Université Denis Diderot (Paris VII) *Samedi 11 octobre 2014*

Devoir N^o 2 : Corrigé

(Agrégation interne 1995 - épreuve 1)

I. Préliminaires

1. Écrivons $A = (a_{i,j})$, $A' = (a'_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$, $x = (x_i)$ et $Ax = (y_i)$. On a $y_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}x_j$.

   a) On a $|a_{i,j} + a'_{i,j}| \leqslant |a_{i,j}| + |a'_{i,j}|$, donc $\mathrm{abs}(A + A') \leqslant \mathrm{abs}(A) + \mathrm{abs}(A')$.

   Écrivons $AB = (c_{i,j})$ et $\mathrm{abs}(A)\,\mathrm{abs}(B) = (d_{i,j})$. On a $|c_{i,j}| = \left|\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{p} |a_{i,k}||b_{k,j}| = d_{i,j}$.

   Donc $\mathrm{abs}(AB) \leqslant \mathrm{abs}(A)\,\mathrm{abs}(B)$.

   b) Si tous les $a_{i,j}$ sont strictement positifs et les x_j sont positifs et non tous nuls, on trouve $y_i > 0$.

   c) Si les $a_{i,j}$ sont positifs, les x_j sont strictement positifs et $Ax = 0$, alors, pour tout i la somme des nombres positifs $a_{i,j}x_j$ étant nulle on trouve que pour tout i, j, $a_{i,j}x_j = 0$; comme $x_j \neq 0$, il vient $a_{i,j} = 0$, soit $A = 0$.

2. a) Posons $a = \dfrac{z'}{z}$. Il vient $|1 + a||z| = |z + z'| = |z| + |z'| = (1 + |a|)|z|$, donc $|1 + a| = 1 + |a|$. Il vient $1 + a + \overline{a} + |a|^2 = 1 + 2|a| + |a|^2$ soit $2\,\mathrm{Re}\ a = 2|a|$. En particulier $\mathrm{Re}\ a \geqslant 0$ et, puisque $|a|^2 = (\mathrm{Re}\ a)^2 + (\mathrm{Im}\ a)^2$, $\mathrm{Im}\ a = 0$. Donc $a \in \mathbb{R}_+$.

   b) Établissons (b) par récurrence sur n. Pour $n = 1$, il s'agit de la décomposition en module et argument d'un nombre complexe.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons la propriété établie pour n. Soient $z_1, \dots, z_n, z_{n+1} \in \mathbb{C}$ tels que $|z_1 + \dots + z_n + z_{n+1}| = |z_1| + \dots + |z_n| + |z_{n+1}|$. Si tous les z_j sont nuls, il n'y a rien à démontrer. Sinon, quitte à les réordonner, on peut supposer $z_1 \neq 0$.

   Posons $z = z_1 + \dots + z_n$. On a $|z + z_{n+1}| \leqslant |z| + |z_{n+1}| \leqslant |z_1| + \dots + |z_n| + |z_{n+1}|$, donc ces deux inégalités sont des égalités. En particulier, $|z| = |z_1 + \dots + z_n| = |z_1| + \dots + |z_n|$. Par l'hypothèse de récurrence, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \leqslant n$ on ait $z_k = e^{i\theta}|z_k|$. Alors $z = e^{i\theta}(|z_1| + \dots + |z_n|)$. Comme $|z + z_{n+1}| = |z| + |z_{n+1}|$ on a d'après (a) $\dfrac{z_{n+1}}{z} \in \mathbb{R}_+^*$, *i.e.* $\dfrac{z_{n+1}}{z} = \dfrac{|z_{n+1}|}{|z|}$. Donc $z_{n+1} = e^{i\theta}|z|\dfrac{z_{n+1}}{z} = e^{i\theta}|z_{n+1}|$.

   c) Si $\mathrm{abs}(Ax) = A\,\mathrm{abs}(x)$, alors pour tout i on a $\left|\displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}x_j\right| = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} |a_{i,j}x_j|$. D'après (b), il existe θ tel que $a_{i,j}x_j = e^{i\theta}|a_{i,j}x_j|$. Comme les $a_{i,j}$ sont strictement positifs, il vient $x_j = e^{i\theta}|x_j|$, soit $x = e^{i\theta}\,\mathrm{abs}(x)$.

