7 Fonctions d'une variable réelle

7.1 Continuité

Pour ce chapitre les références classiques ([Liret Martinais, Lelong-Ferrand Arnaudiès, Monier Analyse, Ramis Deschamps Odoux] *etc.*)

7.1.1 Définitions des limites et continuité

On définit l'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ comme $\mathbb{R}$ avec deux points supplémentaires notés $-\infty$ et $+\infty$.

Soit B une partie de $\mathbb{R}$. On écrit $+\infty \in \overline{B}$ si B n'est pas majorée et $-\infty \in \overline{B}$ si B n'est pas minorée.

Définition. Soit A une partie de $\mathbb{R}$, (X, d) un espace métrique (en général $\mathbb{R}$ ou peut-être $\mathbb{C}$...) et $f : A \to X$ une application. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in X$.

a) Soit B une partie de A telle que $a \in \overline{B}$. Si $a \in \mathbb{R}$, on écrit $\ell = \lim\limits_{x\to a,\ x\in B} f(x)$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que pour $x \in B$ on ait $|x - a| < \alpha \Rightarrow d(f(x), \ell) < \varepsilon$. Si $a = +\infty$ (*resp.* $a = -\infty$) on écrit $\ell = \lim\limits_{x\to a,\ x\in B} f(x)$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour $x \in B$ on ait $x > m \Rightarrow d(f(x), \ell) < \varepsilon$ (*resp.* $x < m \Rightarrow d(f(x), \ell) < \varepsilon$).

b) On dit que f *admet la limite à gauche* ℓ en a et on écrit $\ell = \lim\limits_{x\to a,\ x<a} f(x)$ ou $\ell = \lim\limits_{x\to a_-} f(x)$ ou $\ell = \lim\limits_{a_-} f$ si $a \in \overline{B}$ pour $B = A \cap]-\infty, a[$ et $\ell = \lim\limits_{x\to a,\ x\in B} f(x)$.

c) On dit que f *admet la limite à droite* ℓ en a et on écrit $\ell = \lim\limits_{x\to a,\ x>a} f(x)$ ou $\ell = \lim\limits_{x\to a_+} f(x)$ ou $\ell = \lim\limits_{a_+} f$ si $a \in \overline{B}$ pour $B = A \cap]a, +\infty[$ et $\ell = \lim\limits_{x\to a,\ x\in B} f(x)$.

d) On dit que f est *continue à gauche* en a si $a \in A$ et f admet la limite à gauche $f(a)$ en a.

e) On dit que f est *continue à droite* en a si $a \in A$ et f admet la limite à droite $f(a)$ en a.

f) On dit que f est *continue* en a si f est continue à gauche et à droite en a.

g) Si f est continue en tout point de A on dit que f est continue sur A.

7.1.2 Relations de comparaison entre fonctions

Définition (Prépondérance, négligeabilité, équivalence)**.** Soit I un intervalle non réduit à un point et ℓ un point de I ou une extrémité de I (éventuellement $\ell = \pm\infty$). Soient f, g deux fonctions définies sur $I \setminus \{\ell\}$ et à valeurs réelles. On suppose que f ne s'annule pas au voisinage de ℓ. On écrit :

a) $f = O(g)$ si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est bornée au voisinage de ℓ.

b) $f = o(g)$ si $\lim\limits_{x\to\ell} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. On dit alors que f est *négligeable* devant g au voisinage de ℓ.

c) $f \sim g$ si $\lim\limits_{x\to\ell} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. On dit alors que f est *équivalente* à g au voisinage de ℓ.

7.1.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue. Si $x \in \mathbb{R}$ et un nombre compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = x$.*

Commentaire. Le théorème des valeurs intermédiaires est un théorème d'existence. La méthode de dichotomie permet d'exhiber (d'approcher) un point en lequel la valeur est atteinte. Selon le contexte, on peut avoir d'autres méthodes plus rapides.

Rappelons qu'une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x \leqslant y \leqslant z$, si $x \in I$ et $z \in I$ alors $y \in I$. Une façon équivalente dénoncer ce théorème est donc :

Théorème des valeurs intermédiaires. *L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.*

Théorème de bijection. *Soit f une application définie sur un intervalle et à valeurs réelles. Deux parmi les énoncés ci-dessous impliquent le troisième :*
- *f est continue ;*
- *f est injective et son image est un intervalle ;*
- *f est strictement monotone.*

Proposition. *Soit f une application continue, strictement monotone définie sur un intervalle et à valeurs réelles. L'application réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $f(I)$ est strictement monotone de même monotone que f et continue.*

7.1.4 Continuité sur un segment

Un segment est un intervalle fermé et borné : c'est donc un ensemble de la forme $[a, b]$ où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leqslant b$ (ou l'ensemble vide).

Théorème des extremums. *L'image par une application continue (à valeurs réelles) d'une partir fermée et bornée de $\mathbb{R}$ est fermée et bornée. En particulier, si $K \subset \mathbb{R}$ une partie fermée, bornée et non vide et $f : K \to \mathbb{R}$ est une application continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Théorème de Heine. *Toute application continue d'un espace métrique compact à valeurs dans un espace métrique est uniformément continue.*

Théorème de Heine de continuité uniforme sur un segment. Fonctions continues par morceaux sur un segment, approximation uniforme des fonctions continues sur un segment par des fonctions en escalier, des fonctions affines par morceaux, des polynômes (théorème de Weierstrass admis).

7.2 Dérivabilité

7.2.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition. Soient I un intervalle non réduit à un point et $a \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est *dérivable* en a si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (définie sur $I \setminus \{a\}$) admet une limite en a. Lorsque cette limite existe, on l'appelle la *dérivée* de f en a et on la note $f'(a)$.
Si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite à gauche (*resp.* à droite) en a, on dit que f est *dérivable à gauche* (*resp. à droite*) en a, et cette limite à gauche (*resp.* à droite) est appellée *dérivée à gauche* (*resp.* à droite) de f en a et est notée $f'_g(a)$ (*resp.* $f'_d(a)$).
Si f est dérivable en tout point de I on dit que f est *dérivable* sur I.

Si f est dérivable (en a), elle est continue (en a).

