

Objectif et conventions

Le but de ce problème est de construire une fonction strictement croissante sur \mathbf{R} , dérivable et dont la dérivée s'annule en tout point d'un ensemble dense dans \mathbf{R} . En fait, c'est la fonction F réciproque de celle-ci qui est construite.

On note $\overline{\mathbf{R}}$ l'ensemble $\mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Lorsque, dans certaines conditions, une suite ou une fonction tend vers $+\infty$, on dit qu'elle a $+\infty$ pour limite dans $\overline{\mathbf{R}}$. On fait la convention analogue pour $-\infty$.

Si A et B sont deux ensembles, on note $A - B$ l'ensemble des points de A qui n'appartiennent pas à l'ensemble B .

Dans tout le problème, on désigne par f l'application de \mathbf{R} dans \mathbf{R} définie par $f(x)^3 = x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Autrement dit $f(x) = x^{1/3}$.

I . La fonction racine cubique

A. Dérivées au sens généralisé

Soient I un intervalle ouvert de \mathbf{R} et a un point de I . Soit $g : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue au point a . On dit que la fonction g est *dérivable au sens généralisé* au point a lorsque le rapport $\frac{g(x) - g(a)}{x - a}$ admet une limite ℓ dans $\overline{\mathbf{R}}$ lorsque x tend vers a , avec $x \neq a$.

Même dans le cas d'une limite infinie, on écrit $g'(a) = \ell$.

1) Soient I et J des intervalles ouverts de \mathbf{R} et soit g une bijection croissante de I sur J . On suppose que la fonction g est dérivable au sens généralisé en tout point de I . Démontrer que la fonction g^{-1} , réciproque de g , est dérivable au sens généralisé en tout point de J , et que, pour tout $a \in J$, on a

$$(g^{-1})'(a) = \frac{1}{g'(g^{-1}(a))},$$

avec les conventions $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

2) Soient I un intervalle ouvert de \mathbf{R} et $g : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue.

a) Soit c un point de I . On suppose que la fonction g est dérivable au sens généralisé au point c et qu'elle admet un maximum local en c . Démontrer que l'on a $g'(c) = 0$.

b) On suppose que la fonction g est dérivable au sens généralisé en tout point de l'intervalle I . Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

[on pourra examiner dans un premier temps le cas où $g(a) = g(b)$].

3) Soient I un intervalle ouvert de \mathbf{R} et $g : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Soit a un point de I . On suppose que la fonction g est dérivable en tout point de $I - \{a\}$, et que la fonction $x \mapsto g'(x)$ admet une limite ℓ dans $\overline{\mathbf{R}}$ lorsque x tend vers a , avec $x \neq a$.

a) Soit x un point de I distinct de a ; posons $J_x =]a, x[$ si $x > a$ et $J_x =]x, a[$ si $x < a$. Démontrer que l'on a

$$\inf\{g'(y); y \in J_x\} \leq \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \leq \sup\{g'(y); y \in J_x\}.$$

b) Démontrer que la fonction g est dérivable au sens généralisé au point a et que l'on a $g'(a) = \ell$.

B. La fonction racine cubique

Rappelons que l'on désigne par f l'application de \mathbf{R} dans \mathbf{R} définie par $f(x)^3 = x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

1) a) Démontrer que la fonction f est dérivable au sens généralisé en tout point de \mathbf{R} et que l'on a $f'(0) = +\infty$.

b) Soient s et t des nombres réels $\neq 0$. Démontrer l'équivalence

$$f'(s) \leq f'(t) \iff |s| \geq |t|.$$

c) Soit a un nombre réel > 0 . Démontrer que la fonction définie sur \mathbf{R} par $x \mapsto f(x+a) - f(x-a)$ atteint son maximum en 0 .

d) Démontrer que, pour tous $x, y \in \mathbf{R}$, on a $|f(x) - f(y)| \leq 2 \left| f\left(\frac{x-y}{2}\right) \right|$.

e) Démontrer que la fonction f est uniformément continue sur \mathbf{R} .