   d) Si $Ax = \mathrm{abs}(A)x$, alors pour tout i on a $\displaystyle\sum_{j=1}^{p}(|a_{i,j}| - a_{i,j})x_j = 0$. Prenant la partie réelle, on trouve $\displaystyle\sum_{j=1}^{p}(|a_{i,j}| - \mathrm{Re}\ a_{i,j})x_j = 0$. La somme de ces nombres positifs étant nulle, on a $(|a_{i,j}| - \mathrm{Re}\ a_{i,j})x_j = 0$ (pour tout i, j), soit puisque les x_j sont non nuls $|a_{i,j}| = \mathrm{Re}\ a_{i,j}$, ce qui comme on l'a vu plus haut impose $a_{i,j} \in \mathbb{R}_+$. Donc $A = \mathrm{abs}(A)$.

3. a) Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on a

   — $N_\infty(A) \geqslant 0$; si $N_\infty(A) = 0$, alors $\forall x \in \mathbb{C}^n$, on a $\|Ax\| \leqslant N_\infty(A)\|x\| = 0$, donc $Ax = 0$. Il vient $A = 0$.

— Pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ non nul, on a $\dfrac{\|\lambda Ax\|}{\|x\|} = |\lambda| \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$; prenant le « sup » sur x il vient $N_\infty(\lambda A) = |\lambda| N_\infty(A)$.

— Pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ non nul, on a $\dfrac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \leqslant \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} + \dfrac{\|Bx\|}{\|x\|} \leqslant N_\infty(A) + N_\infty(B)$; prenant le « sup » sur x il vient $N_\infty(A+B) \leqslant N_\infty(A) + N_\infty(B)$.

— Pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, on a $\|ABx\| \leqslant N_\infty(A)\|Bx\| \leqslant N_\infty(A)N_\infty(B)\|x\|$ donc, si x n'est pas nul, $\dfrac{\|ABx\|}{\|x\|} \leqslant N_\infty(A)N_\infty(B)$; prenant le « sup » sur x il vient $N_\infty(AB) \leqslant N_\infty(A)N_\infty(B)$.

b) Soit $x \in \mathbb{C}^n$ non nul. Écrivons $x = (x_j)$ et $Ax = (y_j)$. Pour tout j, on a $|y_j| = \left|\displaystyle\sum_{k=1}^n a_{j,k}x_k\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^n |a_{j,k}||x_k| \leqslant \sum_{k=1}^n |a_{j,k}|\|x\|$. Prenant le « sup » sur j, il vient $\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \leqslant \displaystyle\sup_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{k=1}^n |a_{j,k}|$. Prenant le « sup » sur x, on trouve $N_\infty(A) \leqslant \displaystyle\sup_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{k=1}^n |a_{j,k}|$.

Inversement, fixons $j \in \{1, \dots, n\}$. Écrivons $a_{j,k} = e^{i\theta_k}|a_{j,k}|$ et posons $x = \begin{pmatrix} e^{-i\theta_1} \\ \vdots \\ e^{-i\theta_n} \end{pmatrix}$. Écrivons $Ax = (y_k)$. On a $\displaystyle\sum_{k=1}^n |a_{j,k}| = y_j \leqslant \|Ax\| \leqslant N_\infty(A)$ (puisque $\|x\| = 1$). Prenant le « sup » sur j, on trouve $\displaystyle\sup_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{k=1}^n |a_{j,k}| \leqslant N_\infty(A)$.

II. Rayon spectral d'une matrice

1. a) Comme λ est une valeur propre de A, il existe $x \in \mathbb{C}^n$ non nul tel que $Ax = \lambda x$. Soit X la matrice dont toutes les colonnes sont égales à x. On a $AX = \lambda X$ et $X \neq 0$.

   b) Soit λ une valeur propre de A de module maximum, *i.e.* $|\lambda| = \rho(A)$. Prenant X comme dans (a), il vient $|\lambda|\|X\| = \|AX\| \leqslant \|A\|\|X\|$, et comme X n'est pas nulle, on a $\|X\| > 0$, donc $\rho(A) = |\lambda| \leqslant \|A\|$.

   c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$; notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A. En trigonalisant A, on voit que les valeurs propres de A^k sont les λ_j^k ; donc $\rho(A^k) = \displaystyle\sup_{1\leqslant j\leqslant n} |\lambda_j^k| = \rho(A)^k$. Il vient (d'après (b)) $\rho(A)^k = \rho(A^k) \leqslant \|A^k\|$, donc $\rho(A) \leqslant \|A^k\|^{1/k}$.

