

Devoir N° 2

(Agrégation interne 1995 - épreuve 1)

Notations, conventions, définitions.

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ désigne l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans \mathbb{C} .
- Pour toute partie T de \mathbb{C} , on note $\mathcal{M}_{n,p}(T) \subset \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices dont tous les coefficients sont contenus dans T .
- Pour $n = p$, on écrit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (*resp.* $\mathcal{M}_n(T)$) au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ (*resp.* $\mathcal{M}_{n,n}(T)$).
- Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. On note ${}^tA \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C})$ sa matrice transposée et $\text{abs}(A) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}_+)$ la matrice de coefficient générique $|a_{i,j}|$.
- Pour $T \subset \mathbb{C}$, on identifie T^p à $\mathcal{M}_{p,1}(T)$ et $\mathcal{M}_1(T)$ avec T .
- On identifie une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec l'endomorphisme $x \mapsto Ax$ de \mathbb{K}^n (pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).
- La matrice $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ désigne la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les λ_i .
- Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On écrit $A \leq B$ (*resp.* $A < B$) si $B - A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}_+)$ (*resp.* $B - A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}_+^*)$).
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Le nombre réel positif $\rho(A) = \max\{|\lambda|; \lambda \text{ valeur propre de } A\}$ s'appelle rayon spectral de A .
- Une norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite sous-multiplicative si pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

I. Préliminaires

1. Soient $A, A' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{C}^n$. Établir les assertions suivantes :
 - a) $\text{abs}(A + A') \leq \text{abs}(A) + \text{abs}(A')$, $\text{abs}(AB) \leq \text{abs}(A) \text{abs}(B)$;
 - b) si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}_+^*)$, $x \in \mathbb{R}_+^p$ et $x \neq 0$, alors $Ax \in (\mathbb{R}_+^*)^n$;
 - c) si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}_+)$, $x \in (\mathbb{R}_+^*)^p$ et $Ax = 0$, alors $A = 0$.
2. a) Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ tels que $z \neq 0$ et $|z + z'| = |z| + |z'|$. Démontrer que $\frac{z'}{z} \in \mathbb{R}_+$.
 - b) En déduire que si $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ satisfont $|z_1 + \dots + z_n| = |z_1| + \dots + |z_n|$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout k on ait $z_k = e^{i\theta} |z_k|$.
 - c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+^*)$ et $x \in \mathbb{C}^n$ tels que $\text{abs}(Ax) = A \text{abs}(x)$. Démontrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = e^{i\theta} \text{abs}(x)$.
 - d) Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ et $x \in (\mathbb{R}_+^*)^p$ tels que $Ax = \text{abs}(A)x$. Démontrer que $A = \text{abs}(A)$.
3. On munit \mathbb{C}^n de la norme $x = (x_j) \mapsto \|x\| = \sup |x_j|$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $N_\infty(A) = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.
 - a) Démontrer que N_∞ est une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
 - b) Démontrer que pour $A = (a_{i,j})$ on a $N_\infty(A) = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$.

II. Rayon spectral d'une matrice

Dans toute la suite du problème, on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme sous-multiplicative $\|\cdot\|$.

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et λ une valeur propre de A .

- a) Démontrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$.
 - b) En déduire que $\rho(A) \leq N_\infty(A)$.
 - c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$; établir l'égalité $\rho(A^k) = \rho(A)^k$; en déduire que l'on a $\rho(A) \leq N_\infty(A^k)^{1/k}$.
2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible.
 - a) Comparer $\rho(S^{-1}AS)$ et $\rho(A)$.
 - b) Démontrer que l'application $N : X \mapsto N_\infty(S^{-1}XS)$ est une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
 3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
 - a) Soit $T = (t_{i,j})$ une matrice triangulaire supérieure semblable à A . Pour $d \in \mathbb{R}_+^*$ posons $\Delta_d = \text{diag}(1, d, \dots, d^{n-1})$. Calculer $\Delta_d^{-1}T\Delta_d$.
 - b) En déduire que, pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $r > \rho(A)$, il existe une norme sous-multiplicative N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que l'on ait $N(A) < r$.
 - c) Soit $r > \rho(A)$. Démontrer que $\lim_{k \rightarrow \infty} r^{-k}A^k = 0$.
 - d) Démontrer que la suite $(N_\infty(A^k)^{1/k})$ converge vers $\rho(A)$.
 - e) Trouver une matrice A telle que $\rho(A) = 1$ et que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ ne soit pas bornée.
 4. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\text{abs}(A) \leq B$.
 - a) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\text{abs}(A^k) \leq B^k$.
 - b) En déduire que $\rho(A) \leq \rho(B)$.