2) a) Démontrer que, pour tous $x, y \in \mathbf{R}$, on a $x^2 + xy + y^2 \geq \frac{3}{4} x^2$.

b) En déduire que, pour x et $x_0 \in \mathbf{R}$, tels que $x \neq x_0$ et $x_0 \neq 0$, on a

$$0 \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 4f'(x_0).$$

C. Construction d'une suite dense

Notons g la fonction définie sur \mathbf{R} par $g(t) = t \cos t$. Rappelons que l'on désigne par f l'application de \mathbf{R} dans \mathbf{R} définie par $f(x)^3 = x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

1) a) Démontrer que la fonction $g \circ f$ est dérivable au sens généralisé en tout point de \mathbf{R} . Étudier en particulier $(g \circ f)'(0)$.

b) Démontrer que $(g \circ f)'(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Dans les questions suivantes de cette partie, pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$a_n = g(f(n)) = n^{1/3} \cos(n^{1/3}).$$

2) Soient $x \in \mathbf{R}$ et $k \in \mathbf{N}$ tels que $k\pi \geq |x|$.

a) Démontrer qu'il existe un nombre réel $y(k, x)$ dans l'intervalle $[k\pi, (k+1)\pi[$ tel que $g(y(k, x)) = x$.

b) On note n_k la partie entière de $y(k, x)^3$. Démontrer que la suite $(a_{n_k})_{k \in \mathbf{N}}$ a pour limite x .

3) Démontrer que l'ensemble $\{a_n; n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans \mathbf{R} .

4) Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $\lambda_n = \frac{1}{n^2 + 1}$. Démontrer que les séries de terme général λ_n et $\lambda_n f(a_n)$ sont convergentes.

II . Construction de la fonction F

Dans cette partie, on se donne une suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de nombres réels et une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de nombres réels *strictement positifs*. On suppose que les séries de terme général λ_n et $\lambda_n f(a_n)$ sont convergentes.

1) a) Démontrer que la série de fonctions, dont le terme général est la fonction $x \mapsto \lambda_n f(x - a_n)$, est uniformément convergente sur toute partie compacte de \mathbf{R} .

Dans le suite de cette partie, on pose, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n f(x - a_n).$$

b) Démontrer que la fonction F est continue et strictement croissante.

c) Démontrer que,

$$\text{pour tout } x > a_0, \text{ on a } F(x) - F(a_0) \geq \lambda_0 f(x - a_0),$$

$$\text{pour tout } x < a_0, \text{ on a } F(x) - F(a_0) \leq \lambda_0 f(x - a_0).$$

d) En déduire les limites de la fonction F en $+\infty$ et $-\infty$.

e) Démontrer que la fonction F est une bijection de \mathbf{R} sur \mathbf{R} .

Nous allons démontrer, dans la suite de cette partie, que la fonction F possède une dérivée au sens généralisé en tout point de \mathbf{R} .

2) Démontrer que, pour x et $x_0 \in \mathbf{R}$, tels que $x \neq x_0$, et pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}.$$

3) Démontrer que la fonction F est dérivable au sens généralisé au point a_n et que l'on a $F'(a_n) = +\infty$.

4) Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. On suppose que x_0 n'est égal à aucun a_n , $n \in \mathbf{N}$, mais que la série de terme général $\lambda_n f'(x_0 - a_n)$ est divergente.

a) Soit $n \in \mathbf{N}$. Démontrer qu'il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, si l'on a $0 < |x - x_0| < \varepsilon$, alors on a

$$1 + \sum_{k=0}^n \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} \geq \sum_{k=0}^n \lambda_k f'(x_0 - a_k).$$

b) En déduire que la fonction F est dérivable au sens généralisé au point x_0 et que l'on a $F'(x_0) = +\infty$.

5) Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. On suppose que x_0 n'est égal à aucun a_n , $n \in \mathbf{N}$, et que la série de terme général $\lambda_n f'(x_0 - a_n)$ est convergente.

a) Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $x \neq x_0$, on a

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq \sum_{k=0}^n \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} + 4 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0 - a_k).$$

b) En déduire que la fonction F est dérivable au point x_0 et que l'on a $F'(x_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0 - a_k)$.

6) Démontrer que la fonction F^{-1} , réciproque de F, est dérivable en tout point de \mathbf{R} .

III . Parties denses de \mathbf{R}

A. Intersections d'ensembles ouverts denses

Donnons-nous, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, un sous-ensemble ouvert V_n de \mathbf{R} , dense dans \mathbf{R} .

On pose $B = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} V_n$.

1) Soit I un intervalle ouvert, non vide, de \mathbf{R} .

a) Démontrer qu'il existe des suites $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de nombres réels satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $u_n < v_n$;

(ii) $[u_0, v_0] \subset I \cap V_0$;

(iii) pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $[u_{n+1}, v_{n+1}] \subset]u_n, v_n[\cap V_{n+1}$.

b) Démontrer que l'ensemble $I \cap B$ n'est pas vide.

