I. Préliminaires

1) L'homothétie $x \mapsto ax$, de rapport $a \geqslant 0$, dans $\mathbf{R}^2$, a pour déterminant a^2. Elle transforme $\mathrm{Q}(1)$ en $\mathrm{Q}(a)$. D'après la propriété c), $s(\mathrm{Q}(a)) = a^2\, s(\mathrm{Q}(1))$ d'où $s(\mathrm{Q}(a)) = 4a^2$.

Puisqu'une isométrie vectorielle de $\mathbf{R}^2$ a pour déterminant 1 ou -1, le même raisonnement prouve qu'un carré de côté $2a$ a pour aire a^2.

2) L'application affine de E dans E donnée par $x \mapsto \mathrm{M} + ax$ (translation $\circ$ homothétie) envoie $\mathrm{D}(0,1)$ sur $\mathrm{D}(\mathrm{M},a)$. L'application linéaire associée a pour déterminant a^2, donc $\mathrm{D}(\mathrm{M},a)$ a pour aire πa^2.

Le cercle $\mathrm{C}(\mathrm{M},a)$ a une aire nulle (propriété d)), et $\overline{\mathrm{D}}(\mathrm{M},a)$, réunion des ensembles disjoints $\mathrm{D}(\mathrm{M},a)$ et $\mathrm{C}(\mathrm{M},a)$, a aussi pour aire πa^2 (propriété b)).

3) Comme les disques $\mathrm{D}(\mathrm{M}_i)$ sont deux à deux disjoints, on a, par la propriété b),

$$s(\cup_i \mathrm{D}(\mathrm{M}_i)) = \sum_i s(\mathrm{D}(\mathrm{M}_i)) = \pi \ \mathrm{Card}\,(\mathrm{I}).$$

Puisque l'ensemble X contient les disques $\mathrm{D}(\mathrm{M}_i)$, la propriété a) entraîne $\pi\ \mathrm{Card}\,(\mathrm{I}) \leqslant s(\mathrm{X})$.

4) Pour $0 \leqslant a \leqslant 1$, on a $\mathrm{N}(a) \leqslant \mathrm{N}(1) \leqslant s(\mathrm{Q}(1))/\pi = 4/\pi < 2$, d'où $\mathrm{N}(a) \leqslant 1$.

Comme $\mathrm{Q}(1)$ contient $\mathrm{D}(0)$, on a $\mathrm{N}(1) = 1$.

Soit $\mathrm{D}(\mathrm{M}_0)$, où $\mathrm{M}_0 = (x_0, y_0)$, un disque inclus dans $\mathrm{Q}(a)$; alors le point $(x_0 + t, y_0)$ appartient à $\mathrm{Q}(a)$ pour $t \in]-1, 1[$, ce qui donne $x_0 + 1 \leqslant a$, $x_0 - 1 \geqslant -a$, d'où $2a \geqslant 2$. Donc $\mathrm{N}(a) = 0$ pour $0 \leqslant a < 1$.

5) Soit $\mathrm{D}(\mathrm{M}_0)$, où $\mathrm{M}_0 = (x_0, y_0)$, un disque contenu dans $\mathrm{Q}(a)$, $a \geqslant 1$. Comme dans la question 4), on obtient $x_0 \in [-a+1, a-1]$ et de même pour y_0. Si $\mathrm{M} = (x, y)$ appartient à $\mathrm{D}(\mathrm{M}_0)$, on a

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < 1,$$

d'où $|x - x_0| < 1$ et $|y - y_0| < 1$, ce qui implique que x et y sont dans l'intervalle $]-a, a[$ et $\mathrm{D}(\mathrm{M}) \subset \mathrm{Q}^0(a)$.

Le cas $a < 1$ est trivial (*cf.* 4)).

[Autre rédaction possible : Il est connu que l'intérieur de $\mathrm{Q}(a)$ dans E est $\mathrm{Q}^0(a)$. Comme $\mathrm{D}(\mathrm{M})$ est ouvert dans E, il est contenu dans $\mathrm{Q}^0(a)$ s'il l'est dans $\mathrm{Q}(a)$.]