2. a) Les matrices A et $S^{-1}AS$ ont les mêmes valeurs propres, donc $\rho(S^{-1}AS) = \rho(A)$.

   b) Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, puisque $\|\cdot\|$ est une norme sous-multiplicative, on a
   — $N(A) = \|S^{-1}AS\| \geqslant 0$; si $N(A) = 0$, alors $S^{-1}AS = 0$, donc $A = 0$.
   — $N(\lambda A) = \|\lambda S^{-1}AS\| = |\lambda|\|S^{-1}AS\| = |\lambda|N(A)$.
   — $N(A+B) = \|S^{-1}AS + S^{-1}BS\| \leqslant \|S^{-1}AS\| + \|S^{-1}BS\| = N(A) + N(B)$.
   — $N(AB) = \|S^{-1}ASS^{-1}BS\| \leqslant \|S^{-1}AS\|\|S^{-1}BS\| = N(A)N(B)$.

3. a) On a $\Delta_d^{-1} = \mathrm{diag}(1, d^{-1}, \dots, d^{1-n})$, donc $\Delta_d^{-1}T\Delta_d = (s_{i,j})$ où $s_{i,j} = d^{1-i}t_{i,j}d^{j-1} = d^{j-i}t_{i,j}$.

   b) Pour $i > j$, on a $t_{i,j} = 0$ (car T est triangulaire supérieure).
   Donc $\displaystyle\lim_{d\to 0} \Delta_d^{-1}T\Delta_d = \mathrm{diag}(t_{1,1}, \dots, t_{n,n})$. Remarquons que les $t_{i,i}$ sont les valeurs propres de A, de sorte que $N_\infty(\mathrm{diag}(t_{1,1}, \dots, t_{n,n})) = \displaystyle\sup_{1\leqslant i\leqslant n} |t_{i,i}| = \rho(A)$. Comme N_∞ est continue (toutes les normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont équivalentes) et $r > \rho(A)$, il existe $d > 0$ assez petit, tel que l'on ait

$N_\infty(\Delta_d^{-1}T\Delta_d) < r$. Soit enfin S une matrice inversible telle que $S^{-1}AS = T$. Il suffit de poser $N(B) = N_\infty(S\Delta_d)^{-1}B(S\Delta_d))$.

c) Par (b), il existe une norme N sous-multiplicative telle que $N(A) < r$. On a donc $N(r^{-k}A^k) \leqslant (r^{-1}N(A))^k \to 0$ (quand $k \to \infty$). Cela veut dire que $r^{-k}A^k \to 0$ pour la norme N, donc pour toute norme - puisqu'elles sont équivalentes.

d) Soit $\varepsilon > 0$. Il résulte de (c) que $(\rho(A)+\varepsilon)^{-k}\|A^k\| \to 0$. Donc, il existe k_ε tel que pour $k \geqslant k_\varepsilon$ on ait, $(\rho(A)+\varepsilon)^{-k}\|A^k\| \leqslant 1$. Donc pour $k \geqslant k_\varepsilon$ on a $\rho(A) \leqslant \|A^k\|^{1/k} \leqslant \rho(A)+\varepsilon$. Cela prouve que la suite $\|A^k\|^{1/k}$ converge vers $\rho(A)$.

e) Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée. Par ailleurs A admet 1 comme seule valeur propre, donc $\rho(A) = 1$.

4. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{abs}(A) \leqslant B$.

a) La somme et le produit de deux matrices positives sont positifs ; donc si $B_1, B_2, B_1', B_2' \in \mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$ sont tels que $B_1 \leqslant B_2$ et $B_1' \leqslant B_2'$, on a $B_2B_2' - B_1B_1' = (B_2 - B_1)B_1' + B_2(B_2' - B_1') \in \mathcal{M}(\mathbb{R}_+)$, soit $B_1B_1' \leqslant B_2B_2'$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$; si $\mathrm{abs}(A^k) \leqslant B^k$, on a $\mathrm{abs}(A^{k+1}) \leqslant \mathrm{abs}(A^k)\,\mathrm{abs}(A) \leqslant B^kB$. Cela démontre par récurrence sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{abs}(A^k) \leqslant B^k$.

b) D'après la question précédente, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $N_\infty(A^k) = N_\infty(\mathrm{abs}(A^k)) \leqslant N_\infty(B^k)$, donc $N_\infty(A^k)|^{1/k} \leqslant N_\infty(B^k)^{1/k}$. En passant à la limite il vient $\rho(A) \leqslant \rho(B)$.