2) Démontrer que l'ensemble B est dense dans \mathbf{R} .

3) Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de points de B . En considérant les ensembles ouverts $V_n - \{x_n\}$, démontrer que l'ensemble $B' = B - \{x_n; n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans \mathbf{R} .

B. Parties de \mathbf{R} contenant de « gros » ensembles compacts

1) Soient a et $b \in \mathbf{R}$ tels que $a < b$, et soit $(c_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de points de l'intervalle $[a, b]$. On suppose que l'ensemble $C = \{c_n; n \in \mathbf{N}\}$ est compact. Soit ε un nombre réel > 0 et soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que $2 \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \leq \varepsilon$.

a) Pour tout entier $k \in \mathbf{N}$, posons $I_k =]c_k - \alpha_k, c_k + \alpha_k[$. Démontrer qu'il existe un entier $n \in \mathbf{N}$ tel que l'ensemble C soit contenu dans la réunion $\bigcup_{0 \leq k \leq n} I_k$.

b) Démontrer qu'il existe une fonction continue $g : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ telle que l'on ait

$g(x) = 1$ pour tout $x \in C$;

$g(x) = 0$ pour tout $x \notin \bigcup_{0 \leq k \leq n} I_k$.

c) Démontrer l'inégalité $\int_a^b g(t) dt \leq \varepsilon$.

2) Soit A une partie de \mathbf{R} . On suppose que, pour tous nombres réels a et b tels que $a < b$, il existe une partie compacte C de \mathbf{R} , contenue dans $A \cap [a, b]$, et un nombre réel $\varepsilon > 0$ tels que, pour toute fonction continue $g : [a, b] \rightarrow [0, 1]$, satisfaisant à $g(x) = 1$ pour tout $x \in C$, on ait $\int_a^b g(t) dt \geq \varepsilon$.

a) Démontrer que, pour tous nombres réels a et b tels que $a < b$, l'ensemble $A \cap [a, b]$ n'est pas dénombrable.

b) Démontrer que l'ensemble A est dense dans \mathbf{R} , et que, pour toute partie dénombrable D de A , l'ensemble $A - D$ est encore dense dans \mathbf{R} .

IV . Les points de pente infinie de F

On reprend les notations de la partie II. On se donne une suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de nombres réels et une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de nombres réels strictement positifs. On suppose que les séries de terme général λ_n et $\lambda_n f(a_n)$ sont convergentes, et l'on pose $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n f(x - a_n)$. On suppose de plus que l'ensemble $D = \{a_n; n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans \mathbf{R} .

A. Densité de l'ensemble des points de pente infinie

1) Pour $x \in \mathbf{R}$ et $T \in]0, +\infty[$, posons $g_T(x) = \inf\{T, f'(x)\}$.

a) Soit $T \in]0, +\infty[$. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n g_T(x - a_n)$ est convergente.

b) Pour $x \in \mathbf{R}$, posons $G_T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n g_T(x - a_n)$. Démontrer que la fonction G_T est continue sur \mathbf{R} .

c) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $F'(x) = \sup\{G_T(x); T \in]0, +\infty[\}$, où la borne supérieure est prise dans $\overline{\mathbf{R}}$.

2) Soit M un nombre réel > 0 . On pose $U_M = \{x \in \mathbf{R}; F'(x) > M\}$.

a) Démontrer que l'ensemble U_M est la réunion des ensembles $\{x \in \mathbf{R}; G_T(x) > M\}$ pour $T \in]0, +\infty[$.

b) Démontrer que l'ensemble U_M est ouvert et dense dans \mathbf{R} .

3) Soit A l'ensemble $\{x \in \mathbf{R}; F'(x) = +\infty\}$. Démontrer que l'ensemble $A - D$ est dense dans \mathbf{R} .

B. Densité des points de pente finie

1) Soient a et $b \in \mathbf{R}$ et soit $\varepsilon > 0$ tels que $a + \varepsilon < b$. Soit M un nombre réel > 0 ; notons C l'ensemble $\{x \in [a, b]; x \notin U_M\}$. Soit $g : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue telle que $g(x) = 1$ pour tout $x \in C$.

Démontrer l'inégalité $\int_a^b M g(t) dt + F(b) - F(a) \geq M(b - a)$.

2) Soit B l'ensemble $\{x \in \mathbf{R}; F'(x) \neq +\infty\}$. Démontrer que, pour toute partie dénombrable N de B , l'ensemble $B - N$ est dense dans \mathbf{R} .