Proposition. *a) Soient I un intervalle non réduit à un point et $a \in I$. Soient f et g deux applications de I dans $\mathbb{R}$. Si f et g sont dérivables en a alors $f+g$ et fg sont dérivables en a et l'on a $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ et $(fg)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$.*

b) Soient I et J deux intervalles non réduits à un point et $a \in I$. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux applications. On suppose que $f(I) \subset J$. Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et l'on a $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

c) Soient I et J deux intervalles non réduits à un point et $a \in I$. Soient $f : I \to J$ une application bijective. Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et l'on a $(f^{-1})'(a) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

7.2.2 Théorèmes des accroissements finis

Théorème de Rolle. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application. On suppose que f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in\,]a,b[$ avec $f'(c) = 0$.*

Théorème des accroissements finis. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application. On suppose que f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in\,]a,b[$ avec $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Lorsque f est définie sur un intervalle mais à valeurs dans $\mathbb{C}$ (ou plus généralement dans un espace normé), on a encore une notion de dérivée (limite de $\dfrac{1}{x-a}(f(x)-f(a))$), mais on n'a pas d'égalité des accroissements finis comme ci-dessus. Par contre, on a :

Inégalité des accroissements finis. *Soient E un espace vectoriel normé, $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a,b] \to E$ une application. On suppose que f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. On suppose que l'application $x \mapsto \|f'(x)\|$ est bornée sur $]a,b[$ et on pose $\sup\{\|f'(x)\|;\ \ a < x < b\} = M$. Alors on a $\|f(b) - f(a)\| \leqslant (b-a)M$.*

Conséquences. *Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable.*

a) L'application f est croissante (resp. décroissante) si et seulement si f' est positive (resp. négative).

b) L'application f est lipschitzienne (de rapport k) si et seulement si f' est bornée ($\sup_I |f'(x)| \leqslant k$).

En particulier, f est constante si et seulement si $f' = 0$.

7.2.3 Dérivées successives

Soient I un intervalle non réduit à un point et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est de classe C^1 si elle est dérivable et f' est continue. Puis, par récurrence, pour $k \geqslant 2$, on dit que f est de classe C^k si elle est dérivable et f' est de classe C^{k-1}. On dit que f est de classe C^∞ si elle est de classe C^k pour tout k.

Si f' est dérivable on note f'' la dérivée de f'... On définit ainsi par récurrence la dérivée k-ième de f et l'on note $f^{(k)}$ la dérivée de $f^{(k-1)}$.

Si f et g sont de classe C^k, alors $f+g$ et fg sont de classe C^k et on a $(f+g)^{(k)} = f^{(k)} + g^{(k)}$ et

$$(fg)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(j)} g^{(k-j)} \qquad \text{(Formule de Leibniz)}$$

où les $\binom{k}{j}$ sont les coefficients binomiaux (et avec les conventions $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$...).

Soient I et J deux intervalles non réduits à un point et $a \in I$. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux applications. On suppose que $f(I) \subset J$. Si f et g sont de classe $C^{(k)}$, il en va de même pour $g \circ f$.

Soient I et J deux intervalles non réduits à un point et $a \in I$. Soient $f : I \to J$ une application bijective de classe $C^{(k)}$. Si f' ne s'annule pas, alors f^{-1} est de classe $C^{(k)}$.

7.2.4 Formules de Taylor

Soient I un intervalle non réduit à un point et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Soit $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que f admet une dérivée n-ième en a si f est $n-1$ fois dérivable sur I (ou du moins au voisinage de a) et $f^{(n-1)}$ est dérivable en a.

On suppose dans la suite que f est n fois dérivable en a. Pour $x \in I$, on pose $T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ et $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$.

Les diverses formules de Taylor donnent une expression du reste R_n.

Formule de Taylor-Young. *Si f est n fois dérivable en a, alors $R_n(x) = o(x-a)^n$.*

Formule de Taylor-Lagrange. *Soit $b \in I$ distinct de a. Si f est $n+1$ fois dérivable sur I, alors pour tout $b \in I$ (distinct de a), il existe $c \in I$, (strictement) compris entre a et b tel que*

$$R_n(b) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Formule de Taylor avec reste intégrale. *Soit $b \in I$ distinct de a. Si f est de classe C^{n+1} sur I, alors pour tout $b \in I$, on a*

$$R_n(b) = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n \, dt.$$

Pour bien comparer ces formules, on peut faire l'hypothèse sur la dérivée $n+1$-ième de f dans la formule de Taylor-Young tout en faisant porter la conclusion sur R_n :

Formule de Taylor-Young. *Si f est $n+1$ fois dérivable en a, alors*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + o(x-a)^{n+1}.$$

On peut remarquer que, pour $n = 0$, cette formule de Taylor-Young est juste la définition de la dérivée, Taylor-Lagrange est le théorème des accroissements finis, et reste intégrale est le lien entre primitives et intégrales.

Pour être complet, disons que si f est à valeurs complexes ou plus généralement à valeurs dans un espace vectoriel normé, les formules de Taylor-Young et avec reste intégrale restent inchangées ; la formule de Taylor-Lagrange, devient une inégalité. Citons aussi la formule de Taylor-Young à plusieurs variables...

Disons aussi que Taylor-Young est la plus souple à utiliser et permet de calculer des limites, en utilisant en général des opérations sur les développements limités, mais ne peut pas faire plus.

Citons rapidement quelques applications des formules de Taylor.

- Calcul de certaines limites (Taylor -Young).
- Condition nécessaire et condition suffisante pour l'existence d'un extremum (Taylor-Young d'ordre 2 - à une ou plusieurs variables).
- Allure d'une courbe (Taylor-Young).
- Estimation d'erreur dans l'approximation d'un nombre réel solution de $f(x) = 0$ ou d'une intégrale (Taylor Lagrange ou reste intégrale).
- Inégalités de Kolmogorov (*cf.* exerc. 7.18).
- Développement en série entière (Taylor Lagrange et surtout avec reste intégrale).
- Théorème de Bernstein (Taylor avec reste intégrale).

7.2.5 Fonctions convexes

Définition. Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est dite *convexe* si son *épigraphe* $\{(x,u) \in I \times \mathbb{R}; f(x) \leqslant u\}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Proposition. *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *l'application f est convexe ;*

(ii) *pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0,1]$, on a $f\big(tx + (1-t)y\big) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)$;*

(iii) *pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour toute suite $x_1, \ldots, x_n$ d'éléments de I et toute suite $t_1, \ldots, t_n$ d'éléments de $\mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, on a $f\Big(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i)$. (Inégalité de Jensen)*

Soient I un intervalle et (f_n) une suite de fonctions convexes $f_n : I \to \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in I$, la suite $\big(f_n(x)\big)$ converge vers un nombre réel $f(x)$. Alors il est clair que f vérifie la propriété (ii) de la prop. 7.2.5 ; donc f est convexe.

Lemme. *Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *la fonction f est convexe ;*

(ii) *pour tout $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$, on a $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \dfrac{f(z) - f(x)}{z - x}$;*

(iii) *pour tout $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$, on a $\dfrac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \dfrac{f(z) - f(y)}{z - y}$;*

(iv) *pour tout $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$, on a $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \dfrac{f(z) - f(y)}{z - y}$.*

On peut résumer ce lemme par l'énoncé suivant.

