < n_0$ pour tout $n \in \mathcal{I}$.

I-A-4.b) Si u converge vers ℓ, toute suite extraite de u converge vers ℓ donc $V(u)$ est un singleton. Réciproquement, si u est bornée et possède une unique valeur d'adhérence ℓ, on déduit du **a** que pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un entier n_0 tel que $u_n \in \mathcal{B}(\ell\,,\,\varepsilon)$ pour tout entier $n \geqslant n_0$, c'est à dire que u converge vers ℓ d'où l'équivalence.

I-A-5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons : $w_{2n} = u_n$ et $w_{2n+1} = v_n$. On a bien sûr : $V(u) \cup V(v) \subset V(w)$ (en extrayant de w les suites $(w_{2\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_{2\varphi(n)+1})_{n\in\mathbb{N}}$ respectivement), et si une suite $(w_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de w converge vers ℓ, l'un des deux ensembles $\{n \in \mathbb{N} \,/\, \varphi(n) \text{ est pair }\}$ et $\{n \in \mathbb{N} \,/\, \varphi(n) \text{ est impair }\}$ est infini, ce qui permet de construire une suite extraite soit de u soit de v convergeant vers ℓ et on a donc : $V(w) \subset V(u) \cup V(v)$ d'où l'égalité souhaitée.

I-B-6) Soit u une suite discrète convergeant vers ℓ : il existe donc un entier n_0 tel que :

$$\|u_n - \ell\| < \frac{r}{2} \qquad \text{pour tout entier } n \geqslant n_0 \quad .$$

S'il existait deux entiers $m\,,\,n \geqslant n_0$ tels que : $u_m \neq u_n$, on obtiendrait :

$$\|u_n - u_m\| \leqslant \|u_n - \ell\| + \|u_m - \ell\| < r$$

ce qui est contradictoire, donc : $u_n = u_{n_0}$ pour tout $n \geqslant n_0$ et u est stationnaire, donc $\ell = u_{n_0}$.

I-B-7) Soit u une suite discrète : d'après **I-A-2** on a : $V(u) \supset W = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} T_N(u)$, et si $\ell \in V(u)$ il existe une suite v extraite de u qui converge vers ℓ. Mais v est elle aussi discrète, donc elle est stationnaire en ℓ et on en déduit que : $\ell \in W$, d'où l'égalité.

I-B-8) Cela équivaut à : $2^p \leqslant n < 2^p + 2^p = 2^{p+1}$ (et on a alors : $k = n - 2^p$), et la suite $(2^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$, d'où le résultat. En d'autres termes, p est le plus grand entier tel que $2^p \leqslant n$ et il est unique, puis il détermine k.

I-B-9) En langage algorithmique, cela devient (avec $q = 2^p$) :

Entrer n ;
Poser $p = 0$ et $q = 1$;
Tant que $2\,q \leqslant n$ faire :
  $p \leftarrow p + 1$ et $q \leftarrow 2\,q$;
Fin tant que ;
Afficher p et $k = n - q$.

Remarque : l'interdiction des fonctions “puissance” exclut *a fortiori* l'usage du logarithme, et on ne peut donc pas se contenter d'écrire : $p = E\Big(\dfrac{\ln(n)}{\ln(2)}\Big)$ où E est la partie entière !

I-B-10.a)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	18	20
p_n	0	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
$u_n = k_n$	0	0	1	0	1	2	3	0	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2	3	4

I-B-10.b) La suite u est à valeurs dans $\mathbb{N}$ donc elle est discrète, donc le résultat de **B-7** montre que $V(u) \subset \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit q un entier naturel tel que $2^q > k$: pour tout entier $p \geqslant q$ on obtient : $u_{\varphi(p)} = k$ en posant $\varphi(p) = 2^p + k$, et $(u_{\varphi(p)})_{p \geqslant q}$ est une suite extraite de u qui est constante égale à k, donc $k \in V(u)$. On en conclut que : $V(u) = \mathbb{N}$.