6) Soit $\mathrm{D}(\mathrm{M}_i)$, $i = 1, \ldots, \mathrm{N}(a)$ un dallage de $\mathrm{Q}(a)$; les $\mathrm{D}(\mathrm{M}_i)$ sont donc inclus dans $\mathrm{Q}^0(a)$. Considérons les n^2 translatés de $\mathrm{Q}^0(a)$ par les vecteurs $v_{\ell,k} = ((2k+1-n)a, (2\ell+1-n)a)$, k et ℓ variant de 0 à $n-1$. On a

$$\mathrm{Q}^0(a) + v_{\ell,k} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | (2k-n)a < x < (2(k+1)-n)a, (2\ell-n)a < y < (2(\ell+1)-n)a\}.$$

Donc ces translatés sont deux à deux disjoints et inclus dans $\mathrm{Q}(na)$. La famille des $\mathrm{D}(\mathrm{M}_i) + v_{\ell,k}$, i variant de 1 à $\mathrm{N}(a)$, et k et ℓ de 0 à $n-1$, est un dallage de $\mathrm{Q}(na)$ dont le cardinal est $n^2\mathrm{N}(a)$. On a donc $\mathrm{N}(na) \geqslant n^2 \mathrm{N}(a)$.

[NB : Un dessin avec une explication suffit pour dire que $\mathrm{Q}(na)$ est union de n^2 carrés de côté $2a$. Par contre, il faut vraiment un argument pour montrer que l'on a bien des disques disjoints.]

7) On a déjà vu en 5) que, si $D(M)$ est inclus dans $Q(a)$, alors M appartient à $Q(a-1)$. Le même raisonnement qu'en 5) prouve la réciproque.

Par ailleurs, si $d(M_1, M_2) < 2$, alors le milieu I du segment M_1M_2 est à une distance < 1 de M_1 et de M_2, donc appartient à $D(M_1) \cap D(M_2)$. Réciproquement, si M appartient à $D(M_1) \cap D(M_2)$, on a $d(M_1, M_2) < 2$ par l'inégalité triangulaire. Donc $d(M_1, M_2) \geqslant 2$ équivaut bien à $D(M_1) \cap D(M_2) = \emptyset$.

8) Soit $b \geqslant 0$ et soient $M_1 = (X_1, y_1)$ et $M_2 = (x_2, y_2)$ dans $Q(b)$; on a $|x_1 - x_2| \leqslant 2b$, $|y_1 - y_2| \leqslant 2b$, d'où $d(M_1, M_2) \leqslant 2b\sqrt{2}$. Pour $0 \leqslant b < \sqrt{2}/2$, on a, d'après 7), $N(1+b) = 1$.

Pour $b = \sqrt{2}/2$, on prend $M_1 = (-b, -b)$, $M_2 = (b, b)$ et alors $d(M_1, M_2) = 2$. D'après 7), on a $N(1 + \sqrt{2}/2) \geqslant 2$. Mais tout point de $Q(\sqrt{2}/2)$ autre que M_1 est à une distance < 2 de M_2, donc $N(1 + \sqrt{2}/2) = 2$.

9) C'est clairement vrai d'après 4) si $0 \leqslant a < 1$: on a nécessairement $n = 0$ et $N(a) = 0$. On suppose donc $a \geqslant 1$. Pour chaque entier $k \geqslant 1$, choisissons un dallage $D(M_i(k))$ de $Q(a + \frac{1}{k})$, $i = 1, \ldots, n$. Alors $(M_1(k), \ldots, M_n(k))$ appartient à la partie compacte $Q(a)^n$ de E^n. On a donc une valeur d'adhérence $(M_1, \ldots, M_n)$ dans $Q(a)^n$. Comme la distance est une fonction continue sur $E \times E$, les inégalités $d(M_i(k), M_j(k)) \geqslant 2$ pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, entraînent $d(M_i, M_j) \geqslant 2$. Pour $k \geqslant \ell$, $M_i(k)$ appartient à $Q(a + \frac{1}{k} - 1)$, donc M_i appartient aussi à $Q(a + \frac{1}{\ell} - 1)$ et, faisant tendre ℓ vers $+\infty$, $M_i \in Q(a-1)$. Par 7) à nouveau, $(D(M_i))$, $1 \leqslant i \leqslant n$, est un dallage de $Q(a)$, donc $N(a) \geqslant n$.

II . Existence de δ

1) D'après (I.1), on a $s(Q(a)) = 4a^2$. Par (I.3) appliqué à $X = Q(a)$, on a $N(a) \geqslant 4a^2/\pi$, d'où $d(a) \leqslant 4/\pi$.

2) Par (I.6), on a $N(na) \geqslant n^2\, N(a)$, d'où $N(n+\alpha)a \geqslant n^2\, N(a)$ et

$$d((n+\alpha)a) \geqslant \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 d(a) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 d(a).$$

3) Soit η un nombre réel, $0 < \eta < 1$, et soit a un nombre réel > 0 tel que $d(a) \geqslant \delta\eta$. Comme la fonction $n \mapsto \left(\frac{1}{1+1/n}\right)^2$ est croissante et tend vers 1 quand n tend vers l'infini, il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que

$$\left(\frac{1}{1+1/n}\right)^2 \geqslant \eta \quad \text{pour} \quad n \geqslant k.$$

Si l'on a $b \geqslant ka$, alors il existe un entier $n \geqslant k$ et un nombre réel α, $0 \leqslant \alpha < 1$ tels que $b = (n+\alpha)a$, et, par 2), on a $d(b) \geqslant \delta\eta^2$. Cela montre que $d(a)$ tend vers δ quand n tend vers l'infini.

