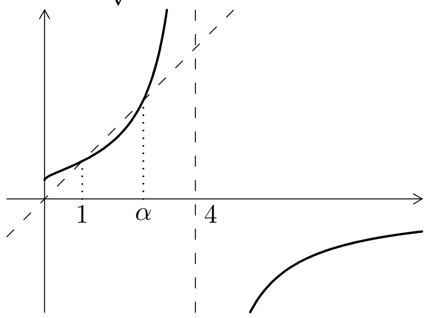
Leçon 403 : Exemples d'étude de suites définies par une relation de récurrence. Corrigé des exercices.

Exercice 1 La fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{2-\sqrt{x}}$ est continue sur $[0\,,\,4\,[\,\cup\,]\,4\,,\,+\infty\,[$ et a pour graphe :



donc si $u_0 < 0$ ou $u_0 \geqslant 4$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas définie. Pour tout $x \in [0\,,\,4\,[$ on obtient :

$$f(x) - x = \frac{1}{2-\sqrt{x}} - x = \frac{1 - 2\big(\sqrt{x}\big)^2 + \big(\sqrt{x}\big)^3}{2-\sqrt{x}} = \frac{\big(\sqrt{x}-1\big)\,\big(\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}\big)\,\big(\sqrt{x}+\beta\big)}{2-\sqrt{x}}$$

avec $\beta = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} > 0$ et $\alpha = \Big(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, donc f admet les point fixes 1 et α et les intervalles $[0\,,\,1\,[$ et $]\,1\,,\,\alpha\,[$ sont stables par f, car elle est strictement croissante sur $[0\,,\,4\,[$.

- Pour tout $x \in [0\,,\,1\,[$, on a : $f(x) > x$, donc si $u_0 \in [0\,,\,1\,[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) croissante et majorée par 1, donc elle converge vers un point fixe de f dans l'intervalle $[0\,,\,1]$: ce point fixe ne peut être que 1, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

- Si $u_0 = 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1.

- Si $u_0 \in\,]\,1\,,\,\alpha\,[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 1 comme ci-dessus.

- Si $u_0 = \alpha$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à α.

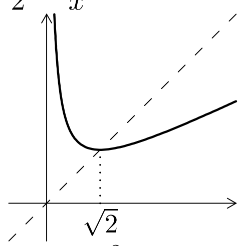
- Si $u_0 \in\,]\,\alpha\,,\,4\,[$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) croissante tant que $u_n < 4$. Si elle était majorée par 4, elle convergerait soit vers un point fixe de f dans $]\,\alpha\,,\,4\,[$ ce qui est impossible, soit vers 4 mais alors $u_{n+1} = f(u_n)$ tendrait vers $+\infty$ ce qui est également impossible : il existe donc un entier N tel que $u_N > 4$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas définie.

On peut observer que :

$$f'(1) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad f'(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}\,\big(2-\sqrt{\alpha}\big)^2} = \frac{1}{2\sqrt{5}-4} > 1$$

donc le point fixe 1 est attractif tandis que α répulsif, ce qui explique les résultats obtenus.

Exercice 2 **a)** La fonction $f\ :\ x \mapsto \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et a pour graphe :



Pour tout réel $x > 0$ on a : $f(x) - x = \dfrac{2-x^2}{2\,x}$ donc $\sqrt{2}$ est son unique point fixe, et elle est strictement croissante sur $[\sqrt{2}\,,\,+\infty[$ qui est donc stable par f. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien définie, strictement décroissante et minorée par $\sqrt{2}$, donc elle converge vers un point fixe de f qui ne peut être que $\sqrt{2}$. La propriété "u_n est rationnel" est évidemment héréditaire, donc on en déduit par récurrence que u_n est un nombre rationnel pour tout entier n.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{u_n^2 + 2 - 2\,u_n\sqrt{2}}{2\,u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{2}\,)^2}{2\,u_n} \leqslant \frac{(u_n - \sqrt{2}\,)^2}{2\,\sqrt{2}}$$

puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, donc la suite définie par $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$ vérifie : $v_{n+1} \leqslant \big(v_n\big)^2$ pour tout entier n et par récurrence on en déduit que : $v_n \leqslant \big(v_0\big)^{2^n}$ puis :

$$0 < u_n - \sqrt{2} \leqslant 2\sqrt{2}\Big(\frac{u_0 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\Big)^{2^n} \leqslant 4\Big(\frac{1}{4}\Big)^{2^n} = \frac{1}{4^{2^n-1}} \quad .$$

Pour obtenir : $|\,u_n - \sqrt{2}\,| \leqslant 10^{-100}$, il suffit donc que : $4^{2^n-1} \geqslant 10^{100}$, soit : $2^n - 1 \geqslant 167$ par un calcul de logarithmes, ce qui est vrai dès que $n = 8$. Le neuvième terme de cette suite fournit donc les 100 premières décimales de $\sqrt{2}$.