I-B-11.a) L'entier n n'intervient pas (!), mais on peut écrire le développement propre en base 2 de x sous la forme :

$$x = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{a_m}{2^m}$$

où a est une suite à valeurs dans $\{0\,,\,1\}$ qui comporte une infinité de termes différents de 1 . Pour tout entier $m \geqslant 1$, on a donc :

$$\frac{q_m}{2^m} \leqslant x < \frac{q_m}{2^m} + \frac{1}{2^m} \quad \text{où} \quad q_m = \sum_{k=1}^{m} 2^{m-k}\, a_k \;\leqslant\; \sum_{k=1}^{m} 2^{m-k} = 2^m - 1 \quad \text{et} \quad q_m \in \mathbb{N} \quad ,$$

donc en posant $\varphi(m) = 2^m + q_m$ on obtient : $p_{\varphi(m)} = m$ et $k_{\varphi(m)} = q_m$, d'où :

$$\Big| v_{\varphi(m)} - x \Big| < \frac{1}{2^m} \quad .$$

Mais on a : $2^m \leqslant \varphi(m) < 2^{m+1}$ pour tout $m \geqslant 1$ donc φ est strictement croissante, et la suite $\big(v_{\varphi(m)}\big)_{m \geqslant 1}$ converge vers x, qui est donc une valeur d'adhérence de v.

I-B-11.b) La suite v est à valeurs dans $[0\,,\,1[$ donc d'après **A-3** l'ensemble $V(v)$ est un fermé de $\mathbb{R}$ inclus dans $[0\,,\,1]$. Mais on a montré qu'il contient $[0\,,\,1[$, d'où : $V(v) = [0\,,\,1]$.

I-C-12) L'ensemble $T_N(u)$ est non vide car il contient u_N et est minoré car u est bornée, ce qui assure l'existence de sa borne inférieure m_N par la définition axiomatique de $\mathbb{R}$.

I-C-13.a) Comme u est majorée la suite $(m_N)_{N \in \mathbb{N}}$ l'est aussi, et pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a : $T_{N+1}(u) \subset T_N(u)$, donc $m_{N+1} \geqslant m_N$ et $(m_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est croissante, donc elle est convergente.

I-C-13.b) Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout entier $n \geqslant N$ on a : $\inf u \leqslant u_n \leqslant \sup u$, d'où : $\inf u \leqslant m_N \leqslant \sup u$, et en passant à la limite on en déduit que : $\inf u \leqslant \liminf\limits_{n \to +\infty} u_n \leqslant \sup u$.

I-C-14) Posons : $\ell = \liminf\limits_{n \to +\infty} u_n$ et soient $\varepsilon > 0$ un réel et N un entier naturel. Comme la suite $(m_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ en croissant, il existe un entier $p \geqslant N$ tel que : $\ell - \varepsilon < m_p \leqslant \ell$, et comme $m_p = \inf\, T_p(u)$ il existe un entier $n \geqslant p$ tel que : $m_p \leqslant u_n < m_p + \varepsilon$. On obtient donc un entier $n \geqslant N$ tel que : $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$, donc $\ell \in V(u)$.

I-C-15) Pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a : $T_N(u) \subset [m_N\,,\,+\infty[$, donc $\overline{T_N(u)} \subset [m_N\,,\,+\infty[$ car cet intervalle est un fermé. Mais d'après **I-A-2** on a : $\ell \in \overline{T_N(u)}$ pour tout $N \in \mathbb{N}$, d'où : $\ell \geqslant m_N$. En faisant tendre N vers l'infini, on en déduit que : $\ell \geqslant \liminf\limits_{n \to +\infty} u_n$ comme demandé. Comme $\liminf\limits_{n \to +\infty} u_n \in V(u)$, on en conclut que : $\liminf\limits_{n \to +\infty} u_n = \min\, V(u) = \inf\, V(u)$.