III. Minoration de δ

1) Les éléments de Λ sont les nombres complexes $z = 2a + 2bj$ où a et b sont entiers. On calcule

$$|z|^2 = (2a-b)^2 + 3b^2 = 4(a^2 - ab + b^2).$$

La forme quadratique $a^2 - ab + b^2$ a pour discriminant -3 ; elle est donc définie positive ; elle prend des valeurs entières aux points entiers. On a donc $|z|^2 \geqslant 4$ pour tout $z \in \Lambda$, $z \neq 0$.

[Plus explicitement, si $b = 0$ alors $|z|^2 = 4a^2 \geqslant 4$. Si $b \neq 0$, alors $|2a - b|$ est soit 0 auquel cas $|z|^2 = 4a^2 \geqslant 4$, soit $\geqslant 1$ auquel cas $|z|^2 \geqslant 1 + 3 = 4$.]

2) Soient λ et μ dans Λ ; si $\lambda \neq \mu$, on a $\lambda - \mu \in \Lambda - \{0\}$ donc $d(\lambda, \mu) \geqslant 2$ par 1). Soit a un nombre réel $\geqslant 1$. Par (I.7), les disques $\mathrm{D}(\lambda)$, où λ parcourt $\mathrm{Q}(a-1) \cap \Lambda$, forment donc un dallage de $\mathrm{Q}(a)$. On a donc $\delta \geqslant \mathrm{Card}\,(\mathrm{Q}(a-1) \cap \Lambda)/a^2$.

Évaluons $\mathrm{Card}\,(\mathrm{Q}(a-1) \cap \Lambda)$ pour $a \geqslant 2$. Un point $2x + 2yj$ de Λ appartient à $\mathrm{Q}(a-1)$ si et seulement si $|y| \leqslant (a-1)\sqrt{3}$ et $|2x - y| \leqslant a - 1$, ce qui équivaut à

$$|y| \leqslant (a-1)\sqrt{3} \quad \text{et} \quad \frac{-a+1+y}{2} \leqslant x \leqslant \frac{a-1+y}{2}.$$

Un intervalle compact de $\mathbf{R}$, de longueur ℓ, contient au moins $\ell - 1$ points entiers et on obtient donc

$$\mathrm{Card}\,(\mathrm{Q}(a-1) \cap \Lambda) \geqslant \Big(\frac{2(a-1)}{\sqrt{3}} - 1\Big)\,(a-1-1),$$

d'où

$$\delta \geqslant \frac{1}{a^2}\Big(\frac{2(a-1)}{\sqrt{3}} - 1\Big)\,(a-2).$$

Faisant tendre a vers l'infini, on trouve $\delta \geqslant 2/\sqrt{3}$.

IV . Un résultat auxiliaire

1) Pour x et $y \in \mathbf{R}$, on a

$$\inf(x, y) = \frac{x+y}{2} - \Big|\frac{x+y}{2}\Big|.$$

Comme la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbf{R}$, l'application $(x, y) \mapsto \inf(x, y)$ est continue sur $\mathbf{R}^2$. La borne inférieure de deux fonctions continues de E^3 dans $\mathbf{R}$ est donc continue, et, par récurrence, il en est de même de la borne inférieure de k fonctions continues sur E^3, pour tout entier $k \geqslant 1$. Par suite la fonction μ est continue sur E^3 et, comme l'ensemble $\overline{\mathrm{D}}^{\,3}$ est compact, son image $\mu(\overline{\mathrm{D}}^{\,3})$ est une partie compacte de $\mathbf{R}$. Bien sûr, l'ensemble $\mu(\overline{\mathrm{D}}^{\,3})$ n'est pas vide et il a donc un plus grand élément m.

2) On calcule

$$\begin{aligned}|e^{i\beta} - e^{i\alpha}|^2 &= |e^{i(\beta-\alpha)} - 1|^2,\\ &= (\cos(\beta-\alpha) - 1)^2 + (\sin(\beta-\alpha))^2,\\ &= 2(1 - \cos(\beta-\alpha)),\end{aligned}$$

d'où

$$|e^{i\beta} - e^{i\alpha}| = 2\,\Big|\,\sin\Big(\frac{\beta-\alpha}{2}\Big)\,\Big|.$$

[Voir aussi dessin avec demi angle au centre.]