L'application f est convexe si et seulement si, pour tout $x \in I$, l'application « taux d'accroissement » $y \mapsto \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$ est croissante sur $I \setminus \{x\}$.

Proposition. *Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une application.*

a) Si f est convexe, alors f est continue sur $\mathring{I}$ et y admet des dérivées à gauche et à droite en tout point ; celles-ci sont croissantes.

b) Si f est continue et dérivable sur $\mathring{I}$, alors f est convexe si et seulement si f' est croissante.

c) Si f est continue et dérivable sur $\mathring{I}$, alors f est convexe si et seulement si la courbe de f est située au dessus de toutes les tangentes de f.

d) Si f est continue et si f est deux fois dérivable sur $\mathring{I}$, alors f est convexe si et seulement si f'' est positive.

On utilise les fonctions convexes pour établir des inégalités : on démontre (grâce au critère de la dérivée seconde par exemple) qu'une fonction est convexe, et on en déduit des inégalités à l'aide de l'inégalité de Jensen. On peut citer l'inégalité arithmético-géométrique. Une des plus utiles est l'inégalité de Hölder :

Inégalité de Hölder. *Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $1/p + 1/q = 1$. Pour des éléments $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a*

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\Big| \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\Big)^{1/q}.$$

7.3 Exercices

7.3.1 Continuité

7.1 Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{-\infty} f$ existent et sont finies. Démontrer que f est bornée et uniformément continue.

7.2 Exercice. (*cf.* [Monier Exos, Analyse 1, 4.4.9]) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose $\phi(x) = \sup\{f(t);\ t \in [0, x]\}$. Démontrer que ϕ est croissante et continue.

7.3 Exercice. Etudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$ et $f(p/q) = 1/q$ si $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux.

7.4 Exercice. 1. Déterminer toutes les fonctions continues (*resp.* monotones) f sur $\mathbb{R}$, vérifiant l'équation fonctionnelle $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$. (*Indication : montrer que f est linéaire sur $\mathbb{Q}$ et utiliser l'hypothèse de continuité (resp. de monotonie) pour conclure*).

2. Soit E un supplémentaire de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, vu comme sous-espace vectoriel, de sorte que tout x réel admet une unique décomposition $x = r + e$ avec $r \in \mathbb{Q}$ et $e \in E$. Soit f définie par $f(x) = r$. Vérifier que f satisfait l'égalité du 1 ([5]).
3. Déterminer toutes les fonctions continues f sur $\mathbb{R}$, telles que, $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on ait $f\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big) = \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.
4. Variante : démontrer qu'une fonction continue f sur $\mathbb{R}$ est convexe si et seulement si $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big) \leqslant \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.

7.5 Exercice. *Prolongement des fonctions continues définies sur un fermé.* Soit F un fermé non vide de $\mathbb{R}$ et notons U son complémentaire. Soit $f : F \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Si $x \in \mathbb{R}$, on pose $a(x) = \sup\{y \in F;\ y \leqslant x\}$ et $b(x) = \inf\{y \in F; y \geqslant x\}$. Démontrer que $a(x) \leqslant x \leqslant b(x)$.
2. En déduire que U est réunion disjointe d'une famille au plus dénombrable d'intervalles ouverts.
3. Construire une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g = f$ sur F, et affine sur tout intervalle $[a,b]$ tel que $]a,b[\subset U$. Démontrer qu'une telle g est continue sur $\mathbb{R}$.

7.3.2 Bijectivité et fonctions réciproques

7.6 Exercice. (*cf.* [Monier Exos, Analyse 1, 4.5.12]) Existe-t-il une bijection continue $[0,1[\to \mathbb{R}$?

7.7 Exercice. (*cf.* [Monier Exos, Analyse 1, 4.7.8]) Soient $x_1, ..., x_7$ sept nombres réels. Démontrer qu'il existe $i \neq j$ tels que

$$0 \leqslant \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

7.3.3 Dérivabilité

7.8 Exercice. (*cf.* [Monier Exos, Analyse 1, 5.2.1])

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$. Démontrer qu'il en est de même pour P'.
2. Soit P un polynôme réel scindé. Démontrer que P' est scindé.

7.9 Exercice. (*cf.* [MT], ou [Monier Exos, Analyse 1, 5.1.6]) Soient I un intervalle ouvert contenant 0 et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0, et telle que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(2x) - f(x)}{x}$ admet en 0 une limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Le but de l'exercice est de démontrer que f est dérivable en 0.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que l'on a
$$f(x) - f(2^{-n}x) = \ell x(1 - 2^{-n}) + x \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} \varepsilon(2^{-k}x)$$
où ε est une fonction tendant vers 0 en 0.
2. Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k}\varepsilon(2^{-k}x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 et conclure.

---

5. On peut montrer qu'un tel contre exemple ne peut pas être mesurable au sens de Lebesgue.

7.10 Exercice. On se propose de donner deux autres démonstrations du théorème de Darboux (*cf.* 3.12) : Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Soient $a, b \in I$ avec $a < b$. On veut démontrer que $f'([a,b])$ contient toute valeur comprise entre $f'(a)$ et $f'(b)$.

Première démonstration. Pour $x \in I \setminus \{a\}$, posons $g(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ et $g(a) = f'(a)$ et, pour $x \in I \setminus \{b\}$, posons $h(x) = \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b}$ et $h(b) = f'(b)$.

1. Démontrer que $g([a,b])$ et $h([a,b])$ et $g([a,b]) \cup h([a,b])$ sont des intervalles.
2. Conclure

Deuxième démonstration. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que $f'(a) < f'(b)$. Soit $c \in]f'(a), f'(b)[$. Posons $g(x) = f(x) - cx$. Démontrer que le minimum de g sur $[a,b]$ n'est atteint ni en a ni en b et conclure.

7.3.4 Convexité

7.11 Exercice. (*cf.* [Monier Exos, Analyse 1, 5.6.10]) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Démontrer que $\dfrac{f(x)}{x}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ quand $x \to +\infty$.
2. Si $\ell \in \mathbb{R}$, montrer que $f(x) - \ell x$ admet aussi une limite.

7.12 Exercice. Soit $n \geqslant 3$ et un polygone convexe à n cotés inscrit dans le cercle unité. Démontrer que son périmètre est maximal si et seulement s'il est régulier. (*Indication : se ramener à une inégalité de convexité pour la fonction sinus sur* $[0, \pi]$).