I-C-16) Pour tous entiers $n \geqslant N$, on a : $m_N = \inf\, T_N(u) \leqslant u_n \leqslant v_n$, donc $m_N \leqslant x$ pour tout $x \in T_N(v)$ et on obtient par définition de la borne inférieure : $M_N = \inf\, T_N(v) \geqslant m_N$. En faisant tendre N vers l'infini, on en déduit que : $\liminf\limits_{n\to+\infty} v_n \geqslant \liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$.

I-C-17) Pour tous entiers $n \geqslant N$, on a : $m_N = \inf\, T_N(u) \leqslant u_n$ et $M_N = \inf\, T_N(v) \leqslant v_n$, donc : $u_n + v_n \geqslant m_N + M_N$, d'où : $s_N = \inf\, T_N(u+v) \geqslant m_N + M_N$ comme ci-dessus. En faisant tendre N vers l'infini, on en déduit que :

$$\liminf_{n\to+\infty}(\, u_n + v_n\,) \geqslant \liminf_{n\to+\infty} u_n + \liminf_{n\to+\infty} v_n \quad ,$$

et en posant : $u_n = (-1)^n$ et $v_n = (-1)^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ on obtient :

$$\liminf_{n\to+\infty}(\, u_n + v_n\,) = \lim_{n\to+\infty}(\, u_n + v_n\,) = 0 \quad \text{tandis que :} \quad \liminf_{n\to+\infty} u_n = \liminf_{n\to+\infty} v_n = -1 \quad .$$

I-D-18) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la question **B.11** vérifie pour tout entier naturel p :

$$0 \leqslant v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^p} \ \text{ si } \ 2^p \leqslant n < 2^{p+1} - 1 \ , \ \text{mais :} \quad v_{2^{p+1}-1} = \frac{2^p - 1}{2^p} \ \text{ et } \ v_{2^{p+1}} = 0 \ .$$

Pour corriger cela, posons : $u_n = \sin(\pi\, v_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On obtient donc :

$$|\, u_{n+1} - u_n\,| \leqslant \pi\, |\, v_{n+1} - v_n\,| \leqslant \frac{\pi}{2^p} < \frac{2\,\pi}{n} \qquad \text{si} \qquad 2^p \leqslant n < 2^{p+1} - 1$$

pour tout tout entier naturel p , ainsi que :

$$|\, u_{2^{p+1}} - u_{2^{p+1}-1}\,| = \sin\left(\frac{\pi}{2^{p+1}}\right) < \frac{\pi}{2^{p+1}} < \frac{2\,\pi}{2^{p+1} - 1} \quad ,$$

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à évolution lente, et elle est bien sûr bornée. De plus, pour tout $x \in [0\,,\,1]$ il existe une suite extraite de v qui converge vers x , donc une suite extraite de u qui converge vers $\sin(\pi\, x)$, d'où : $V(u) = [-1\,,\,1]$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente.

Remarque : cette question est loin d'être évidente puisque l'exemple classique $u_n = \ln(n)$ n'est pas borné et l'exemple proposé en **B.11** n'est pas à évolution lente : mieux vaut ne pas perdre trop de temps sur ce genre de question...

I-D-19) Par définition de la connexité il existe une partition de l'espace métrique $V(u)$ en deux fermés non vides, donc deux fermés de E notés F_1 et F_2 tels que $K_1 = F_1 \cap V(u)$ et $K_2 = F_2 \cap V(u)$ sont non vides et : $K_1 \cup K_2 = V(u)$ et $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Mais l'espace $V(u)$ est compact car u est bornée, donc K_1 et K_2 le sont aussi.

I-D-20) L'espace $K_1 \times K_2$ est compact et la fonction $f \ : \ K_1 \times K_2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x\,,\,y) = \|x - y\|$ est continue, donc elle atteint un minimum qui est par définition la distance a entre K_1 et K_2 : comme f est à valeurs strictement positives puisque K_1 et K_2 sont disjoints, on en déduit que a l'est aussi.

