Devoir N° 2

(Agrégation interne 1995 - épreuve 1)

Notations, conventions, définitions.

— $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ désigne l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{C}$.

— Pour toute partie T de $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(T) \subset \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices dont tous les coefficients sont contenus dans T.

— Pour $n = p$, on écrit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (*resp.* $\mathcal{M}_n(T)$) au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ (*resp.* $\mathcal{M}_{n,n}(T)$).

— Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. On note ${}^tA \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C})$ sa matrice transposée et $\mathrm{abs}(A) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}_+)$ la matrice de coefficient générique $|a_{i,j}|$.

— Pour $T \subset \mathbb{C}$, on identifie T^p à $\mathcal{M}_{p,1}(T)$ et $\mathcal{M}_1(T)$ avec T.

— On identifie une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec l'endomorphisme $x \mapsto Ax$ de $\mathbb{K}^n$ (pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

— La matrice $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ désigne la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les λ_i.

— Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On écrit $A \leqslant B$ (*resp.* $A < B$) si $B - A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}_+)$ (*resp.* $B - A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}_+^*)$).

— Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Le nombre réel positif $\rho(A) = \max\{|\lambda|;\ \lambda \text{ valeur propre de } A\}$ s'appelle rayon spectral de A.

— Une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite sous-multiplicative si pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

I. Préliminaires

1. Soient $A, A' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{C}^n$. Établir les assertions suivantes :
   a) $\mathrm{abs}(A + A') \leqslant \mathrm{abs}(A) + \mathrm{abs}(A')$, $\mathrm{abs}(AB) \leqslant \mathrm{abs}(A)\,\mathrm{abs}(B)$;
   b) si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}_+^*)$, $x \in \mathbb{R}_+^p$ et $x \neq 0$, alors $Ax \in (\mathbb{R}_+^*)^n$;
   c) si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}_+)$, $x \in (\mathbb{R}_+^*)^p$ et $Ax = 0$, alors $A = 0$.
2. a) Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ tels que $z \neq 0$ et $|z + z'| = |z| + |z'|$. Démontrer que $\dfrac{z'}{z} \in \mathbb{R}_+$.
   b) En déduire que si $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ satisfont $|z_1 + \dots + z_n| = |z_1| + \dots + |z_n|$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout k on ait $z_k = e^{i\theta}|z_k|$.
   c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+^*)$ et $x \in \mathbb{C}^n$ tels que $\mathrm{abs}(Ax) = A\,\mathrm{abs}(x)$. Démontrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = e^{i\theta}\,\mathrm{abs}(x)$.
   d) Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ et $x \in (\mathbb{R}_+^*)^p$ tels que $Ax = \mathrm{abs}(A)x$. Démontrer que $A = \mathrm{abs}(A)$.
3. On munit $\mathbb{C}^n$ de la norme $x = (x_j) \mapsto \|x\| = \sup |x_j|$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $N_\infty(A) = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$.
   a) Démontrer que N_∞ est une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   b) Démontrer que pour $A = (a_{i,j})$ on a $N_\infty(A) = \sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.

II. Rayon spectral d'une matrice

Dans toute la suite du problème, on munit $M_n(\mathbb{C})$ d'une norme sous-multiplicative $\|\cdot\|$.

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et λ une valeur propre de A.

a) Démontrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$.

b) En déduire que $\rho(A) \leqslant \|A\|$.

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$; établir l'égalité $\rho(A^k) = \rho(A)^k$; en déduire que l'on a $\rho(A) \leqslant \|A^k\|^{1/k}$.

2. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible.

a) Comparer $\rho(S^{-1}AS)$ et $\rho(A)$.

b) Démontrer que l'application $N : X \mapsto \|S^{-1}XS\|$ est une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Soit $T = (t_{i,j})$ une matrice triangulaire supérieure semblable à A. Pour $d \in \mathbb{R}_+^*$ posons $\Delta_d = \mathrm{diag}(1, d, \ldots, d^{n-1})$. Calculer $\Delta_d^{-1} T \Delta_d$.

b) En déduire que, pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $r > \rho(A)$, il existe une norme sous-multiplicative N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que l'on ait $N(A) < r$.

c) Soit $r > \rho(A)$. Démontrer que $\lim\limits_{k\to\infty} r^{-k}A^k = 0$.

d) Démontrer que la suite $(\|A^k\|^{1/k})$ converge vers $\rho(A)$.

e) Trouver une matrice A telle que $\rho(A) = 1$ et que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne soit pas bornée.

4. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{abs}(A) \leqslant B$.

a) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{abs}(A^k) \leqslant B^k$.

b) En déduire que $\rho(A) \leqslant \rho(B)$.

III. Limite de $\lambda^{-k}A^k$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A satisfait les conditions suivantes :

(C1) $\rho(A) \neq 0$ et il existe une unique valeur propre λ de A telle que $|\lambda| = \rho(A)$;

(C2) $\ker(\lambda I_n - A)$ est de dimension 1 ;

(C3) il existe des vecteurs-colonne $v, w \in \mathbb{C}^n$ tels que $Av = \lambda v$, ${}^t\!wA = \lambda\, {}^t\!w$ et ${}^t\!wv = 1$.

On pose $L = v\, {}^t\!w$ et on note $H \subset \mathbb{C}^n$ l'hyperplan $H = \{x \in \mathbb{C}^n ;\ {}^t\!wx = 0\}$.

1. Quelle est la dimension de $\ker(\lambda I_n - {}^t\!A)$?

2. a) Démontrer que L est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 1 et qu'il est indépendant du choix de v, w vérifiant les conditions (C3).

b) Décrire géométriquement l'endomorphisme $L : x \mapsto Lx$ de $\mathbb{C}^n$ à l'aide de la droite vectorielle $\mathbb{C}v$ et de l'hyperplan H.

3. On pose $B = \lambda^{-1}A - L$.

a) Démontrer que $BL = LB = 0$.

b) Soit $x \in \mathbb{C}^n$ non nul. Démontrer que $Bx \in H$ et que si $Bx = \mu x$ avec $\mu \in \mathbb{C}^*$ alors $|\mu| < 1$.

c) Démontrer que $\lim\limits_{k\to\infty} B^k = 0$.

d) En déduire que $\lim\limits_{k\to\infty} (\lambda^{-1}A)^k = L$.

4. On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, et que $v, w \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Démontrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour $k \geqslant k_0$ on ait $A^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+^*)$.

IV. Rayon spectral des matrices à coefficients positifs

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$.

1. Posons $\alpha = \inf\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}$ et $\beta = N_\infty(A) = \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}$.

a) Démontrer que si $\alpha = \beta$, alors α est valeur propre de A et que l'on a $\rho(A) = \alpha = N_\infty(A)$.

b) Démontrer qu'il existe $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$ telle que $B \leqslant A$ et, pour tout i on ait $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{i,j} = \alpha$.

c) En déduire l'encadrement $\alpha \leqslant \rho(A) \leqslant \beta$.

2. Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Écrivons $Ax = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

a) Posons $D_x = \operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_n)$. Calculer $D_x^{-1} A D_x$.

b) Démontrer que $\displaystyle\inf_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{y_i}{x_i} \leqslant \rho(A) \leqslant \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{y_i}{x_i}$.

c) Soit $r \in \mathbb{R}$. Démontrer que :

i) si $Ax = rx$, alors $r = \rho(A)$;

ii) si $Ax \leqslant rx$, alors $r \geqslant \rho(A)$; si $Ax < rx$, alors $r > \rho(A)$;

iii) si $rx \leqslant Ax$, alors $r \leqslant \rho(A)$; si $rx < Ax$, alors $r < \rho(A)$.

d) En camparant $\rho(A)$ avec $\rho({}^tA)$, en déduire que, pour $r \in \mathbb{R}$, on a :

i) si ${}^t x A = r\, {}^t x$, alors $r = \rho(A)$;

ii) si ${}^t x A \leqslant r\, {}^t x$, alors $r \geqslant \rho(A)$; si ${}^t x A < r\, {}^t x$, alors $r > \rho(A)$;

iii) si $r\, {}^t x \leqslant {}^t x A$, alors $r \leqslant \rho(A)$; si $r\, {}^t x < {}^t x A$, alors $r < \rho(A)$.

V. Matrices carrées à coefficients strictement positifs

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+^*)$. On pose $r = \rho(A)$.

1. Démontrer que $r > 0$.

2. Soit $y \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $y \neq 0$. On suppose que $ry \leqslant Ay$.

a) Posons $v = Ay$ et $z = v - ry$. Démontrer que $v \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et que $Az \notin (\mathbb{R}_+^*)^n$.

b) En déduire que $Ay = ry$.