7.13 Exercice. *Inégalité d'Hadamard*

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(u_1, \ldots, u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $(c_1, \ldots, c_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tels que $\sum_{i=1}^n c_i = 1$. Établir l'inégalité : $\prod_{i=1}^n u_i^{c_i} \leqslant \sum_{i=1}^n c_i u_i$. (NB : lorsque les c_i valent $1/n$ il s'agit de la comparaison classique entre moyennes géométrique et arithmétique).
2. Soit $S = (s_{ij})$ une matrice symétrique définie positive. Démontrer que $\det S \leqslant \prod_{i=1}^n s_{ii}$. (*Indication : écrire* $S = {}^t PDP$, *où* $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *et P est orthogonale, exprimer les s_{ii} en fonction des λ_i, et utiliser 1*).
3. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, montrer que $|\det A| \leqslant \prod \|C_i\|_2$, où les C_i sont les vecteurs colonnes de A et $\| \ \|_2$ désigne la norme euclidienne standard.
4. Étendre le résultat à $M_n(\mathbb{R})$. Cette inégalité s'appelle inégalité d'Hadamard.

7.3.5 Dérivées successives, formules de Taylor

7.14 Exercice. On pose $f(x) = \sin(x^2)$. Calculer $f^{(14)}(0)$.

7.15 Exercice. Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle ouvert, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. Donner à l'aide d'une intégrale l'expression de l'application $F : I \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1} telle que $F^{(k)}(a) = 0$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$ et $F^{(n+1)} = f$.

7.16 Exercice. (*cf.* [Monier Exos, Analyse 1, 5.3.22] pour le cas $n = 0$) Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} et $a \in \mathbb{R}$. Pour $h \in \mathbb{R}$, on écrit

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + ... + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta_h h).$$

On suppose en outre que $f^{(n+1)}(a) \neq 0$. Démontrer que pour h assez petit, θ_h est uniquement défini, et que $\lim\limits_{h\to 0} \theta_h = \dfrac{1}{n+1}\cdot$

7.17 Exercice. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière en 0. Pour cela, deux méthodes.

1. Écrivons $(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_k(x)$ où R_k est un reste de Taylor. Démontrer à l'aide d'une formule de Taylor que $R_k(x) \to 0$ pour $x \in]-1,1[$.
2. Démontrer que la série entière $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ est convergente pour $x \in\ ]-1,1[$ et que sa somme satisfait $(1+x)S' = \alpha S$. Conclure.

7.18 Exercice. *Inégalité de Kolmogorov* ([Monier Exos, Analyse 1, 5.3.25]) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^2. On suppose que f et f'' sont bornées et on pose $M_0 = \sup\{|f(t)|;\ t \in \mathbb{R}\}$ et $M_2 = \sup\{|f''(t)|;\ t \in \mathbb{R}\}$.

1. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange, montrer que pour tous x et $h > 0$ on a
$$|f'(x)| \leqslant \frac{M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}\cdot$$
2. On pose $M_1 = \sup\{|f'(t)|;\ t \in \mathbb{R}\}$. Démontrer que M_1 est fini et qu'on a l'inégalité $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$.
3. Plus généralement on suppose que f est n fois dérivable et on pose $M_k = \sup\{|f^{(k)}(t)|;\ t \in \mathbb{R}\}$ (ce « sup » est pris dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$). Démontrer que si M_0 et M_n sont finis, alors pour tout k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on a $M_k \leqslant 2^{k(n-k)/2}M_0^{1-k/n}M_n^{k/n}$.

7.19 Exercice. *Méthode de Laplace* (*cf.* [CFL, ex. 9-9]] ou [LeSc, Tome 3, ex. M3]) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ une fonction de classe C^2. On suppose que f admet un unique maximum en $c \in]a,b[$ et que, de plus, $f''(c) < 0$. Soit également $g : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue. Démontrer que pour $n \to \infty$ on a l'équivalent suivant :

$$\int_a^b g(x)f(x)^n\,dx \sim g(c)f(c)^n\sqrt{\frac{2\pi f(c)}{-f''(c)n}}\cdot$$

7.20 Exercice.
1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $f(x) = \exp -\dfrac{1}{x^2}$ si $x > 0$. Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Construire une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$, positive, nulle hors de $[-1,1]$, et valant 1 sur $[-1/2,1/2]$.

7.4 Solutions

Exercice 7.1. Posons $a = \lim\limits_{-\infty} f$ et $b = \lim\limits_{+\infty} f$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $x \leqslant A \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon/2$ et $x \geqslant B \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon/2$. On peut de plus supposer que $A \leqslant B$.

En particulier (prenant par exemple $\varepsilon = 1$) la fonction f est bornée sur $]-\infty, A] \cup [B, +\infty[$; elle est aussi bornée sur le segment $[A, B]$; elle est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

La fonction continue f est uniformément continue sur le segment $[A-1, B+1]$; il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, que l'on peut supposer $\leqslant 1$ tel que pour $x, y \in [A-1, B+1]$ on ait $|x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x-y| < \alpha$. Alors on a

- ou bien $x \leqslant A$ et $y \leqslant A$: dans ce cas $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - a| + |f(y) - a| < \varepsilon$;
- ou bien $x \geqslant B$ et $y \geqslant B$: dans ce cas $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - b| + |f(y) - b| < \varepsilon$;
- ou bien $x, y \in [A - 1, B + 1]$ et $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Cela prouve que f est uniformément continue.

Exercice 7.2. Soient $x, y \in [0, 1]$ avec $x \leqslant y$. Comme $[0, x] \subset [0, y]$, on a $\sup\{f(t);\ t \in [0, x]\} \leqslant \sup\{f(t);\ t \in [0, y]\}$, donc φ est croissante.

En plus détaillé... Pour tout $t \in [0, x]$, on a $t \in [0, y]$, donc $f(t) \leqslant \varphi(y) = \sup\{f(t);\ t \in [0, y]\}$. Cela prouve que $\varphi(y)$ est un majorant de $\{f(t);\ t \in [0, x]\}$ donc $\varphi(y) \geqslant \sup\{f(t);\ t \in [0, x]\} = \varphi(x)$.

Soient $x \in [0, 1]$ et $\varepsilon > 0$. Soit $t \in [0, x]$ en lequel f atteint son maximum, *i.e.* $f(t) = \varphi(x)$. Par la continuité de f en x et en t, il existe $\alpha > 0$ tel que
- pour tout $s \in [0, 1]$ avec $|s - x| < \alpha$ on ait $f(s) \leqslant f(x) + \varepsilon \leqslant \varphi(x) + \varepsilon$;
- pour tout $s \in [0, 1]$ tel que $|s - t| < \alpha$ on ait $f(s) \geqslant f(t) - \varepsilon$.

Soit alors $y \in [0, 1]$ tel que $|x - y| < \alpha$.