I-D-21) Les fonctions f_1 , f_2 : $E \to \mathbb{R}$ définies par $f_1(x) = d(x\,,\,K_1)$ et $f_2(x) = d(x\,,\,K_1)$ sont continues d'après l'inégalité triangulaire, donc Ω_1 et Ω_2 sont des ouverts de E , ce qui montre que K est un fermé de $\overline{\mathcal{B}(0\,,\,M)}$ qui est compacte, donc il est lui aussi compact.

I-D-22) On obtient aisément par l'inégalité triangulaire :

$$d(\Omega_1\,,\,\Omega_2) \geqslant d(K_1\,,\,K_2) - 2\,\frac{a}{3} = \frac{a}{3} \quad ,$$

et en fixant un entier naturel p on obtient un entier naturel $N > p$ tel que :

$$\|u_{n+1} - u_n\| < \frac{a}{3} \qquad \text{pour tout entier } n \geqslant N$$

puisque la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et qu'on a : $a > 0$. En choisissant $\ell_1 \in K_1$ on obtient un entier $n_0 \geqslant N$ tel que :

$$\|u_{n_0} - \ell_1\| < \frac{a}{3}$$

donc $u_{n_0} \in \Omega_1$, et supposons par l'absurde que $u_n \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ pour tout entier $n \geqslant n_0$: comme $\|u_{n+1} - u_n\| < d(\Omega_1\,,\,\Omega_2)$ pour tout $n \geqslant n_0$, on en déduit par récurrence que : $u_n \in \Omega_1$ pour tout $n \geqslant n_0$, donc que toute valeur d'adhérence de u appartient à $\overline{\Omega_1}$. Mais on a :

$$d(\overline{\Omega_1}\,,\,K_2) = d(\Omega_1\,,\,K_2) \geqslant d(K_1\,,\,K_2) - \frac{a}{3} = \frac{2\,a}{3} > 0$$

donc $\overline{\Omega_1}$ et K_2 sont disjoints, ce qui contredit le fait que u possède une valeur d'adhérence dans K_2 . On en conclut qu'il existe un entier $n \geqslant n_0$ tel que $u_n \notin \Omega_1 \cup \Omega_2$, et comme $u_n \in \overline{\mathcal{B}(0\,,\,M)}$ on a : $u_n \in K$. On a donc montré que pour tout entier naturel p il existe un entier $n > p$ tel que $u_n \in K$, ce qui permet de montrer qu'il existe une suite extraite de u à valeurs dans K . Elle admet donc une valeur d'adhérence qui n'est pas dans $K_1 \cup K_2 = V(u)$, ce qui est contradictoire et on en conclut que $V(u)$ est connexe.

II-23) Si $\ell \in V(u)$, il existe une suite $\big(u_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de u qui converge vers $\ell \in K$, et comme f est continue la suite $\big(u_{\varphi(n)+1}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$ donc : $f\big(V(u)\big) \subset V(u)$. La suite $\big(u_{\varphi(n)-1}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est **pas forcément convergente**, mais elle est à valeurs dans K qui est compact donc elle possède une valeur d'adhérence $\ell' \in V\big(u\big)$, et on obtient de même : $\ell = f(\ell')$ d'où l'inclusion réciproque, et finalement : $f\big(V(u)\big) = V(u)$.

II-24) Comme $\mathbb{Q}$ est un corps, pour tout $x \in [0\,,\,1]$ on a les équivalences :

$$f(x) \in \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad |2x-1| \in \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad 2x-1 \in \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{Q} \quad .$$

II-25.a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{H}(n)$ l'hypothèse : $u_n = \dfrac{h_n}{b}$ où $b \geqslant h_n \in \mathbb{N}$. L'hypothèse $\mathcal{H}(0)$ est donc vraie, et si $\mathcal{H}(n)$ est vérifiée on obtient :

$$u_{n+1} \;=\; 1 - \left|\, 2\,\frac{h_n}{b} - 1 \,\right| \;=\; \frac{b - |\,2\,h_n - b\,|}{b} \;=\; \frac{h_{n+1}}{b}$$

et : $-b \leqslant 2\,h_n - b \leqslant b$, d'où : $0 \leqslant h_{n+1} \leqslant b$ et $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie, d'où le résultat.

