Leçon 403 : Exemples d'étude de suites définies par une relation de récurrence.

Exercice 1 Étudier en fonction du réel u_0 le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2 - \sqrt{u_n}} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}\,.$$

Exercice 2 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}\,.$$

a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de rationnels qui converge vers $\sqrt{2}$.
b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2}\,)^2}{2\,u_n}$$

et en déduire une majoration de $u_n - \sqrt{2}$ en fonction de n. Combien de termes de cette suite suffit-il de calculer pour obtenir les 100 premières décimales de $\sqrt{2}$?
c) Montrer qu'on obtient la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en appliquant la méthode de Newton à l'équation $x^2 = 2$ et retrouver ainsi le résultat de la question précédente.

Exercice 3 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \sin(u_n) \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}\,.$$

a) Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
b) Donner un équivalent de u_n quand n tend vers l'infini.
Indication : on pourra considérer la suite $(u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$ avec α bien choisi.

Exercice 4 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}\,.$$

Exprimer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la limite de la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5 Pour tous réels positifs a et b, on considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et les relations de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \sqrt{u_n\, v_n} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}\,.$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite réelle.

Exercice 6 Soient (X, d) un espace métrique compact non vide et $f : X \to X$ vérifiant :

$$\forall (x\,,\,y) \in X^2 \;\;,\;\; x \neq y \Longrightarrow d\big(f(x)\,,\,f(y)\big) < d(x\,,\,y) \quad .$$

a) L'application f est-elle nécessairement contractante ?
b) Montrer que f admet un unique point fixe a.
c) Soit K une partie fermée non vide de X telle que : $f(K) \subset K$. Montrer que $a \in K$.
d) Montrer que pour tout $u_0 \in X$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

converge vers a.
e) En considérant l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$, montrer que ces résultats sont faux si on ne suppose pas X compact.