⋆ Pour tout $s \in [0, y]$, on a, ou bien $s \leqslant x$, donc $f(s) \leqslant \varphi(x)$, ou bien $x < s < x + \alpha$ et $f(s) \leqslant f(x) + \varepsilon \leqslant \varphi(x) + \varepsilon$. On en déduit que $\varphi(y) \leqslant \varphi(x) + \varepsilon$.

⋆ Posons $s = \inf(y, t)$. Comme $t \leqslant x < y + \alpha$, il vient $t - \alpha < y$, donc $t - \alpha < s \leqslant t$ donc $\varphi(y) \geqslant f(s) \geqslant f(t) - \varepsilon = \varphi(x) - \varepsilon$.

Exercice 7.3. Si x est rationnel, il existe une suite d'irrationnels (y_n) tels que $y_n \to x$. Alors $f(y_n) = 0$ ne converge pas vers $f(x)$, donc f n'est pas continue en x.

Si $x \notin \mathbb{Q}$, soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $1/n < \varepsilon$. Notons p la partie entière de $n!x$. L'intervalle ouvert $\left]\dfrac{p}{n!}, \dfrac{p+1}{n!}\right[$ contient x (car x étant irrationnel on a $x \neq \dfrac{p}{n!}$) et pour y dans cet intervalle $0 \leqslant f(y) < 1/n$, donc f est continue en x.

Exercice 7.4.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ donc $f(0) = 0$. Par récurrence sur n, on a $f(nx) = nf(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus $0 = f(-x + x) = f(-x) + f(x)$, donc $f(-x) = -f(x)$. Il vient $f(nx) = nf(x)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

   Soit $r = p/q$ un nombre rationnel. Appliquant ce qui précède à $y = x/q$, il vient $f(x) = qf(y)$ et $f(py) = pf(y)$, soit $f(rx) = rf(x)$.

   Posons $f(1) = \lambda$. Pour $x \in \mathbb{Q}$, on a $f(x) = \lambda x$.
   - Si f est continue, l'application $x \mapsto f(x) - \lambda x$ est nulle sur $\mathbb{Q}$ et continue donc nulle.
   - Supposons que f est monotone. Soit $x \in \mathbb{R}$; construisons des suites (y_n) et (z_n) de nombres rationnels convergeant vers x telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $y_n \leqslant x \leqslant z_n$. Alors $f(x)$ et $xf(1)$ sont compris entre $f(y_n) = \lambda y_n$ et $f(z_n) = \lambda z_n$, donc $|f(x) - xf(1)| \leqslant |\lambda|(z_n - y_n)$. Comme cela a lieu pour tout n, il vient $f(x) = \lambda x$.
2. L'application f ainsi définie est la projection sur $\mathbb{Q}$ parallèlement à E : elle est $\mathbb{Q}$-linéaire donc satisfait l'égalité du 1.
3. Posons $g(x) = f(x) - f(0)$. On a encore $g\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big) = \dfrac{g(x) + g(y)}{2}$. En particulier, $g\Big(\dfrac{2z+0}{2}\Big) = \dfrac{g(2z) + g(0)}{2}$, soit $g(2z) = 2g(z)$. Enfin, prenant $z = \dfrac{x+y}{2}$, on trouve $g(x + y) = g(x) + g(y)$. Par la question 1, g est linéaire, donc f est affine.
4. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant p \leqslant 2^n$, on a $f(p2^{-n}x + (1 - p2^{-n})y) \leqslant p2^{-n}f(x) + (1 - p2^{-n})f(y)$.

   C'est clair pour $n = 0$ et vrai par hypothèse pour $n = 1$. Supposons la propriété vraie pour n et soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant p \leqslant 2^{n+1}$.
   - Si $p = 2k$ est pair, $p2^{-n-1} = k2^{-n}$ et l'inégalité est vraie d'après l'hypothèse de récurrence.

- Si $p=2k+1$ est impair, posons $u=k2^{-n}x+(1-k2^{-n})y$ et $v=(k+1)2^{-n}x+(1-(k+1)2^{-n})y$; on a $p2^{-n-1}x+(1-p2^{-n-1})y=\dfrac{u+v}{2}$, or

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{u+v}{2}\Big) &\leqslant \frac{f(u)+f(v)}{2} \\ &\leqslant \frac{(k2^{-n})f(x)+(1-k2^{-n})f(y)+((k+1)2^{-n})f(x)+(1-(k+1)2^{-n})f(y)}{2} \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence. Cela donne bien

$$f(p2^{-n-1}x+(1-p2^{-n-1})y)\leqslant p2^{-n-1}f(x)+(1-p2^{-n-1})f(y).$$

Par densité de l'ensemble $\{p2^{-n};\ p,n\in\mathbb{N},\ 0\leqslant p\leqslant 2^n\}$ dans $[0,1]$ on en déduit que f est convexe.

Exercice 7.5.

1. Comme x majore $\{y\in F;\ y\leqslant x\}$, on a $a(x)\leqslant x$. Remarquons que si $\{y\in F;\ y\leqslant x\}=\emptyset$, alors $a(x)=-\infty$ et que si $\{y\in F;\ y\leqslant x\}\neq\emptyset$, cet ensemble est fermé et contient donc sa borne supérieure. En particulier, si $x\notin F$, on a $a(x)<x$. De même $x\leqslant b(x)$ avec égalité si et seulement si $x\in F$.
2. Pour $x\in U$, posons $I_x=]a(x),b(x)[$. On a $x\in I_x\subset U$ et puisque $a(x)\in F\cup\{-\infty\}$ et $b(x)\in F\cup\{+\infty\}$, tout intervalle contenant x et inclus dans U est contenu dans I_x. En particulier, si $y\in I_x$, puisque $y\in I_x\subset U$, et I_y est le plus grand intervalle avec cette propriété, il vient $I_x\subset I_y$; mais alors $x\in I_y$, et par ce qui précède $I_y\subset I_x$, donc $I_x=I_y$.

   Posons $S=\{I_x;\ x\in U\}$. Comme les intervalles de la forme I_x sont tous contenus dans U, leur réunion est contenue dans U ; pour $x\in U$, on a $x\in I_x$, donc U est réunion de ces intervalles. Soient $x,y\in U$; si $I_x\cap I_y\neq\emptyset$, il existe $z\in I_x\cap I_y$; alors, par ce qui précède $I_x=I_z=I_y$. Donc deux éléments distincts de S sont des intervalles disjoints. Enfin, comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, pour tout $x\in U$, l'ensemble $I_x\cap\mathbb{Q}$ n'est pas vide, donc il existe $y\in U\cap\mathbb{Q}$ tel que $I_x=I_y$. Donc $S=\{I_y;\ y\in U\cap\mathbb{Q}\}$ est dénombrable.
3. Il s'agit de définir g sur chacun des intervalles $I\in S$. Pour $I=]a,b[\in S$, si $a,b\in\mathbb{R}$, alors $a,b\in F$ et la restriction de g à $[a,b]$ est l'unique application affine sur $[a,b]$ coïncidant avec f en les points a et b ; si $a=-\infty$ et $b\in\mathbb{R}$, on prend g constante égale à $f(b)$ sur $]a,b[$; si $a\in\mathbb{R}$ et $b=+\infty$, on prend g constante égale à $f(a)$ sur $]a,b[$; enfin $a=-\infty$ et $b=+\infty$ est exclu car $F\neq\emptyset$.