II-25.b) Comme $[\![0\,,\,b]\!]$ est fini, il existe deux entiers $m \neq n$ tels que $h_m = h_n$, et quitte à réordonner m et n on peut poser : $m = N$ et $n = N + p$ avec $p > 0$: les suites $(u_q)_{q\geqslant N}$ et $(u_{q+p})_{q\geqslant N}$ ont le même premier terme et sont définies par la même relation de récurrence, donc : $u_{q+p} = u_q$ pour tout entier $q \geqslant N$ et la suite u est p-périodique à partir du rang N .

II-26.a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$ l'hypothèse : $f^n(x) = a_n\,x + b_n$ où $a_n\,,\,b_n \in \mathbb{Z}$. L'hypothèse $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie, et si $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée on obtient :

$$f^{n+1}(x) \;=\; 1 - |\,2\,a_n\,x + 2\,b_n - 1\,| = 1 - \varepsilon_n\,(2\,a_n\,x + 2\,b_n - 1) \;=\; -2\,\varepsilon_n\,a_n\,x + (1 - 2\,\varepsilon_n\,b_n + \varepsilon_n)$$

avec $\varepsilon_n \in \{-1\,,\,1\}$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et on conclut par récurrence.

II-26.b) Observons de plus qu'on obtient ci-dessus : $a_{n+1} = -2\,\varepsilon_n\,a_n$ avec $\varepsilon_n \in \{-1\,,\,1\}$ et $a_0 = 1$, donc : $|\,a_n\,| = 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En considérant les suites a et b définies par $x = u_0$, on obtient deux entiers $p > 0$ et N tels que : $a_{N+p}\,u_0 + b_{N+p} = a_N\,u_0 + b_N$, et comme $a_{N+p} \neq a_N$ puisque $|\,a_{N+p}\,| > |\,a_N\,|$ on en déduit que : $u_0 \in \mathbb{Q}$.

II-27.a) Tant que $u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$ on obtient : $u_{n+1} = 2\,u_n$, et comme $\dfrac{2^{p-1}}{1+2^p} \leqslant \dfrac{1}{2}$ on en déduit par récurrence finie que : $u_n = \dfrac{2^{n+1}}{1+2^p}$ si $0 \leqslant n \leqslant p-1$, puis que : $u_p = \dfrac{2}{1+2^p} = u_0$.

II-27.b) On en déduit que la suite u est p-périodique, donc elle est en particulier discrète et le résultat de la question **I-B-7** permet d'en déduire que : $V(u) = \left\{ \dfrac{2^n}{1+2^p} \Big/ 1 \leqslant n \leqslant p \right\}$.

III-28) Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $m \in \mathbb{N}^*$ on a évidemment : $0 \leqslant H_m(x\,,\,u\,,\,\varepsilon) \leqslant 1$.

III-29) Posons : $G_m(\varepsilon) = H_m(x\,,\,u\,,\,\varepsilon)$ pour tout entier $m \geqslant 1$ et $G(\varepsilon) = H(x\,,\,u\,,\,\varepsilon)$ pour tout réel $\varepsilon > 0$. Pour tout entier $m \geqslant 1$ l'application G_m est donc croissante, et le résultat de la question **I-C-16** permet d'en déduire que G est croissante, donc qu'elle admet une limite à droite en 0 puisqu'elle est minorée (par 0).