III. Limite de $\lambda^{-k}A^k$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A satisfait les conditions suivantes :

- (C1) $\rho(A) \neq 0$ et il existe une unique valeur propre λ de A telle que $|\lambda| = \rho(A)$;
- (C2) $\ker(\lambda I_n - A)$ est de dimension 1;
- (C3) il existe des vecteurs-colonne $v, w \in \mathbb{C}^n$ tels que $Av = \lambda v$, ${}^t w A = \lambda {}^t w$ et ${}^t w v = 1$.

On pose $L = v {}^t w$ et on note $H \subset \mathbb{C}^n$ l'hyperplan $H = \{x \in \mathbb{C}^n; {}^t w x = 0\}$.

1. Quelle est la dimension de $\ker(\lambda I_n - {}^t A)$?
2. a) Démontrer que L est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 1 et qu'il est indépendant du choix de v, w vérifiant les conditions (C3).
 - b) Décrire géométriquement l'endomorphisme $L : x \mapsto Lx$ de \mathbb{C}^n à l'aide de la droite vectorielle $\mathbb{C}v$ et de l'hyperplan H .
3. On pose $B = \lambda^{-1}A - L$.
 - a) Démontrer que $BL = LB = 0$.
 - b) Soit $x \in \mathbb{C}^n$ non nul. Démontrer que $Bx \in H$ et que si $Bx = \mu x$ avec $\mu \in \mathbb{C}^*$ alors $|\mu| < 1$.
 - c) Démontrer que $\lim_{k \rightarrow \infty} B^k = 0$.
 - d) En déduire que $\lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda^{-1}A)^k = L$.
4. On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, et que $v, w \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Démontrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour $k \geq k_0$ on ait $A^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+^*)$.

IV. Rayon spectral des matrices à coefficients positifs

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$.

1. Posons $\alpha = \inf_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{i,j}$ et $\beta = N_\infty(A) = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{i,j}$.

a) Démontrer que si $\alpha = \beta$, alors α est valeur propre de A et que l'on a $\rho(A) = \alpha = N_\infty(A)$.

b) Démontrer qu'il existe $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$ telle que $B \leq A$ et, pour tout i on ait $\sum_{j=1}^n b_{i,j} = \alpha$.

c) En déduire l'encadrement $\alpha \leq \rho(A) \leq \beta$.

2. Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Écrivons $Ax = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

a) Posons $D_x = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$. Calculer $D_x^{-1}AD_x$.

b) Démontrer que $\inf_{1 \leq i \leq n} \frac{y_i}{x_i} \leq \rho(A) \leq \sup_{1 \leq i \leq n} \frac{y_i}{x_i}$.

c) Soit $r \in \mathbb{R}$. Démontrer que :

i) si $Ax = rx$, alors $r = \rho(A)$;

ii) si $Ax \leq rx$, alors $r \geq \rho(A)$; si $Ax < rx$, alors $r > \rho(A)$;

iii) si $rx \leq Ax$, alors $r \leq \rho(A)$; si $rx < Ax$, alors $r < \rho(A)$.

d) En comparant $\rho(A)$ avec $\rho({}^tA)$, en déduire que, pour $r \in \mathbb{R}$, on a :

i) si ${}^tAx = r{}^tx$, alors $r = \rho(A)$;

ii) si ${}^tAx \leq r{}^tx$, alors $r \geq \rho(A)$; si ${}^tAx < r{}^tx$, alors $r > \rho(A)$;

iii) si $r{}^tx \leq {}^tAx$, alors $r \leq \rho(A)$; si $r{}^tx < {}^tAx$, alors $r < \rho(A)$.

V. Matrices carrées à coefficients strictement positifs

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+^*)$. On pose $r = \rho(A)$.

1. Démontrer que $r > 0$.

2. Soit $y \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $y \neq 0$. On suppose que $ry \leq Ay$.

a) Posons $v = Ay$ et $z = v - ry$. Démontrer que $v \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et que $Az \notin (\mathbb{R}_+^*)^n$.

b) En déduire que $Ay = ry$.