On peut supposer $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \leqslant 2\pi$, la conclusion ne dépendant que de $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$, $e^{i\gamma}$ à l'ordre près. On a donc

$$(\beta - \alpha) + (\gamma - \beta) + (\alpha + 2\pi - \gamma) = 2\pi,$$

et l'une des différences est $\leqslant 2\pi/3$. La distance correspondante est alors $\leqslant 2\sin(\pi/3) = \sqrt{3}$.

3. a) Si $\mu(z_1, z_2, z_3) = 0$, deux des nombres z_i sont égaux. On prend alors $(t_1, t_2, t_3) = (1, j, j^2)$. On suppose dans la suite que les z_i sont deux à deux distincts. On désigne par n le nombre des indices i pour lesquels $|z_i| = 1$.

Supposons d'abord $n = 0$. On note alors t le plus grand des modules des nombres z_i ; on a $0 < t < 1$. On pose $t_i = z_i/t$ pour $i = 1, 2, 3$. On a bien $|t_i| \leqslant 1$ pour $i = 1, 2, 3$ et

$$\mu(t_1, t_2, t_3) = \mu(z_1, z_2, z_3)/t > \mu(z_1, z_2, z_3).$$

Supposons ensuite $n = 1$. Soit i l'indice tel que $|z_i| = 1$. On note j et k les deux autres indices ; on a $|z_j| < 1$ et $|z_k| < 1$. Pour $t > 1$, soit h_t l'homothétie de centre z_i , de rapport t . Pour tout point $z \in \mathbf{C}$, $h_t(z)$ tend vers z lorsque t tend vers 1 . Donc, pour t assez proche de 1 , on a $|h_t(z_j)| < 1$ et $|h_t(z_k)| < 1$. On choisit un tel t et on pose $t_i = z_i$, $t_j = h_t(z_j)$, $t_k = h_t(z_k)$. On a bien $|t_i| \leqslant 1$ pour $i = 1, 2, 3$ et

$$\mu(t_1, t_2, t_3) = t\,\mu(z_1, z_2, z_3) > \mu(z_1, z_2, z_3).$$

Supposons enfin $n = 2$. On suppose $|z_i| < 1$, $|z_j| = |z_k| = 1$. Soit a le milieu du segment $z_j z_k$. Si $a \neq 0$, c'est-à-dire si les points z_j et z_k ne sont pas diamétralement opposés sur le cercle unité, on effectue une translation τ de vecteur $-\varepsilon a$, où $0 < \varepsilon < 1$ et où ε est assez petit pour que $|z_i - \varepsilon a|$ reste < 1 . Comme $z_j - a$ et a sont orthogonaux, on a

$$|z_j|^2 = |z_j - a|^2 + |a|^2,$$
$$|z_j - \varepsilon a|^2 = |z_j - a|^2 + |(1-\varepsilon)a|^2.$$

On en déduit $|z_j - \varepsilon a| < |z_j|$. De même, on a $|z_k - \varepsilon a| < |z_k|$. On pose $z'_\ell = \tau(z_\ell)$ pour $\ell = i, j, k$; on a $\mu(z'_i, z'_j, z'_k) = \mu(z_i, z_j, z_k)$ puisque la translation τ conserve les longueurs. On est ainsi ramené au premier cas étudié où $n = 0$.

Si enfin $a = 0$, on déplace z_i perpendiculairement à la droite $z_j z_k$: si u est le projeté orthogonal de z_i sur la droite $z_j z_k$, on pose $t_j = z_j$, $t_k = z_k$ et $t_i = u + t(z_i - u)$, où $t > 1$ est assez proche de 1 pour que $|t_i| \leqslant 1$. On a alors

$$|t_i - z_j|^2 = |u - z_j|^2 + t^2\,|z_i - u|^2 > |z_i - z_j|^2,$$

d'où $|t_i - z_j| > |z_i - z_j|$ et, de même, $|t_i - z_k| > |z_i - z_k|$, d'où $\mu(t_i, t_j, t_k) = \mu(z_i, z_j, z_k)$.

3.b) Soit (u_1, u_2, u_3) un point de $\overline{\mathrm{D}}^{\,3}$ tel que $\mu(u_1, u_2, u_3) = m$. Alors, d'après 3.a), tous les u_i ont pour module 1 , et d'après 2) on a $m \leqslant \sqrt{3}$. Or $\mu(1, j, j^2) = \sqrt{3}$, donc $m = \sqrt{3}$ et, à nouveau, par 3.a), on a $\mu(z_1, z_2, z_3) < \sqrt{3}$.