III-30) On déduit des questions **III-28** et **I-C-13** que : $0 \leqslant H(x\,,\,u\,,\,\varepsilon) \leqslant 1$ pour tout $\varepsilon > 0$, puis que : $\quad 0 \leqslant F(x\,,\,u) \leqslant 1 \quad .$

III-31.a) Comme les $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant p}$ sont distincts, on a : $r = \min\limits_{0\leqslant k\,,\,l\leqslant p} |\,x_k - x_l\,| > 0$, et pour tout réel $0 < \varepsilon < \dfrac{r}{2}$ les intervalles $(\,]\,x_k - \varepsilon\,,\, x_k + \varepsilon\,[\,)_{0\leqslant k\leqslant p}$ sont deux à deux disjoints, d'où :

$$\sum_{k=0}^{p} H_m(x_k\,,\,u\,,\,\varepsilon) \leqslant 1 \qquad \text{pour tout entier } m \geqslant 1 \quad ,$$

et grâce à la question **I-C-17** on en déduit que :

$$\sum_{k=0}^{p} H(x_k\,,\,u\,,\,\varepsilon) \leqslant 1 \quad ,$$

puis en faisant tendre ε vers 0 que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} F(x_k\,,\,u) \leqslant 1 \quad .$

III-31.b) Pour tout entier naturel N on en déduit que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} F(x_k\,,\,u) \leqslant 1$, donc que la série à termes positifs $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} F(x_k\,,\,u)$ est convergente et que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} F(x_k\,,\,u) \leqslant 1 \quad .$

III-32.a) Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que : $|\,\ell - u_n\,| < \varepsilon$ pour tout entier $n \geqslant N$, donc pour tout entier $m \geqslant N$ on obtient :

$$H_m(\ell\,,\,u\,,\,\varepsilon) \;\geqslant\; \frac{m-N}{m} \quad ,$$

d'où : $H(\ell\,,\,u\,,\,\varepsilon) = 1$. En faisant tendre ε vers 0 , on en conclut que : $\quad F(\ell\,,\,u) = 1 \quad .$

III-32.b) Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{\ell\}$, on obtient $F(x\,,\,u) \geqslant 0$ par **III-30** et : $F(x\,,\,u) + F(\ell\,,\,u) \leqslant 1$ par la question **III-31-a**, d'où : $F(x\,,\,u) = 0$.

III-33) En notant $f = F(a\,,\,u) > 0$, on en déduit qu'il existe un réel $r > 0$ tel que : $G(\varepsilon) = H(a\,,\,u\,,\,\varepsilon) \geqslant \frac{f}{2} > 0$ pour tout $0 < \varepsilon < r$, donc pour tout $\varepsilon > 0$ par croissance de G . Mais si l'ensemble $\mathcal{I}_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N}\,/\;\, |\,a - u_n\,| < \varepsilon\}$ était fini, on obtiendrait un entier N tel que :

$$H_m(a\,,\,u\,,\,\varepsilon) \;\leqslant\; \frac{N}{m} \qquad \text{pour tout entier } m \geqslant 1 \quad ,$$

donc : $H(a\,,\,u\,,\,\varepsilon) = 0$ en faisant tendre m vers $+\infty$: l'ensemble $\mathcal{I}_\varepsilon$ est donc infini pour tout réel $\varepsilon > 0$, donc pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $N \in \mathbb{N}$ il existe un entier $n \geqslant N$ tel que $|\,u_n - a\,| < \varepsilon$, d'où : $\quad a \in V(u) \quad .$

III-34) Considérons la suite réelle u définie par : $u_n = 1$ s'il existe un entier p tel que $n = p^2$ et $u_n = 0$ sinon : elle diverge, mais pour tout réel $\varepsilon > 0$ et tout entier $m \geqslant 1$ on a :

$$H_m(0\,,\,u\,,\,\varepsilon) \geqslant \frac{m - \sqrt{m}}{m} \quad ,$$

donc on obtient : $H_m(0\,,\,u\,,\,\varepsilon) = 1$ en faisant tendre m vers $+\infty$ et donc : $F(0\,,\,u) = 1$.