III. Limite de $\lambda^{-k}A^k$

1. Le rang d'une matrice est égal à celui de sa transposée. Donc $\lambda I_n - A$ et $\lambda I_n - {}^tA$ ont même rang. Donc $\dim\ker(\lambda I_n - {}^tA) = n - \mathrm{rg}\,(\lambda I_n - {}^tA) = n - \mathrm{rg}\,(\lambda I_n - A) = \dim\ker(\lambda I_n - A) = 1$.

2. a) Notons $v = (v_i)$, $w = (w_i)$ et $L = (\ell_{i,j})$. On a $\ell_{i,j} = v_iw_j$. La matrice L n'est pas nulle (car v et w ne sont pas nuls) et toutes ses colonnes sont proportionnelles à v : son rang est 1.

Remarquons que ${}^tAw = {}^t({}^twA) = \lambda w$. Comme $\ker(\lambda I_n - A)$ et $\ker(\lambda I_n - {}^tA)$ sont des droites vectorielles, on ne peut changer v qu'en λv et w en $\lambda' w$ (avec $\lambda, \lambda' \in \mathbb{C}$). La condition ${}^twv = 1$ impose $\lambda\lambda' = 1$, donc L est inchangé.

b) On a $Lv = (v\,{}^tw)v = v({}^twv) = v$, donc $L^2 = Lv\,{}^tw = v\,{}^tw = L$. Cela prouve que L est un projecteur. Son rang est 1 et v est dans son image donc son image est $\mathbb{C}v$. Si $x \in H$, on a $Lx = v\,{}^twx = 0$, donc $H \subset \ker L$. La dimension de ces deux espaces étant égale à $n-1$, on trouve $H = \ker L$. En d'autres termes, L est la projection sur $\mathbb{C}v$ parallèlement à H.

3. a) On a $AL = A(v\,{}^tw) = (Av){}^tw = \lambda L$, donc $BL = \lambda^{-1}\lambda L - L^2 = 0$. De même $LA = (v\,{}^tw)A = v({}^twA) = \lambda L$, donc $LB = L - L = 0$.

b) Par a), l'image de B est contenue dans le noyau H de L. Si $Bx = \mu x$ avec $\mu \in \mathbb{C}^*$, alors $x = \mu^{-1}Bx \in H$, donc $Lx = 0$, ce qui donne $Bx = \lambda^{-1}Ax$. En particulier $\lambda\mu$ est une valeur propre de A ; comme $v \notin H$ (car ${}^twv = 1$) $x \notin \mathbb{C}v = \ker(\lambda I_n - A)$, donc $\lambda\mu$ est distincte de λ, et par la propriété (C1), on trouve $|\mu| < 1$.

c) D'après b), $\rho(B) < 1$. Par II.3.d), on a $\lim\limits_{k\to\infty} B^k = 0$.

d) On a $\lambda^{-1}A = B + L$; par a), pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $(\lambda^{-1}A)^k = B^k + L$. Donc $\lim\limits_{k\to\infty}(\lambda^{-1}A)^k = L$.

4. Remarquons que $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+^*)$. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+^*)$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lim\limits_{k\to\infty}(\lambda^{-1}A)^k = L$, pour k assez grand on a $(\lambda^{-1}A)^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+^*)$. Donc $A^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+^*)$.