V . Majoration de δ

1) Les points M_i et M_j sont distincts. Soit L la médiatrice du segment $\mathrm{M}_i\mathrm{M}_j$. C'est l'ensemble des points M de E tels que $d(\mathrm{M}, \mathrm{M}_i) = d(\mathrm{M}, \mathrm{M}_j)$. Sur le complémentaire de L dans E , la fonction continue $\mathrm{M} \mapsto d(\mathrm{M}, \mathrm{M}_i) - d(\mathrm{M}, \mathrm{M}_j)$ prend des valeurs non nulles (en M_i et M_j par exemple). Son signe est constant dans chacun des demi-plans ouverts bornés par D (car ceux-ci sont connexes). L'ensemble considéré est donc le demi-plan ouvert borné par L qui contient le point M_i .

2) Remarquons d'abord que le disque D_i est contenu dans le disque Δ_i . Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{D}_i$; on a $d(\mathrm{M}, \mathrm{M}_i) < 1$. Pour $j \in \mathrm{I}$, $j \neq i$, on a $d(\mathrm{M}_i, \mathrm{M}_j) > 2$, donc $d(\mathrm{M}, \mathrm{M}_j) > 1$. Par suite le point M appartient à V_i , et on a démontré l'inclusion $\mathrm{D}_i \subset \mathrm{V}_i$.

Soit $j \in \mathrm{I}$, $j \neq i$; l'application $\mathrm{M} \mapsto d(\mathrm{M}, \mathrm{M}_i) - d(\mathrm{M}, \mathrm{M}_j)$ restreinte à Δ_i est continue. L'image réciproque U_j de $]-\infty, 0[$ par cette application est ouverte dans Δ_i . L'ensemble V_i , intersection de la famille des ensembles U_j , pour $j \in \mathrm{I}$, $j \neq i$, est ouvert dans Δ_i , donc dans E .

3) Admettons l'inégalité $s(\mathrm{D}_i) \leqslant (\pi/2\sqrt{3})\,s(\mathrm{V}_i)$ pour tout $i \in \mathrm{I}$. On a

$$s(\cup_i \mathrm{D}_i) = \sum_i s(\mathrm{D}_i) \leqslant \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \sum_i s(\mathrm{V}_i).$$

Mais, par construction, les ensembles V_i sont disjoints deux à deux et $s(\cup_i \mathrm{V}_i) = \sum_i s(\mathrm{V}_i)$, d'où $s(\cup_i \mathrm{D}_i) \leqslant \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\, s(\cup_i \mathrm{V}_i)$. Comme $\overline{\mathrm{Q}}$ contient tous les V_i, on obtient le résultat demandé.

3) On en déduit

$$\pi\,\mathrm{Card}\,(\mathrm{I}) \leqslant \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\; 4\,(a + \frac{2}{\sqrt{3}} - 1)^2,$$

d'où

$$d(a) \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}\;(a + \frac{2}{\sqrt{3}} - 1)^2/a^2.$$

Lorsque a tend vers $+\infty$, le second membre tend vers $2/\sqrt{3}$. On en déduit l'inégalité $\delta \leqslant 2/\sqrt{3}$ d'après (II.3) et l'égalité $\delta = 2/\sqrt{3}$ d'après (III.2).

VI. Démonstration d'une inégalité

On pose désormais $d(\mathrm{M}_i, \mathrm{M}_j) = 2\ell$. On a $\ell \geqslant 1$.

1) Comme en (I.7), $\Delta_i \cap \Delta_j = \phi$ signifie $d(\mathrm{M}_i, \mathrm{M}_j) < 4/\sqrt{3}$, c'est-à-dire $\ell < 2/\sqrt{3}$. Alors $\mathrm{C}_i \cap \mathrm{C}_j$ est formé des points M de E tels que $d(\mathrm{M}, \mathrm{M}_i) = d(\mathrm{M}, \mathrm{M}_j) = 2/\sqrt{3}$. Notant J le milieu du segment $\mathrm{M}_i\mathrm{M}_j$, ce sont les points de la médiatrice du segment $\mathrm{M}_i\mathrm{M}_j$ satisfaisant à $d(\mathrm{M}, \mathrm{J})^2 = \frac{4}{3} - \ell^2$; il y en a deux exactement. Ils sont distincts de J et ne sont donc pas alignés avec M_i ni avec M_j.

2) L'ensemble T_j est formé des barycentres M à coefficients > 0 de M_i et des points P du segment $\mathrm{A}_j\mathrm{B}_j$, distincts de A_j et B_j ; on a alors $p(\mathrm{M}) = p(\mathrm{P})$.