   Démontrons que la fonction g ainsi définie est continue.

   Soit $x\in\mathbb{R}$. Si $x\in U$, la fonction g est affine donc continue au voisinage de x.

   Supposons que $x\in F$ et soit $\varepsilon>0$. Comme f est continue, il existe $\alpha_0>0$ tel que pour tout $y\in F$ tel que $|y-x|<\alpha_0[$ on ait $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.
   - Si $F\cap[x,x+\alpha_0[=\emptyset$, la fonction g est affine sur cet intervalle, donc elle est continue à droite et il existe $\alpha_1>0$ tel que pour $y\in[x,x+\alpha_1[$ on ait $|g(y)-g(x)|<\varepsilon$;
   - s'il existe $z\in F\cap[x,x+\alpha_0[$, alors pour tout $u\in[x,z]$ on a $a(u),b(u)\in[x,z[$, donc $f(a(u))\in\,]f(x)-\varepsilon,f(x)+\varepsilon[$ et $f(b(u))\in]f(x)-\varepsilon,f(x)+\varepsilon[$. Or g est affine sur $[a(u),b(u)]$, donc $g(u)$ est compris entre $f(a(u))$ et $f(b(u))$, donc $|g(u)-g(x)|<\varepsilon$. Posons dans ce cas $\alpha_1=z-x$.

   En distinguant de même deux cas selon que $F\cap\,]x-\alpha_0,x]$ est vide où non, on trouve $\alpha_2>0$ tel que pour tout $y\in\,]x-\alpha_2,x]$ on ait $|g(y)-g(x)|<\varepsilon$.

   Prenant $\alpha=\min(\alpha_1,\alpha_2)$ on a $|g(y)-g(x)|<\varepsilon$ pour tout $y\in\,]x-\alpha,x+\alpha[$.

Exercice 7.6. Si $f:[0,1[\to\mathbb{R}$ est continue et injective, elle est (strictement) monotone, donc $f(0)$ minore (si f est croissante) ou majore (si f est décroissante) $f([0,1[)$. Alors $f([0,1[)$ est minoré ou majoré, donc est distinct de $\mathbb{R}$. Donc f n'est pas surjective.

Exercice 7.7. Quitte à permuter les x_i, on peut supposer que la suite (x_i) est croissante. Posons $t_i = \operatorname{Arctan} x_i$. On a $\sum_{i=1}^{6} t_{i+1} - t_i = t_7 - t_1 < \pi/2 - (-\pi/2)$. Il existe donc $i \in \{1, \dots, 6\}$ tel que $t_{i+1} - t_i < \pi/6$. On a alors $0 \leqslant \tan(t_{i+1} - t_i) = \dfrac{x_{i+1} - x_i}{1 + x_{i+1}x_i} < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Exercice 7.8. Notons $n(\geqslant 1)$ le degré de P.

1. Notons $t_1 < \ldots < t_n$ les racines de P. Par le théorème de Rolle, P' s'annule entre t_i et t_{i+1}. On a ainsi $n - 1$ racines distinctes de P'.
2. Notons $t_1 < \ldots < t_k$ les racines de P et $m_1, \dots, m_k$ leurs multiplicités respectives. On a $n = \sum_{i=1}^{k} m_i$. Alors P' admet $k - 1$ racines $s_1, \dots, s_{k-1}$ distinctes des t_i (comme ci-dessus) ; si $m_i \geqslant 2$ alors t_i est racine de P' de multiplicité $m_i - 1$. Donc P' est divisible par $\prod_{i=1}^{k-1}(X - s_i) \prod_{i=1}^{k}(X - t_i)^{m_i - 1}$.

   Or $k - 1 + \sum_{i=1}^{k}(m_i - 1) = n - 1$ donc P' est scindé.

Exercice 7.9.

1. Pour $y \in \mathbb{R}^*$, posons $\varepsilon(y) = 2\dfrac{f(y) - f(y/2)}{y} - \ell$. On a $\lim_{y \to 0} \varepsilon(y) = 0$ et

$$f(x) - f(2^{-n}x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(2^{-k}x) - f(2^{-k-1}x) = \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\ell(2^{-k-1}x) + 2^{-k}x\varepsilon(2^{-k}x)\Big).$$

2. Soit $\eta > 0$. Il existe α tel que pour $0 < |y| < \alpha$ on ait $|\varepsilon(y)| < \eta$. Pour $0 < |x| < \alpha$, on a $\Big|\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k}\varepsilon(2^{-k}x)\Big| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k}|\varepsilon(2^{-k}x)| \leqslant \eta$.

   Faisant tendre n vers $+\infty$ dans 1, on trouve $f(x) - f(0) = \ell x + x\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k}\varepsilon(2^{-k}x)$, (par continuité de f) soit $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \ell + \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k}\varepsilon(2^{-k}x)$. On en déduit que $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} \to \ell$, soit $f'(0) = \ell$.

Exercice 7.10.

Première démonstration. 1. L'application g (*resp.* h) est continue en tout point de $]a, b]$ (*resp.* $[a, b[$) parce que f l'est et en a (*resp.* b) par définition de la dérivée. D'après le théorème des valeurs intermédiaires $g([a, b])$ et $h([a, b])$ sont des intervalles. Comme $g(b) = f(a)$, on a $g([a, b]) \cap h([a, b]) \neq \emptyset$, donc $g([a, b]) \cup h([a, b])$ est aussi un intervalle.

2. Posons $J = g([a, b]) \cup h([a, b])$. C'est un intervalle qui contient $f'(a)$ et $f'(b)$ donc toute valeur comprise entre $f'(a)$ et $f'(b)$; par ailleurs, d'après le théorème des accroissements finis, $g([a, b]) \subset f'([a, b])$ et $h([a, b]) \subset f'([a, b])$, donc $J \subset f'([a, b])$: toute valeur comprise entre $f'(a)$ et $f'(b)$ est dans $f'([a, b])$.