3. Soit λ une valeur propre de A telle que $|\lambda| = r$ et x un vecteur propre associé.

a) Démontrer que $A \operatorname{abs}(x) = r \operatorname{abs}(x)$; en déduire que $\operatorname{abs}(x) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.

b) Démontrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = e^{i\theta} \operatorname{abs}(x)$.

4. a) Démontrer que r est valeur propre de A et que c'est la seule valeur propre de module r.

b) Notons E_r l'ensemble des vecteurs colonnes x telles que $Ax = rx$ et F l'ensemble des vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tels que $x_1 = 0$. Démontrer que $E_r \cap F = \{0\}$ et en déduire que E_r est une droite vectorielle.

5. On fixe $v \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tel que $Av = rv$. Démontrer qu'il existe un unique $w \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tel que ${}^t w A = r\, {}^t w$ et ${}^t w v = 1$.

6. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$. On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k = B + \dfrac{1}{k} J$.

a) Démontrer que la suite $(\rho(A_k))$ est décroissante et minorée par $\rho(B)$. Notons ℓ sa limite.

b) Démontrer que $\rho(A_k)$ est une valeur propre de A_k et qu'il existe un unique vecteur propre associé appartenant à l'ensemble $K = \{x = (x_j) \in \mathbb{R}_+^n;\ \sum_{j=1}^{n} x_j = 1\}$.

c) En déduire qu'il existe $x \in K$ tel que $Bx = \ell x$. Comparer ℓ et $\rho(B)$.

d) Démontrer que $\rho(I_n + B) = 1 + \rho(B)$.

VI. Matrices carrées à coefficients positifs irréductibles

On suppose que $n \geqslant 2$. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$.

Pour une partie $I \subset \{1, \dots, n\}$, on note $\mathbb{R}^I \subset \mathbb{R}^n$ le sous-espace vectoriel

$$\mathbb{R}^I = \{x = (x_j) \in \mathbb{R}^n;\ \forall j \notin I,\ x_j = 0\}.$$

On dit que A est réductible s'il existe une partie $I \subset \{1, \dots, n\}$ distincte de $\emptyset$ et de $\{1, \dots, n\}$ telle que $\mathbb{R}^I$ soit stable par A. Dans le cas contraire on dit que A est irréductible.

Pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$ on écrit $i \prec j$ s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $i_0, i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i_0 = i$, $i_m = j$ et, pour tout $\ell \in \{1, \dots, m\}$ on ait $a_{i_{\ell-1}, i_\ell} \neq 0$.

1. Démontrer que la relation $\prec$ est transitive.
2. a) Soit I une partie de $\{1, \dots, n\}$. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) $\mathbb{R}^I$ est invariant par A ;
   (ii) pour tout $i \in \{1, \dots, n\} \setminus I$ et $j \in I$ on a $a_{i,j} = 0$;
   (iii) pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in I$ on a $i \prec j \Rightarrow i \in I$.

   b) Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Posons $I = \{i\} \cup \{j;\ j \prec i\}$. Démontrer que $\mathbb{R}^I$ est stable par A.

   c) En déduire que A est irréductible si et seulement si, $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ on a $i \prec j$.
3. Soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$. On suppose que $i \neq j$ et $i \prec j$. Démontrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $i_0, i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\}$ tous distincts tels que $i_0 = i$, $i_m = j$ et, pour tout $\ell \in \{1, \dots, m\}$ on ait $a_{i_{\ell-1}, i_\ell} \neq 0$.
4. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on pose $A^m = (a_{i,j}^{(m)})$.

   a) Soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i \neq j$ et $i \prec j$. Démontrer qu'il existe $m \leqslant n - 1$ satisfaisant $a_{i,j}^{(m)} \neq 0$.

   b) En déduire que A est irréductible si et seulement si $(I_n + A)^{n-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+^*)$.
5. Supposons que A est irréductible. Démontrer que le sous-espace propre de A associé à la valeur propre $\rho(A)$ est une droite vectorielle engendrée par un vecteur-colonne $v \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.
6. On dit que A est primitive s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+^*)$.

   a) On suppose que A est primitive. Démontrer qu'elle est irréductible et que $\rho(A)$ est l'unique valeur propre de A de module $\rho(A)$.

   b) Inversement, on suppose que A est irréductible et que $\rho(A)$ est l'unique valeur propre de A de module $\rho(A)$. Démontrer que A est primitive.

   c) Démontrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   est primitive.