Choisissons un repère orthonormé d'origine M_i de sorte que le milieu J du segment $\mathrm{M}_i\mathrm{M}_j$ ait pour coordonnées $(\ell, 0)$. Les coordonnées des points A_j et B_j sont (ℓ, m) et $(\ell, -m)$, avec $l^2 + m^2 = 4/3$, $m > 0$. Alors $\Gamma_i \cap \Delta_j$ est formé des points M dont les coordonnées (x, y) satisfont à

$$x^2 + y^2 = \frac{4}{3}, \qquad (x - 2\ell)^2 + y^2 < \frac{4}{3}.$$

Compte tenu de la première équation, la deuxième relation équivaut à $x > \ell$. On a alors $\mathrm{M} = p(\mathrm{P})$ avec $\mathrm{P} = (\ell, \ell y/x)$ et

$$\Big|\frac{\ell y}{x}\Big| = \ell\,\frac{\sqrt{\frac{4}{3} - x^2}}{x} < \ell\,\frac{\sqrt{\frac{4}{3} - \ell^2}}{\ell} = m.$$

Donc P est bien dans le segment $\mathrm{A}_j\mathrm{B}_j$ et distinct de A_j et B_j.

Inversement, si P est dans le segment $\mathrm{A}_j\mathrm{B}_j$ et distinct de A_j et B_j, il a pour coordonnées (ℓ, y) avec $|y| < m$. Le point $p(\mathrm{P})$ a pour coordonnées $\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{\ell^2+y^2}}\,(\ell, y)$. Comme on a $\ell^2 + y^2 < \ell^2 + m^2 = 4/3$, l'abscisse du point $p(\mathrm{P})$ est $> \ell$; ainsi $p(\mathrm{P})$ appartient à $\Gamma_i \cap \Delta_j$.

3) On a $p(\mathrm{T}_j) \cap p(\mathrm{T}_k) = \Delta_j \cap \Delta_k \cap \Gamma_i$. Soit M un point de cette intersection. Alors M est à distance $2/\sqrt{3}$ de M_i, et à distance $< 2/\sqrt{3}$ de M_j et M_k. Par (IV.3.b) (et une homothétie de rapport $2/\sqrt{3}$) l'une des distances $d(\mathrm{M}_i, \mathrm{M}_j)$, $d(\mathrm{M}_j, \mathrm{M}_k)$, $d(\mathrm{M}_k, \mathrm{M}_i)$ est < 2, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse que l'on a un dallage. Donc $p(\mathrm{T}_j) \cap p(\mathrm{T}_k) = \phi$.

4) Avec le même repère et les mêmes notations qu'en 2), l'inégalité $d(\mathrm{M}, \mathrm{M}_i) \geqslant d(\mathrm{M}, \mathrm{M}_j)$ signifie que les coordonnées (x, y) du point M satisfont à à $x \geqslant \ell$. Alors le point $p(\mathrm{M})$ a pour coordonnées $\frac{2}{\sqrt{3}}\,(\frac{x}{r}, \frac{y}{r})$ avec $r = d(\mathrm{M}, \mathrm{M}_i) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Si le point M_i appartient à Δ_i, alors $r < 2/\sqrt{3}$, d'où $\frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{x}{r} > \ell$ et par 2) à nouveau $p(\mathrm{M})$ appartient à $\Delta_j \cap \Gamma_i$.

5) Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{T}_j$. Alors $\mathrm{M} \neq \mathrm{M}_i$ et $p(\mathrm{M}) \in \Delta_j \cap \Gamma_i$ par 2). Démontrons que M appartient à V_i . On note (x,y) les coordonnées de M . On a bien $d(\mathrm{M},\mathrm{M}_i) < d(\mathrm{M},\mathrm{M}_j)$ car $0 < x < \ell$. Supposons que l'on ait $d(\mathrm{M},\mathrm{M}_i) \geqslant d(\mathrm{M},\mathrm{M}_k)$ pour un indice k distinct de i et de j . Alors, d'après 4), on aurait $p(\mathrm{M}) \in \Delta_k \cap \Gamma_i$, d'où $p(\mathrm{M}) \in p(\mathrm{T}_k)$ par 2). Mais $p(\mathrm{T}_j) \cap p(\mathrm{T}_k)$ est vide par 3). Donc on a $d(\mathrm{M},\mathrm{M}_i) < d(\mathrm{M},\mathrm{M}_k)$ pour $k \neq i$, et le point M appartient à V_i .