Remarque : En écrivant $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, on obtient : $p_{n+1} = \big(p_n\big)^2 + 2\,\big(q_n\big)^2$ et $q_{n+1} = 2\,p_n\,q_n$, donc les entiers p_n et q_n sont de l'ordre de 2^n. Le rationnel u_8 est donc un quotient de nombres à plus de cent chiffres, ce qui explique qu'il peut "encoder" ces cent premières décimales.

c) En appliquant la méthode de Newton à la fonction $h\,:\,x \mapsto x^2 - 2$, on obtient la relation de récurrence :

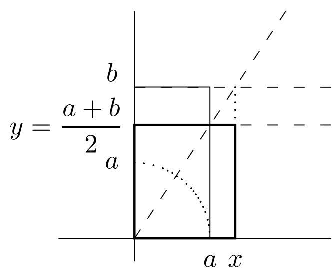
$$x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)} = x_n - \frac{\big(x_n\big)^2 - 2}{2\,x_n} = f(x_n)$$

qui définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On sait que cette méthode conduit "presque toujours" à un point fixe super-attractif de la fonction f puisque si $h(\alpha) = 0$ et $h'(\alpha) \neq 0$ on obtient $f(\alpha) = \alpha$ et :

$$f'(\alpha) = 1 - \frac{\big(h'(\alpha)\big)^2 - h(\alpha)\,h''(\alpha)}{\big(h'(\alpha)\big)^2} = 0$$

dès que h est deux fois dérivables, et ces hypothèses sont bien vérifiées ici. Ceci explique la convergence quadratique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\alpha = \sqrt{2}$.

Remarque historique : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une "suite de Héron" (mathématicien d'Alexandrie du 1^{er} siècle) et elle est basée sur une méthode déjà connue des Babyloniens pour construire un carré ayant la même aire qu'un rectangle donné (on part ici du rectangle de côtés 1 et 2). On construisait un rectangle de même aire que le rectangle initial et dont l'un des côtés est la moyenne arithmétique de ses côtés (qui encadrent le côté du carré, donc on se rapproche de la longueur cherchée) en résolvant l'équation $x\,y = a\,b$ avec $y = \frac{a+b}{2}$ par le théorème de Thalès en suivant la figure :



puisqu'elle équivaut à : $\dfrac{b}{x} = \dfrac{y}{a}$.

Exercice 3 a) La fonction sin est continue sur $\mathbb{R}$ et son seul point fixe est 0 puisque la fonction $x \mapsto x - \sin(x)$ est strictement croissante, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est toujours définie. On a de plus : $0 < \sin(x) < x$ pour tout $x \in]0\,,\,1]$ et : $u_n \in [-1\,,\,1]$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Si $u_1 < 0$ on pose : $v_n = -u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on obtient : $v_1 > 0$ et $v_{n+1} = \sin(v_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car sin et impaire, donc il suffit par symétrie de traiter le cas où : $u_1 \geqslant 0$. Dans ce cas, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire si $u_1 = 0$, et si $u_1 \in]0\,,\,1]$ on obtient : $u_n \in]0\,,\,1]$ pour tout entier $n \geqslant 1$ et la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement décroissante. Comme elle est minorée

par 0, elle converge vers un réel $a \in [0\,,\,1]$ qui est forcément un point fixe de la fonction sin et on a donc : $a = 0$: dans tous les cas, on en conclut que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Comme $\sin'(0) = 1$, ce point fixe n'est ni attractif ni répulsif, donc il faut une étude plus poussée pour obtenir sa vitesse de convergence.
b) Si $u_1 = 1$ on a : $u_n = 0$ pour tout entier $n \geqslant 1$ et si $u_1 \in]0\,,\,1]$ on obtient : $u_n > 0$ pour tout entier $n \geqslant 1$ et par un développement limité de sin en 0 :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{1}{6}\,u_n^3 + o(u_n^3)$$

donc pour tout réel α on a :

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = u_n^\alpha\left(\left(1 - \frac{1}{6}\,u_n^2 + o(u_n^2)\right)^\alpha - 1\right) = -\frac{\alpha}{6}\,u_n^{\alpha+2} + o(u_n^{\alpha+2})\,.$$

En choisissant $\alpha = -2$, on obtient : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}\right) = \frac{1}{3}$ puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, donc :

$$\frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{u_1^2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{3}$$

par un résultat classique sur les sommes partielles des séries divergentes à termes positifs équivalents. On en conclut aisément que : $\displaystyle u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$ puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n\sqrt{\frac{n}{3}} = 1$ par continuité de la fonction $\sqrt{\ }$. Enfin, si $u_1 < 0$, on obtient par symétrie : $\displaystyle u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\sqrt{\frac{3}{n}}$.