IV. Rayon spectral des matrices à coefficients positifs

1. a) Posons $u = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Si $\alpha = \beta$, on a $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \alpha$ pour tout i, soit $Au = \alpha u$. Donc α est une valeur propre de A. En particulier, $\alpha \leqslant \rho(A)$. Il vient $\alpha = N_\infty(A) \leqslant \rho(A) \leqslant N_\infty(A)$.

   b) Si $\alpha = 0$, posons $B = 0$. Sinon, pour tout i, posons $c_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$ et, pour tout i, j posons $b_{i,j} = \alpha c_i^{-1} a_{i,j}$. Comme $\alpha \leqslant c_i$, il vient $B \leqslant A$ et, pour tout i on a bien $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{i,j} = \alpha$.

   c) En utilisant IV.1.a), II.4.b), II.1.b) on trouve $\alpha = \rho(B) \leqslant \rho(A) \leqslant N_\infty(A) = \beta$.

2. Soit $x = (x_i) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Écrivons $Ax = (y_i)$.

   a) On a $D_x^{-1} = \operatorname{diag}(x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1})$, donc $D_x^{-1} A D_x = (c_{i,j})$ où $c_{i,j} = x_i^{-1} a_{i,j} x_j$.

   b) Par 1.c), on a $\displaystyle\inf_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} \leqslant \rho(D_x^{-1} A D_x) = \rho(A) \leqslant \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j}$. Or $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} x_i^{-1} a_{i,j} x_j = \frac{y_i}{x_i}\cdot$

   c) Posons $\alpha_x = \displaystyle\inf_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{y_i}{x_i}$ et $\beta_x = \displaystyle\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{y_i}{x_i}\cdot$

      Soit $r \in \mathbb{R}$. D'après b), on a :

      i) $Ax = rx \iff \alpha_x = \beta_x = r$, donc si $Ax = rx$, alors $r = \rho(A)$;

      ii) $Ax \leqslant rx \iff \beta_x \leqslant r$, donc si $Ax \leqslant rx$, alors $\rho(A) \leqslant \beta_x \leqslant r$; de même $Ax < rx \iff \beta_x < r$, donc si $Ax < rx$, alors $\rho(A) \leqslant \beta_x < r$;

      iii) $rx \leqslant Ax \iff r \leqslant \alpha_x$, donc si $rx \leqslant Ax$, alors $r \leqslant \alpha_x \leqslant \rho(A)$; de même $rx < Ax \iff r < \alpha_x$, donc si $rx < Ax$, alors $r < \alpha_x \leqslant \rho(A)$.

   d) Les matrices A et ${}^tA$ ont les mêmes valeurs propres, donc $\rho(A) = \rho({}^tA)$. D'après le question précédente, on a :

      i) si ${}^txA = r\,{}^tx$, alors ${}^tAx = rx$ donc $r = \rho({}^tA) = \rho(A)$;

      ii) si ${}^txA \leqslant r\,{}^tx$, alors ${}^tAx \leqslant rx$ donc $r \geqslant \rho(A)$; si ${}^txA < r\,{}^tx$, alors ${}^tAx < rx$, donc $\rho(A) < r$;

      iii) si $r\,{}^tx \leqslant {}^txA$, alors $rx \leqslant {}^tAx$ donc $r \leqslant \rho(A)$; si $r\,{}^tx < {}^txA$, alors $rx < {}^tAx$, donc $r < \rho(A)$.

V. Matrices carrées à coefficients strictement positifs

1. Soit $x \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. On a $0x < Ax$, donc $\rho(A) > 0$ (d'après IV.2.d).

2. Soit $y \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $y \neq 0$. On suppose que $ry \leqslant Ay$.

   a) Comme $y \in \mathbb{R}_+^n$ et $y \neq 0$, on a $v = Ay \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ (d'après I.1.b).
      On a $v = ry + z$, donc $Av = rAy + Az = rv + Az$. Si $Az \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, on aurait $rv < Av$, donc $r < \rho(A)$ ce qui est faux. Donc $Az \notin (\mathbb{R}_+^*)^n$.

   b) Comme $z \in \mathbb{R}_+^n$ et $Az \notin (\mathbb{R}_+^*)^n$, on a $z = 0$ (d'après I.1.b), soit $Ay = ry$.

3. Soit λ une valeur propre de A telle que $|\lambda| = r$ et x un valeur propre associé.

   a) On a $\operatorname{abs}(Ax) \leqslant A \operatorname{abs}(x)$ (I.1.a) ; or $\operatorname{abs}(Ax) = \operatorname{abs}(\lambda x) = r \operatorname{abs}(x)$. D'après V.2.b), il vient $A \operatorname{abs}(x) = r \operatorname{abs}(x)$, ce qui implique d'après I.1.b) que $\operatorname{abs}(x) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.

   b) On a donc $\operatorname{abs}(Ax) = A \operatorname{abs}(x)$. D'après I.2.c), il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = e^{i\theta} \operatorname{abs}(x)$.