Réciproquement soit M un point de V_i , distinct de M_i , tel que $p(\mathrm{M})$ soit dans $\Delta_j \cap \Gamma_i$. On note toujours (x,y) les coordonnées de M . Comme $d(\mathrm{M},\mathrm{M}_i) < d(\mathrm{M},\mathrm{M}_j)$, on a $x < \ell$. La condition $p(\mathrm{M}) \in \Delta_j \cap \Gamma_i$ s'exprime (*cf.* 2) par

$$x > 0, \qquad \left|\frac{y}{x}\right| < \frac{m}{\ell},$$

et le point M est alors barycentre à coefficients $1 - x/\ell$ et x/ℓ respectivement des points M_i (de coordonnées $(0,0)$) et P (de coordonnées $(\ell, y\,\ell/x)$). Le point P appartient au segment $\mathrm{A}_j\mathrm{B}_j$ en étant distinct de A_j et de B_j , donc le point M appartient à T_j .

6) Soit $\mathrm{M} \in \Delta_i$, un point distinct de M_i et tel que $p(\mathrm{M})$ n'appartienne à aucun ensemble $\Delta_j \cap \Gamma_i$, $j \in \mathrm{I}(i)$. Alors, d'après 4), le point M appartient à V_i . On en déduit que W_i est la réunion des rayons $[\mathrm{M}_i\mathrm{P}[$ où P parcourt l'ensemble des points de Γ_i qui ne sont dans aucun des Δ_j , $j \in \mathrm{I}(i)$. Par suite l'ensemble $\mathrm{W}_i \cap \mathrm{D}_i$ est l'homothétique de W_i par l'homothétie de centre M_i et de rapport $\sqrt{3}/2$, d'où le résultat par la propriété d) du préambule.

7) Avec les notations déjà introduites, l'aire de l'ensemble T_j est $m\ell$. Posons

$$m = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\beta, \qquad \ell = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\beta, \qquad \text{d'où } m\ell = \frac{2}{3}\sin 2\beta$$

avec $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. L'angle au sommet M_j de T_j vaut 2β , donc l'aire du secteur $\mathrm{T}_j \cap \mathrm{D}_i$ vaut β . Il s'agit donc de prouver que l'on a

$$\beta \leqslant \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\sin 2\beta.$$

La condition $\ell \geqslant 1$ se traduit par $0 \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{6}$. Mais la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ décroit de 1 à 0 sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$. On a donc

$$\frac{\sin 2\beta}{2\beta} \leqslant \frac{\sin(\pi/3)}{\pi/3} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$$

d'où le résultat.

8) L'ensemble V_i est la réunion disjointe de W_i et des ensembles T_j , $j \in \mathrm{I}(i)$. Donc

$$s(\mathrm{V}_i) = s(\mathrm{W}_i) + \sum_{j\in\mathrm{I}(i)} s(\mathrm{T}_j).$$

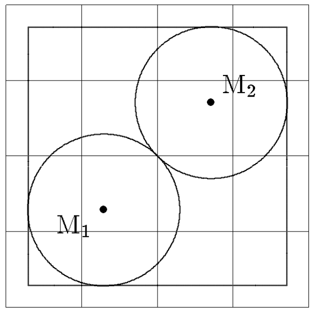
De même, l'ensemble D_i est la réunion disjointe de $\mathrm{D}_i \cap \mathrm{W}_i$ et des ensembles $\mathrm{D}_i \cap \mathrm{W}_j$, $j \in \mathrm{I}(i)$, d'où

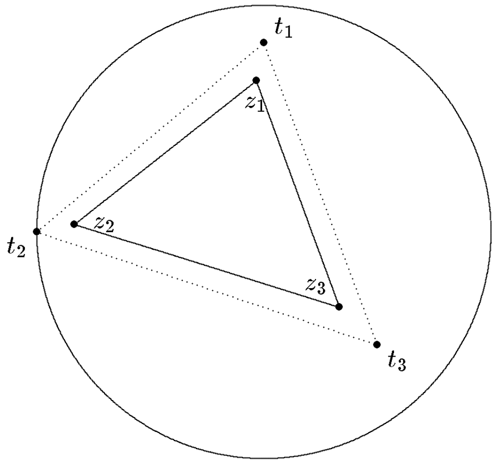
$$s(\mathrm{D}_i) = s(\mathrm{D}_i \cap \mathrm{W}_i) + \sum_{j\in\mathrm{I}(i)} s(\mathrm{D}_i \cap \mathrm{T}_j).$$