Deuxième démonstration. La fonction continue g atteint son minimum en un point d du segment $[a, b]$; comme $g'(a) < 0$, pour $x \in]a, b]$ proche de a, on a $g(x) < g(a)$, donc $d \neq a$. De même, puisque $g'(b) > 0$, on a $b \neq d$, donc $d \in]a, b[$; comme g admet un extremum local en d, il vient $g'(d) = 0$, donc $f'(d) = c$.

Exercice 7.11.

1. Par convexité de f, la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ est croissante, donc admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ quand $x \to +\infty$. Alors $\dfrac{f(x)}{x} \to \ell$.
2. On en déduit que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \to \ell$, et cette fonction étant croissante, il vient $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \leqslant \ell$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $(x \neq y)$, donc, pour $x > y$, il vient $f(x)-f(y) \leqslant (x-y)\ell$, donc $x \mapsto f(x) - \ell x$ est décroissante et admet donc une limite $\in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Exercice 7.12. Notons $e^{ia_1}, \dots e^{ia_n}$ les affixes des sommets d'un polygone avec $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_n \leqslant 2\pi$. Le périmètre de ce polygone est $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |e^{ia_{k+1}} - e^{ia_k}|$ (avec la convention $a_{n+1} = a_1$). On a $|e^{ia} - e^{ib}| = 2|\sin \dfrac{a-b}{2}|$. Posons $t_k = \dfrac{a_{k+1}-a_k}{2}$ et $t_n = \dfrac{a_1 + 2\pi - a_n}{2}$. Il vient $P = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin t_k$. Remarquons que les t_k sont positifs ou nuls et que leur somme est π.

La fonction sinus étant strictement concave sur $[0, \pi]$, il vient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sin t_k \leqslant \sin \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k}{n}$, avec égalité si et seulement si tous les t_k sont égaux, soit $P \leqslant 2n \sin \dfrac{\pi}{n}$ - périmètre du polygone convexe régulier, avec égalité si et seulement si tous les t_k sont égaux, c'est à dire pour un polygone convexe régulier.

Exercice 7.13.

1. Posons $t_i = \ln u_i$. La fonction exp étant convexe, il vient $\exp \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i t_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i \exp t_i$.
2. Écrivons $P = (p_{ij})$. Il vient $s_{ii} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_{ji}^2 \lambda_j$. Comme la matrice P est orthogonale, il vient $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_{ji}^2 = 1$, donc $s_{ii} \geqslant \displaystyle\prod_{j=1}^{n} \lambda_j^{p_{ji}^2}$. D'où $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} s_{ii} \geqslant \prod_{i,j=1}^{n} \lambda_j^{p_{ji}^2} = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j^{\sum_{i=1}^{n} p_{ji}^2}$. Or on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_{ji}^2 = 1$ et $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} \lambda_j = \det S$.
3. Posons $S = {}^tAA$. On a $(s_{ij}) = \langle C_i | C_j \rangle$. Il vien $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \|C_i\|^2 \geqslant \det S = (\det A)^2$.
4. Si $A \notin GL_n$ on a $\det A = 0$. L'inégalité n'en est que plus claire ! (On peut évidemment aussi invoquer la densité de GL_n dans M_n).
   NB. Géométriquement, la valeur absolue du déterminant de A est le volume du parallélépipède de côtés C_i. Ce volume est maximal, égal au produit des $\|C_i\|$ lorsque les C_i sont orthogonaux.

Exercice 7.14. On écrit $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{4k+2} + o(x^{14})$, et, par unicité du développement limité, $f^{(14)}(0) = -\dfrac{14!}{7!}$.

Exercice 7.15. La formule de Taylor avec reste intégral donne

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{F^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} F^{(n+1)}(t)\,dt, \quad \text{soit} \quad F(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\,dt.$$

Exercice 7.16. Comme $f^{(n+1)}(a) \neq 0$ la fonction continue $f^{(n+1)}$ garde un signe constant au voisinage de a, donc $f^{(n)}$ est strictement monotone donc injective au voisinage de a, d'où l'unicité de θ_h. La formule de Taylor Young à l'ordre $n+1$ donne

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + ... + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a) + o(h^{n+1})$$

soit $\dfrac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta_h h) = \dfrac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a) + o(h^{n+1})$, ou encore

$$\frac{f^{(n)}(a+\theta_h h) - f^{(n)}(a)}{h} \to \frac{f^{(n+1)}(a)}{n+1}\cdot$$

Or $\dfrac{f^{(n)}(a+\theta_h h) - f^{(n)}(a)}{\theta_h h} \to f^{(n+1)}(a)$. Faisant le quotient de ces deux limites, il vient $\theta_h \to \dfrac{1}{n+1}\cdot$

Exercice 7.17. On a $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$. Posons $a_k = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}\cdot$
Écrivons donc $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k + R_n(x)$. Remarquons que $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \dfrac{\alpha-k}{k+1} \to -1$ (si $\alpha \notin \mathbb{N}$).

1. Reste de Taylor-Lagrange : $R_n(x) = a_n x^n (1+\theta x)^{\alpha-n}$, donc $|R_n(x)| \leqslant |a_n| \max(1,(1+x)^\alpha)\Big(\dfrac{|x|}{1-|x|}\Big)^n$.
   Notons u_n ce dernier terme. On trouve que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \dfrac{|x|}{1-|x|}$, donc $R_n(x)$ tend vers 0 des que $|x| < 1/2$.
   Reste intégral : $R_n(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\,dt = na_n \int_0^x \Big(\frac{x-t}{1-t}\Big)^{n-1}(1-t)^{\alpha-1}\,dt$. Or pour t entre 0 et x, on a $\left|\dfrac{x-t}{1-t}\right| \leqslant |x|$, donc $|R_n(x)| \leqslant n|a_n|\max(1,(1+x)^\alpha - 1)|x|^n$ qui tend vers 0 dès que $|x| < 1$.
2. La série entière $\sum a_k x^k$ a pour rayon de convergence 1. Posons $S(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$. On a $(k+1)a_{k+1} = (\alpha-k)a_k$. On trouve $(1+x)S'(x) = (1+x)\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}((k+1)a_{k+1} + ka_k)x^k = \alpha S(x)$. Posons $g(x) = (1+x)^{-\alpha}S(x)$. On trouve $g'(x) = -\alpha(1+x)^{-\alpha-1}S(x) + (1+x)^{-\alpha}S'(x) = 0$. Comme $g(0) = S(0) = 1$, il vient $g(x) = 1$ pour $x \in\,]-1,1[$, donc $S(x) = (1+x)^\alpha$.

Exercice 7.18.