III-35) Considérons la suite u construite en **I-B-10** : on a donc $V(u) = \mathbb{N}$, mais pour tout entier naturel k et tout réel $0 < \varepsilon < 1$ on obtient pour tout entier $m \geqslant k$:

$$H_m(k\,,\,u\,,\,\varepsilon) = \frac{\{n \in [\![0\,,\,m-1]\!]\,/\,n = 2^p + k \text{ avec } 0 \leqslant k < 2^p \leqslant m\}}{m} \leqslant \frac{\ln(m)}{m\,\ln(2)}$$

donc la suite $\big(H_m(k\,,\,u\,,\,\varepsilon)\big)_{m\geqslant 1}$ tend vers 0 , d'où : $H(k\,,\,u\,,\,\varepsilon) = 0$ puis : $F(k\,,\,u) = 0$.

IV-36) L'ensemble $\mathcal{G}(L\,,\,r)$ est invariant par permutation des $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ et suppression des doublons, donc on se ramène à la liste $L' = (2; 3; 5; 12; 14; 15; 20)$ pour obtenir :

$$\mathcal{G}(L\,,\,2) = [2\,,\,5] \cup [12\,,\,15] \cup [20\,,\,20] \qquad \text{et} \qquad \mathcal{N}(L\,,\,2) = 3 \quad .$$

IV-37) En langage algorithmique, on obtient :

Entrer L et r ;
Trier L en une liste croissante $(y_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$;
Poser $i = 1$ et $N = 0$;
Tant que $i \leqslant p$ faire :
  Poser $j = i$;
  Tant que ($j < p$ et $y_{j+1} - y_j \leqslant r$) faire :
    $j \leftarrow j + 1$;
  Fin tant que ;
  $N \leftarrow N + 1$ et $i \leftarrow j + 1$;
Fin tant que ;
Afficher $\mathcal{N}(L, r) = N$.

La boucle sur j détermine le plus grand indice $i \leqslant j \leqslant p$ tel que $y_{k+1} - y_k \leqslant r$ pour tout $i \leqslant k \leqslant j-1$, donc la composante connexe de $\mathcal{G}(L\,,\,r)$ contenant y_i est $[y_i\,,\,y_j]$ (il ne faut pas oublier le cas où $j = i$), et la boucle sur i passe ensuite à y_{j+1} pour la composante suivante...

IV-38) Pour tous $m\,,\,n \in [\![p\,,\,p^2-1]\!]$ tels que : $|\,u_n - u_m\,| < \dfrac{2r}{5}$, on sait qu'il existe $k\,,\,l \in [\![1\,,\,q]\!]$ tels que : $x_m \in \left]\,y_k - \dfrac{r}{5}\,,\,y_k + \dfrac{r}{5}\,\right[$ et $x_n \in \left]\,y_l - \dfrac{r}{5}\,,\,y_l + \dfrac{r}{5}\,\right[$. On obtient :

$$|\,y_k - y_l\,| \leqslant |\,y_k - u_m\,| + |\,u_m - u_n\,| + |\,u_n - y_l\,| \leqslant \frac{4r}{5} < r \quad ,$$

donc par définition de r on a : $k = l$ ce qui montre l'implication, et la réciproque est évidente.

IV-39) Pour tout entier naturel $p \geqslant p_0$, l'ensemble $\mathcal{G}\Big(L_p\,,\,\dfrac{2r}{5}\Big)$ est la réunion des intervalles $[x_i\,,\,x_j]$ pour $i\,,\,j \in [\![p\,,\,p^2-1]\!]$ vérifiant : $0 \leqslant x_j - x_i \leqslant \dfrac{2r}{5}$. On vient de montrer que dans ce cas, il existe un entier $k \in [\![1\,,\,q]\!]$ tel que x_i et x_j appartiennent à $\left]\,y_k - \dfrac{r}{5}\,,\,y_k + \dfrac{r}{5}\,\right[$, donc par convexité on en déduit que : $[x_i\,,\,x_j] \subset \left]\,y_k - \dfrac{r}{5}\,,\,y_k + \dfrac{r}{5}\,\right[$ d'où le résultat.