4. a) Soit λ une valeur propre de module r et x un vecteur propre associé. On a démontré que $A \operatorname{abs}(x) = r \operatorname{abs}(x)$ et que x est proportionnel à $\operatorname{abs}(x)$. Les vecteurs propres x et $\operatorname{abs}(x)$ étant proportionnels, les valeurs propres associées sont égales, *i.e.* $\lambda = r$. Donc r est l'unique valeur propre de module r.

b) On a vu que si $x = (x_j) \in E_r$ est non nul, alors $\text{abs}(x) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, et en particulier $x_1 \neq 0$, soit $x \notin F$. Cela prouve que $E_r \cap F = \{0\}$. En particulier, $\dim E_r + \dim F \leqslant n$ et puisque F est un hyperplan $\dim E_r \leqslant 1$, donc E_r est une droite vectorielle.

5. D'après ce qui précède appliqué à la matrice ${}^tA$, l'espace propre associé à la valeur propre r pour ${}^tA$ est de dimension 1 et engendré par un vecteur-colonne $w_0 \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Comme $v, w_0 \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, on a ${}^tw_0 v \in \mathbb{R}_+^*$. Il suffit de poser $w = ({}^tw_0 v)^{-1} w$. Si $\widetilde{w}$ est un vecteur vérifiant les mêmes conditions, on a ${}^tA\widetilde{w} = \widetilde{w}$ donc il existe $s \in \mathbb{C}$ tel que $\widetilde{w} = sw$. On a alors ${}^t\widetilde{w}v = s\,{}^twv = s$ donc $s = 1$.

6. a) Pour tout k, on a $B < A_{k+1} < A_k$. D'après II.4.b), on a $\rho(B) \leqslant \rho(A_{k+1} \leqslant \rho(A_k)$, *i.e.* la suite $(\rho(A_k))$ est décroissante et minorée par $\rho(B)$.

   b) Comme $A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+^*)$, il existe un vecteur-colonne $v_k \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, unique à multiplication par un scalaire près tel que $A_k v_k = \rho(A_k) v_k$. La somme des coefficients de v_k étant strictement positive, la demi-droite vectorielle $\mathbb{R}_+ v_k$ rencontre K en un unique point.

   c) Comme K est compact, on peut extraire de la suite (v_k) une sous-suite $(v_{k_p})_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un point $x \in K$. On a alors $Bx = \lim A_{k_p} v_{k_p} = \lim \rho(A_{k_p}) v_{k_p} = \ell x$. Alors ℓ étant une valeur propre de B on a $\ell \leqslant \rho(B)$; comme la suite $\rho(A_k)$ est minorée par $\rho(B)$ et converge vers ℓ, on a $\rho(B) \leqslant \ell$, donc $\rho(B) = \ell$.

   d) Les valeurs propres de $I_n + B$ sont les $1 + \lambda$ où λ décrit les valeurs propres de B. Si λ est une valeur propre de B, on a $|\lambda| \leqslant \rho(B)$, donc $|1 + \lambda| \leqslant 1 + \rho(B)$, donc $\rho(I_n + B) \leqslant 1 + \rho(B)$. Comme $\rho(B)$ est une valeur propre de B, $1 + \rho(B)$ est une valeur propre de B, donc $\rho(I_n + B) = 1 + \rho(B)$.

VI. Matrices carrées à coefficients positifs irréductibles

1. Soient $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $i \prec j$ et $j \prec k$. Il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $i_0, i_1, \ldots, i_p, j_0, j_1, \ldots, j_q \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $i_0 = i$, $i_p = j = j_0$ et $j_q = k$, tels que pour tout $r \in \{1, \ldots, p\}$ on ait $a_{i_{r-1}, i_r} \neq 0$, et pour tout $r \in \{1, \ldots, q\}$ on ait $a_{j_{r-1}, j_r} \neq 0$. Posant $m = p + q$, $\ell_r = i_r$ pour $r\{0, \ldots, p\}$ et pour $r \in \{p, \ldots m\}$, $\ell_r = j_{r-p}$ on en déduit que $i \prec k$.