3. Soit λ une valeur propre de A telle que $|\lambda| = r$ et x un vecteur propre associé.

a) Démontrer que $A \text{abs}(x) = r \text{abs}(x)$; en déduire que $\text{abs}(x) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.

b) Démontrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = e^{i\theta} \text{abs}(x)$.

4. a) Démontrer que r est valeur propre de A et que c'est la seule valeur propre de module r .

b) Notons E_r l'ensemble des vecteurs colonnes x telles que $Ax = rx$ et F l'ensemble des vecteurs

colonnes $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tels que $x_1 = 0$. Démontrer que $E_r \cap F = \{0\}$ et en déduire que E_r est une droite vectorielle.

5. On fixe $v \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tel que $Av = rv$. Démontrer qu'il existe un unique $w \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tel que ${}^twA = r{}^tw$ et ${}^twv = 1$.

6. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$. On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k = B + \frac{1}{k}J$.

- a) Démontrer que la suite $(\rho(A_k))$ est décroissante et minorée par $\rho(B)$. Notons ℓ sa limite.
- b) Démontrer que $\rho(A_k)$ est une valeur propre de A_k et qu'il existe un unique vecteur propre associé appartenant à l'ensemble $K = \{x = (x_j) \in \mathbb{R}_+^n; \sum_{j=1}^n x_j = 1\}$.
- c) En déduire qu'il existe $x \in K$ tel que $Bx = \ell x$. Comparer ℓ et $\rho(B)$.
- d) Démontrer que $\rho(I_n + B) = 1 + \rho(B)$.

VI. Matrices carrées à coefficients positifs irréductibles

On suppose que $n \geq 2$. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$.

Pour une partie $I \subset \{1, \dots, n\}$, on note $\mathbb{R}^I \subset \mathbb{R}^n$ le sous-espace vectoriel

$$\mathbb{R}^I = \{x = (x_j) \in \mathbb{R}^n; \forall j \notin I, x_j = 0\}.$$

On dit que A est réductible s'il existe une partie $I \subset \{1, \dots, n\}$ distincte de \emptyset et de $\{1, \dots, n\}$ telle que \mathbb{R}^I soit stable par A . Dans le cas contraire on dit que A est irréductible.

Pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$ on écrit $i \prec j$ s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $i_0, i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i_0 = i, i_m = j$ et, pour tout $\ell \in \{1, \dots, m\}$ on ait $a_{i_{\ell-1}, i_\ell} \neq 0$.

1. Démontrer que la relation \prec est transitive.
2. a) Soit I une partie de $\{1, \dots, n\}$. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
 - (i) \mathbb{R}^I est invariant par A ;
 - (ii) pour tout $i \in \{1, \dots, n\} \setminus I$ et $j \in I$ on a $a_{i,j} = 0$;
 - (iii) pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in I$ on a $i \prec j \Rightarrow i \in I$.
- b) Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Posons $I = \{i\} \cup \{j; j \prec i\}$. Démontrer que \mathbb{R}^I est stable par A .
- c) En déduire que A est irréductible si et seulement si, $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ on a $i \prec j$.
3. Soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$. On suppose que $i \neq j$ et $i \prec j$. Démontrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $i_0, i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\}$ tous distincts tels que $i_0 = i, i_m = j$ et, pour tout $\ell \in \{1, \dots, m\}$ on ait $a_{i_{\ell-1}, i_\ell} \neq 0$.
4. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on pose $A^m = (a_{i,j}^{(m)})$.
 - a) Soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i \neq j$ et $i \prec j$. Démontrer qu'il existe $m \leq n - 1$ satisfaisant $a_{i,j}^{(m)} \neq 0$.
 - b) En déduire que A est irréductible si et seulement si $(I_n + A)^{n-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+^*)$.
5. Supposons que A est irréductible. Démontrer que le sous-espace propre de A associé à la valeur propre $\rho(A)$ est une droite vectorielle engendrée par un vecteur-colonne $v \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.
6. On dit que A est primitive s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+^*)$.
 - a) On suppose que A est primitive. Démontrer qu'elle est irréductible et que $\rho(A)$ est l'unique valeur propre de A de module $\rho(A)$.
 - b) Inversement, on suppose que A est irréductible et que $\rho(A)$ est l'unique valeur propre de A de module $\rho(A)$. Démontrer que A est primitive.
 - c) Démontrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est primitive.