IV-40) Supposons par l'absurde qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ vérifiant :

$$\forall p_\varepsilon \in \mathbb{N}^*\,,\ \exists p \geqslant p_\varepsilon\,,\ \{u_p\,,\,u_{p+1}\,,\,\ldots\,,\,u_{p^2-1}\} \cap \,]\,x-\varepsilon\,,\,x+\varepsilon\,[= \emptyset \quad .$$

Comme $p > 0$ on obtient : $H_{p^2-1}(x\,,\,u\,,\,\varepsilon) \leqslant \dfrac{p}{p^2} = \dfrac{1}{p}$, et comme cette suite converge vers 0 cela permet de construire une suite extraite de $\big(H_m(x\,,\,u\,,\,\varepsilon)\big)_{m\geqslant 1}$ qui converge aussi vers 0, donc grâce au résultat de **I-C-15** on en déduit que : $H(x\,,\,u\,,\,\varepsilon) = 0$ donc : $F(x\,,\,u) = 0$ puisque la fonction $\varepsilon \mapsto H(x\,,\,u\,,\,\varepsilon)$ est croissante, ce qui est contradictoire d'où le résultat.

IV-40) Pour tout $k \in [\![1\,,\,q]\!]$ on a : $F(y_k\,,\,u) > 0$, donc en posant $\varepsilon = \dfrac{r}{5}$ on vient de montrer qu'il existe un entier P_k tel que pour tout entier $p \geqslant P_k$ on a :

$$\{u_p\,,\,u_{p+1}\,,\,\ldots\,,\,u_{p^2-1}\} \cap \left]\,y_k - \frac{r}{5}\,,\,y_k + \frac{r}{5}\,\right[\neq \emptyset \quad .$$

En posant : $P = \max(P_1\,,\,\ldots\,,\,P_q)$ on obtient donc pour tout entier $p \geqslant P$ et tout $k \in [\![1\,,\,q]\!]$:

$$\{u_p\,,\,u_{p+1}\,,\,\ldots\,,\,u_{p^2-1}\} \cap \left]\,y_k - \frac{r}{5}\,,\,y_k + \frac{r}{5}\,\right[\neq \emptyset \quad \text{donc : } \mathcal{G}\Big(L_p\,\frac{2\,r}{5}\Big) \cap \left]\,y_k - \frac{r}{5}\,,\,y_k + \frac{r}{5}\,\right[\neq \emptyset \quad .$$

IV-41) Les intervalles $\left]\,y_k - \dfrac{r}{5}\,,\,y_k + \dfrac{r}{5}\,\right[$ pour $1 \leqslant k \leqslant q$ sont deux à deux disjoints, donc la question précédente montre que pour tout entier $p \geqslant P$ on a : $N.V.A.(p) \geqslant q$. Réciproquement, pour tout entier $p \geqslant P$ on a : $u_p \in \displaystyle\bigcup_{k=1}^{q} \left]\,y_k - \frac{r}{5}\,,\,y_k + \frac{r}{5}\,\right[$ et si u_i et u_j avec $i\,,\,j \in [\![p\,,\,p^2-1]\!]$ appartiennent à un même intervalle $\left]\,y_k - \dfrac{r}{5}\,,\,y_k + \dfrac{r}{5}\,\right[$ avec $1 \leqslant k \leqslant q$ on a : $|\,u_i - u_j\,| \leqslant \dfrac{2\,r}{5}$ donc u_i et u_j appartiennent à la même composante connexe de $\mathcal{G}\Big(L_p\,,\,\dfrac{2r}{5}\Big)$, ce qui montre que : $N.V.A.(p) \leqslant q$ et on en conclut que : $N.V.A.(p) = q$.