2. a) Notons (e_i) la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

   Remarquons que $(e_i)_{i\in I}$ est une base de $\mathbb{R}^I$; donc $\mathbb{R}^I$ est invariant par A, si et seulement si pour tout $j \in I$, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i = Ae_j \in \mathbb{R}^I$, *i.e.* si et seulement si pour tout $j \in I$ et tout $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus I$ on a $a_{i,j} = 0$. Autrement dit, on a (i) $\Longleftrightarrow$ (ii).

   Remarquons que si $a_{i,j} \neq 0$, alors $i \prec j$ (prendre $m = 1$, $i_0 = i$ et $i_1 = j$). On en déduit l'implication (iii)$\Rightarrow$(ii).

   Supposons que (ii) et satisfait, et soient $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $j \in I$ tel que $i \prec j$. Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $i_0, i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $i_0 = i$, $i_m = j$ et, pour tout $\ell \in \{1, \ldots, m\}$ on ait $a_{i_{\ell-1}, i_\ell} \neq 0$. On a $i_m \in I$; soit $\ell \in \{1, \ldots m\}$ tel que $i_\ell \in I$; comme $a_{i_{\ell-1}, i_\ell} \neq 0$, il vient $i_{\ell-1} \in I$. On en déduit que $i \in I$. Donc (ii)$\Rightarrow$(iii).

   b) Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$ et $\ell \in I$ tels que $k \prec \ell$. Si $\ell = i$, alors $k \prec i$, donc $k \in I$. Si $\ell \prec i$, alors $k \prec i$ (par VI.1), donc $k \in I$. L'assertion découle donc de l'implication (iii)$\Rightarrow$(i) de (a).

   c) Si pour tout i, j on a $i \prec j$, pour toute partie I de $\{1, \ldots, n\}$ distincte de $\emptyset$ et de $\{1, \ldots, n\}$, il existe $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus I$ et $j \in I$ tels que $i \prec j$, donc $\mathbb{R}^I$ n'est pas invariant par (a) : A est donc irréductible.

   Supposons que A est irréductible, soit $i \in \{1, \ldots, n\}$ et posons $I = \{i\} \cup \{j;\ j \cap i\}$. Par (b), l'espace $\mathbb{R}^I$ est invariant, et comme A est irréductible, on a $I = \{1, \ldots, n\}$. Cela prouve que pour tout i, j tels que $i \neq j$, on a $j \prec i$. Comme $n \geqslant 2$, pour tout i, il existe $j \neq i$. Alors $i \prec j$ et $j \prec i$, et par 1, $i \prec i$. Donc pour tout i, j on a $i \prec j$.

3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ le plus petit entier tel qu'il existe $i_0, i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\}$ satisfaisant $i_0 = i$, $i_m = j$ et, pour tout $\ell \in \{1, \dots, m\}$ on a $a_{i_{\ell-1}, i_\ell} \neq 0$. Supposons qu'il existe $k, \ell \in \{0, \dots m\}$ avec $k < \ell$ et $i_k = i_\ell$. Posons $p = m - \ell + k$; remarquons que l'on ne peut pas avoir $k = 0$ et $\ell = m$ car $i \neq j$, de sorte que $p \in \mathbb{N}^*$. Définissons $(j_r)_{0 \leqslant r \leqslant p}$ en posant $j_r = i_r$ si $r \leqslant k$ et $j_r = i_{r+\ell-k}$ pour $r \geqslant k$. Alors on a bien $j_0 = i$ et $j_p = j$ et pour tout $r \in \{1, \dots, p\}$ on a $a_{i_{r-1}, i_r} \neq 0$. Cela contredit la minimalité de m.
   Donc les i_ℓ sont deux à deux distincts.
4. a) D'après la question précédente, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $i_0, i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\}$ tous distincts tels que $i_0 = i$, $i_m = j$ et, pour tout $\ell \in \{1, \dots, m\}$ on a $a_{i_{\ell-1}, i_\ell} \neq 0$. Comme l'application $\ell \mapsto i_\ell$ est injective, de $\{0, \dots, m\}$ dans $\{1, \dots, n\}$, on a $m + 1 \leqslant n$. Démontrons par récurrence sur ℓ que pour tout $\ell \in \{1, \dots, m\}$ on a $a_{i, i_\ell}^{(m)} > 0$. C'est vrai pour $\ell = 1$. Si c'est vrai pour $\ell - 1$, puisque $A^\ell = A^{\ell-1} A$, il vient $a_{i, i_\ell} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^{(\ell-1)} a_{k, i_\ell} \geqslant a_{i, i_{\ell-1}}^{(\ell-1)} a_{i_{\ell-1}, i_\ell} > 0$. En particulier, $a_{i,j}^{(m)} \neq 0$.