On en tire

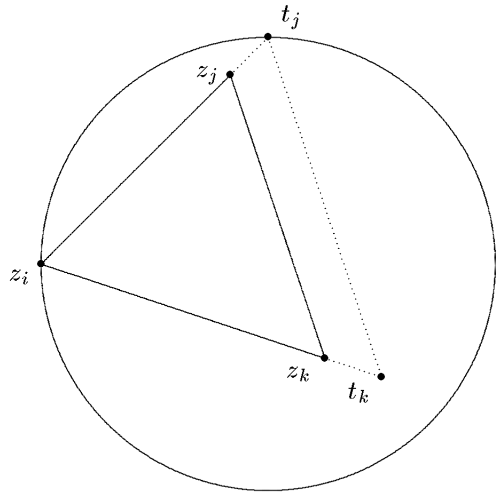
$$s(\mathrm{D}_i) \leqslant \frac{3}{4}s(\mathrm{W}_i) + \sum_{j\in\mathrm{I}(i)} s(\mathrm{D}_i \cap \mathrm{T}_j),$$

d'où le résultat puisque l'on a $\dfrac{3}{4} < \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

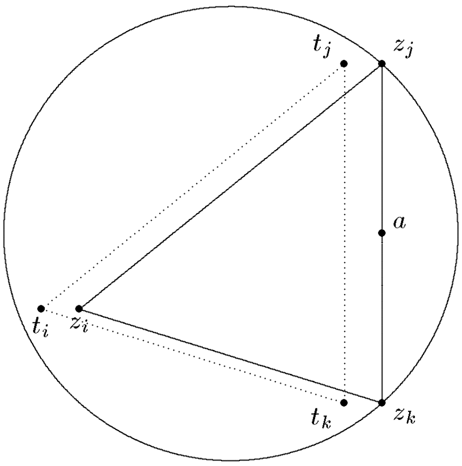




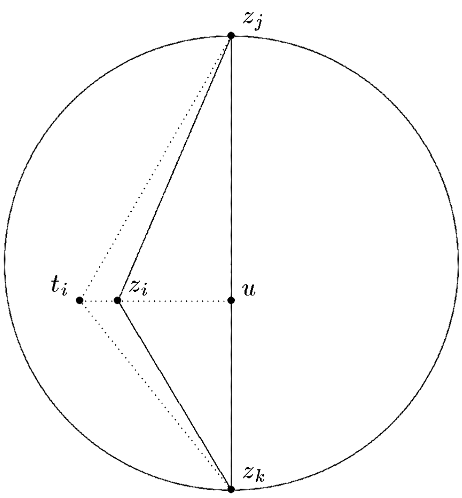
$n = 0$



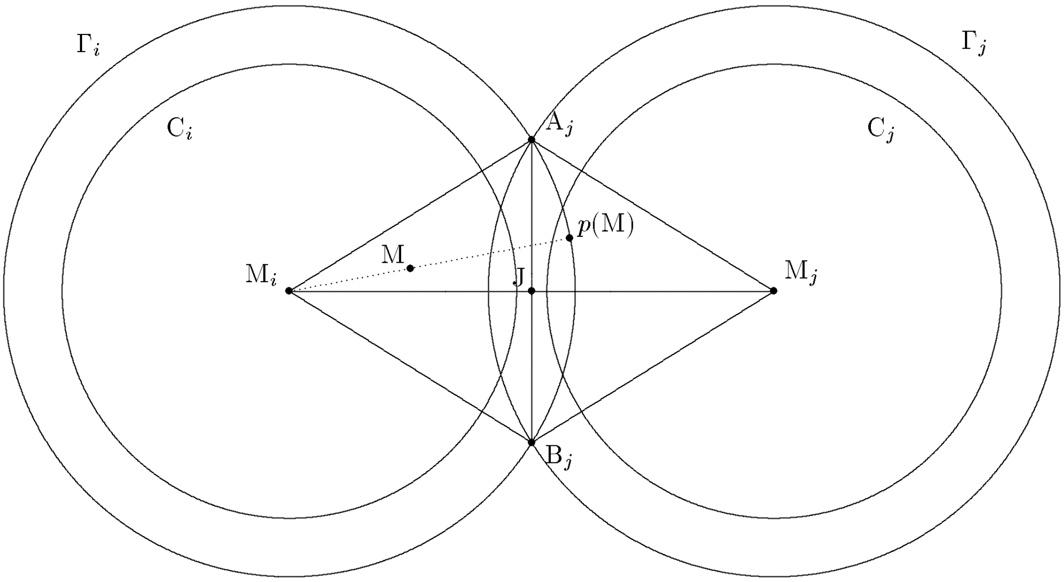
$n = 1$



$n = 2, \quad z_j + z_k \neq 0$



$n = 2, \quad z_j + z_k = 0$



Γ_i
Γ_j
C_i
C_j
A_j
$p(\mathrm{M})$
M
M_i
J
M_j
B_j