1. On a $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \dfrac{h^2}{2}f''(x+\theta_1 h)$ et $f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \dfrac{h^2}{2}f''(x-\theta_2 h)$ avec $\theta_1, \theta_2 \in]0,1[$. Il vient $f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \dfrac{h^2}{2}(f''(x+\theta_1 h) - f''(x-\theta_2 h))$. Enfin
   $$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} + \frac{h}{4}(f''(x+\theta_1 h) - f''(x-\theta_2 h)).$$
   Il vient $|f'(x)| \leqslant \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{hM_2}{2}\cdot$
2. Prenant $h = \sqrt{\dfrac{2M_0}{M_2}}$, il vient $|f'(x)| \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Soient $h_1 \dots, h_{n-1}$ des réels non nuls distincts. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout j il existe $u_j \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(x+h_j) - f(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{h_j^k}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{f^{(n)}(u_j)}{n!} h_j^n.$$

La matrice (de type Vandermonde) (a_{jk}) où $a_{jk} = h_j^k$ est inversible. Notons (b_{jk}) son inverse. On a $\dfrac{f^{(j)}(x)}{j!} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} b_{jk}\Big(f(x+h_k) - f(x) - \frac{f^{(n)}(u_k)}{n!} h_k^n\Big)$. On en déduit que

$$|f^{(j)}(x)| \leqslant j! \sum_{k=1}^{n-1} |b_{jk}| \Big(2M_0 + \frac{M_n |h_k|^n}{n!}\Big).$$

Donc $M_k < +\infty$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.
Remarquons que, d'après 2, on a $\ln M_k \leqslant \dfrac{\ln M_{k-1} + \ln M_{k+1} + \ln 2}{2}$ Posons $x_k = \ln M_k - \dfrac{\ln 2}{2} k(n-k)$. D'après 2, on a $2x_k \leqslant x_{k+1} + x_{k-1}$, donc $x_{k+1} - x_k$ est croissante. On en déduit que $\dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1}(x_{j+1} - x_j) \leqslant \frac{1}{n-k}\sum_{j=k}^{n-1}(x_{j+1} - x_j)$, soit $x_k \leqslant \dfrac{k}{n} x_n + (1 - \dfrac{k}{n}) x_0$.

Exercice 7.19. Au voisinage de c, on a $\dfrac{f(x)}{f(c)} = 1 + \dfrac{f''(c)}{2f(c)}(x-c)^2 + o(x-c)^2$, donc $\displaystyle\lim_{x \to c} \frac{\ln\left(\frac{f(x)}{f(c)}\right)}{(x-c)^2} = \frac{f''(c)}{2f(c)}$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe a', b' avec $a \leqslant a' < c < b' \leqslant b$ tels que, pour $x \in [a', b']$ on ait $\left|\dfrac{\ln\left(\frac{f(x)}{f(c)}\right)}{(x-c)^2} - \dfrac{f''(c)}{2f(c)}\right| < \varepsilon$ et $|g(x) - g(c)| < \varepsilon$.
Posons $\lambda = \sup\{f(t);\ t \in [a, a'] \cup [b', b]\} < f(c)$, et $M = \sup\{g(t);\ t \in [a, b]\}$. On a

$$I_1 = \int_a^{a'} g(x) f(x)^n \, dx + \int_{b'}^b g(x) f(x)^n \, dx \leqslant M(b - b' + a' - a)\lambda^n = o\Big(f(c)^n \sqrt{\frac{1}{n}}\Big).$$

Posons $u = g(c) - \varepsilon$, $u' = g(c) - \varepsilon$, $v = \varepsilon - \dfrac{f''(c)}{2f(c)}$ et $-v' = \varepsilon - \dfrac{f''(c)}{2f(c)}$. On peut supposer que ε est assez petit pour avoir $u > 0$ et $v' > 0$.
Pour $x \in [a', b']$, on a

$$u f(c)^n e^{-nv(x-c)^2} \leqslant f(x)^n g(x) \leqslant u' f(c)^n e^{-nv'(x-c)^2}.$$

Or, en faisant le changement de variable $t = \sqrt{nv}(x - c)$ on trouve

$$\int_{a'}^{b'} u f(c)^n e^{-nv(x-c)^2} \, dx = \frac{u f(c)^n}{\sqrt{nv}} \int_{\sqrt{nv}(a'-c)}^{\sqrt{nv}(b'-c)} e^{-t^2} \, dt$$

et $\displaystyle\int_{\sqrt{nv}(a'-c)}^{\sqrt{nv}(b'-c)} e^{-t^2} \, dt$ converge vers $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \, dt = \sqrt{\pi}$. De même

$$\int_{a'}^{b'} u' f(c)^n e^{-nv'(x-c)^2} \, dx = \frac{u' f(c)^n}{\sqrt{nv'}} \int_{\sqrt{nv'}(a'-c)}^{\sqrt{nv'}(b'-c)} e^{-t^2} \, dt \leqslant u' f(c)^n \sqrt{\frac{\pi}{nv'}}.$$

On en déduit que, pour n assez grand, on a

$$\int_a^b f(t)^n g(t)\,dt \geqslant \int_{a'}^{b'} f(t)^n g(t)\,dt \geqslant (\sqrt{\pi}-\varepsilon)\frac{uf(c)^n}{\sqrt{nv'}}$$

et

$$\int_a^b f(t)^n g(t)\,dt \leqslant \int_{a'}^{b'} f(t)^n g(t)\,dt + \varepsilon\Big(f(c)^n\sqrt{\frac{1}{n}}\Big) \leqslant u' f(c)^n \sqrt{\frac{\pi}{nv'}} + \varepsilon\Big(f(c)^n\sqrt{\frac{1}{n}}\Big)$$

d'où le résultat.

Exercice 7.20.

1. Rappelons le théorème de prolongement de la dérivée :
   Soient I un intervalle ouvert, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. Si f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et f' admet une limite ℓ en a, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.
   L'application f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. On démontre par récurrence sur n que, pour $x \neq 0$, on a $f^{(n)}(x) = R_n(x)e^{-x^{-2}}$, où R_n est une fonction rationnelle (de la forme $\dfrac{P(x)}{x^m}$). On en déduit par récurrence, à l'aide du théorème de prolongement de la dérivée que f est de classe C^n pour tout n.
2. On pose
   - $g(x) = f(x-1)f(2-x)$. La fonction g est de classe C^∞ nulle en dehors de $[1,2]$ et strictement positive en tout point de $]1,2[$.
   - $h(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} g(t)dt = \int_x^2 g(t)\,dt$. La fonction h est de classe C^∞, nulle sur $[2,+\infty[$, strictement positve sur $]-\infty,2[$, constante sur $]-\infty,1]$.
   - $k(x) = \dfrac{h(|x|/2)}{h(0)}$. La fonction k convient.