   b) Écrivons $(I_n + A)^{n-1} = (b_{i,j})$.

   Si A est irréductible, on a $b_{i,j} = \displaystyle\sum_{m=0}^{n} C_n^m a_{i,j}^{(m)}$. Pour $i \neq j$, on a donc $b_{i,j} > 0$ d'après VI.2.c) et 4.a).

   Si $i = j$, on a $b_{i,j} \geqslant a_{i,j}^{(0)} = 1$. Cela prouve que $(I_n + A)^{(n-1)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+^*)$.

   Supposons inversement que $(I_n + A)^{(n-1)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+^*)$. Soit $I \subset \{1, \dots, n\}$ une partie non vide telle que $A\mathbb{R}^I \subset \mathbb{R}^I$. Alors $\mathbb{R}^I$ est stable par $I_n + A$, donc par $(I_n + A)^{(n-1)}$. Soit $j \in I$. Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_{i,j} e_i \in \mathbb{R}^I$, et comme les $b_{i,j}$ sont non nuls, il vient $I = \{1, \dots, n\}$.
5. D'après V.6, $\rho(A)$ est une valeur propre de A et $\rho(I_n + A) = \rho(A) + 1$, donc $\rho((I_n + A)^{n-1}) = (1 + \rho(A))^{n-1}$. D'après V.4, $\rho((I_n + A)^{n-1})$ est une valeur propre de $(I_n + A)^{n-1}$ et le sous-espace propre associé est une droite vectorielle engendrée par un vecteur-colonne $v \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Si x est un vecteur propre de A associé à la valeur propre r, alors $(I_n + A)^{n-1} x = (1 + \rho(A))^{n-1}$, donc x est proportionnel à v, donc le sous-espace propre de A associé à la valeur propre $\rho(A)$ est la droite vectorielle engendrée par v.
6. a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+^*)$.

   Si I est une partie non vide de $\{1, \dots, n\}$ telle que $\mathbb{R}^I$ soit stable par A, alors $\mathbb{R}^I$ est stable par A^k et, comme dans la preuve de VI.4.b), $I = \{1, \dots, n\}$, donc A est irréductible.

   Notons v un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\rho(A)$. Soit λ une valeur propre de A de module $\rho(A)$ et x un vecteur propre associé. Alors $A^k x = \lambda^k x$. Or, d'après V.4, $\rho(A)^k$ est l'unique valeur propre de A^k et l'espace propre correspondant est de dimension 1. Donc $\lambda^k = \rho(A)^k$ et x est proportionnel à v, donc $\lambda = \rho(A)$.

   b) Si A est irréductible, ${}^t A$ l'est aussi. Soient $v, w \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ des vecteurs propre pour A et ${}^t A$ associés à la valeur propre $\rho(A)$. On peut aussi supposer que ${}^t wv = 1$. Si $\rho(A)$ est l'unique valeur propre de A de module $\rho(A)$, on est dans les conditions de III, et par III.4, A est primitive.

   c) On a $i + 1 \prec i$ pour tout $i < n$ et $1 \prec n$. ParVI.1 et VI.2.c), A est irréductible. La matrice A est une matrice Compagnon et son polynôme caractéristique est $X^n - X - 1$. Comme $\rho(A)$ est une valeur propre, on a $\rho(A)^n = \rho(A) + 1$. Si λ est une valeur propre qui n'est pas réelle positive, on a $\lambda^n = \lambda + 1$, donc $|\lambda| = |\lambda + 1| < |\lambda| + 1 \leqslant \rho(A) + 1 = \rho(A)^n$, soit $|\lambda| < \rho(A)$. Par (b), A est primitive.