Fonctions d'une variable réelle : Exercices

6.4 Exercice. *Théorème de Weierstraß.* Pour $f \in C([0,1];\mathbb{K})$, et $n \in \mathbb{N}$, notons $B_n(f)$ la fonction polynomiale $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\Big(\frac{k}{n}\Big) x^k(1-x)^{n-k}$, où les $\binom{n}{k}$ sont les coefficients binomiaux ($\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$).

1. Calculer la fonction $B_n(f)$ dans les trois cas suivants :
   a) f est constante ;
   b) $f(x) = x$ - on utilisera la formule $\dfrac{k}{n}\dbinom{n}{k} = \dbinom{n-1}{k-1}$;
   c) $f(x) = x(1-x)$ - on utilisera la formule $\dfrac{k(n-k)}{n(n-1)}\dbinom{n}{k} = \dbinom{n-2}{k-1}$.
2. On suppose que $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont des constantes. Montrer que pour $n \geqslant 1$, on a $\big(B_n(f) - f\big)(x) = ax(1-x)/n$.
3. Soient $f \in C([0,1];\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x, y \in [0,1]$, on ait $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon + K(x-y)^2$.
4. On fixe f, ε et K comme dans (3). Soit $y \in [0,1]$. Notons g_y et h_y les fonctions $x \mapsto f(y) - \varepsilon - K(x-y)^2$ et $x \mapsto f(y) + \varepsilon + K(x-y)^2$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $B_n(g_y) \leqslant B_n(f) \leqslant B_n(h_y)$. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $|f(y) - B_n(f)(y)| \leqslant \varepsilon + Ky(1-y)/n$.
5. Montrer que pour tout $f \in C([0,1];\mathbb{K})$, la suite de fonctions polynomiales $\big(B_n(f)\big)$ converge uniformément vers f.

6.12 Exercice. *Théorème de Bernstein.* Soient $a > 0$ et $f :]-a,a[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-a,a[$, on a $f^{(2k)}(x) \geqslant 0$.

1. Pour $x \in]-a,a[$, posons $F(x) = f(x) + f(-x)$; pour $n \in \mathbb{N}$, notons R_{2n+1} le reste de la série de Taylor de F : $R_{2n+1}(x) = F(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} F^{(2k)}(0)$.
   a) Démontrer que, pour tout $x \in]-a,a[$, on a $0 \leqslant R_{2n+1}(x) \leqslant F(x)$.
   b) Soient $t, x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $0 < t < x < y < a$. Démontrer que l'on a $\dfrac{x-t}{y-t} \leqslant \dfrac{x}{y}\cdot$
   c) Établir l'inégalité $R_{2n+1}(x) \leqslant \Big(\dfrac{x}{y}\Big)^{2n+1} R_{2n+1}(y)$ à l'aide d'une formule de Taylor avec reste intégrale. En déduire que l'on a $\lim\limits_{n\to\infty} R_{2n+1}(x) = 0$ et que F est développable en série entière (en 0) sur $]-a,a[$.
2. Pour $x \in]-a,a[$ et $n \in \mathbb{N}$ posons $r_n(x) = f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$. Soit $x \in]-a,a[$.
   a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $r_{2n+1}(x) \geqslant 0$ et $r_{2n+1}(x) + r_{2n+1}(-x) = R_{2n+1}(x)$.
   b) Démontrer que $\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(0)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
   c) En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$ et que f est développable en série entière (en 0) sur $]-a,a[$;

3. Applications. Démontrer que les applications suivantes sont développables en série entière en 0 :
   a) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ sur $]-1,1[$.
   b) $x \mapsto \tan x$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

7.20 Exercice. *Indice de réfraction.*

1. Dans plan euclidien P, on se donne une droite D et deux points A, B situés de part et d'autre de D. On veut trouver le chemin le plus rapide pour aller de A à B sachant que dans le demi-plan de A on se déplace avec une vitesse v (dans toutes les directions) et dans le demi-plan de B avec une vitesse w. Le trajet effectué consiste en deux segments AM et MB. Comment choisir M pour que le temps de trajet soit minimal ?
2. On se pose le même problème avec deux points de l'espace situés de part et d'autre d'un plan.

7.28 Exercice. Soit I un intervalle ouvert et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. Soit $a \in I$.

1. On suppose que f est deux fois dérivable en a. Calculer la limite en 0 de l'application $t \mapsto \dfrac{f(a+t)+f(a-t)-2f(a)}{t^2}$.
2. On suppose que f est deux fois dérivable sur I. Soit $t \in \mathbb{R}^*$ tel que $a-t \in I$ et $a+t \in I$. Démontrer qu'il existe $c \in]a-t, a+t[$ tel que $\dfrac{f(a+t)+f(a-t)-2f(a)}{t^2} = f''(c)$.

7.29 Exercice. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} et $a \in \mathbb{R}$. Pour $h \in \mathbb{R}$, on écrit la formule de Taylor-Lagrange

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + ... + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta_h h).$$

On suppose en outre que $f^{(n+1)}(a) \neq 0$. Démontrer que, pour h non nul et assez petit, θ_h est uniquement défini, et que $\lim_{h\to 0} \theta_h = \dfrac{1}{n+1}$.