Exercice 4 L'équation caractéristique associée à la relation de récurrence $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$ s'écrit : $X^2 - X - 1 = 0$ et elle admet pour racines :

$$r_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad r_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad .$$

On en déduit qu'il existe des constantes réelles A_- et A_+ telles que : $u_n = A_-\,\big(r_-\big)^n + A_+\,\big(r_+\big)^n$ pour tout entier naturel n, et en posant $n = 0$ puis $n = 1$ on obtient le système :

$$\begin{cases} A_- & + \quad A_+ & = 1 \\ r_-\,A_- & + \quad r_+\,A_+ & = 1 \end{cases}$$

qui implique : $\displaystyle A_- = \frac{r_+ - 1}{r_+ - r_-}$ et $\displaystyle A_+ = \frac{1 - r_-}{r_+ - r_-}$. On en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left(\big(1+\sqrt{5}\,\big)^n - \big(1-\sqrt{5}\,\big)^n\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\big(1+\sqrt{5}\,\big)^n}{2^n\sqrt{5}} \quad ,$$

donc : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (la suite de Fibonacci fournit donc le nombre d'or).

Exercice 5 On montre aisément par récurrence que les réels u_n et v_n sont bien définis et strictement positifs pour tout entier naturel n, et on a :

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{\big(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}\,\big)^2}{2}$$

donc : $u_n \geqslant v_n$. On en déduit que :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} - v_n = \sqrt{u_n}\,\big(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\,\big) \geqslant 0$$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, et que :

$$0 \leqslant u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant u_{n+1} - v_n = \frac{1}{2}\left(u_n - v_n\right)$$

donc la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 après comparaison à une suite géométrique. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes, et convergent donc vers une même limite réelle appelée la moyenne arithmético-géométrique de a et b.

Exercice 6 a) Si $X = [0\,,\,1]$ et $f(x) = \sin(x)$ pour tout x, le théorème des accroissement finis montre que pour tous $x \neq y \in X$ il existe un réel c strictement compris entre x et y, donc appartenant à $]\,0\,,\,1\,[$, tel que : $f(x) - f(y) = \cos(c)\,(x-y)$, donc on obtient : $|\,f(x) - f(y)\,| < |\,x-y\,|$ et le hypothèses sont vérifiées. Mais on a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1$$

donc il n'existe aucun réel $k < 1$ tel que : $|\,f(x) - f(y)\,| < k\ |\,x-y\,|$ pour tous $x\,,\,y \in X$, donc l'application f n'est pas contractante. Le théorème du point fixe de Picard ne peut donc pas être appliqué ici.
b) Pour tout $x \in X$, posons : $h(x) = d\big(x\,,\,f(x)\big)$. L'application f est continue puisque 1-lipschitzienne (si $x = y$ on a : $d(f(x)\,,\,f(y)) = 0 = d(x\,,\,y)$), donc $h\,:\,X \to \mathbb{R}$ est continue, donc elle atteint son minimum en un point $a \in X$. Si on avait $f(a) \neq a$, on obtiendrait :

$$h\big(\,f(a)\,\big) = d\big(\,f(a)\,,\,f\circ f(a)\,\big) < d\big(\,a\,,\,f(a)\,\big) = h(a)$$

ce qui contredit la définition de a, donc a est un point fixe de f. Si elle admettait un autre point fixe $a' \neq a$, on aurait :

$$d(a\,,\,a') = d\big(\,f(a)\,,\,f(a')\,\big) < d\big(a\,,\,a'\big)$$

ce qui est contradictoire, donc a est l'unique point fixe de f.
c) L'espace métrique $(K\,,\,d)$ est compact puisque K est fermé, et la restriction $\widetilde{f}\,:\,K \to K$ de f vérifie encore : $d\big(\widetilde{f}(x)\,,\,\widetilde{f}(y)\big) < d(x\,,\,y)$ pour tous $x \neq y \in K$. On en déduit que $\widetilde{f}$ admet un unique point fixe $\widetilde{a} \in K$, et $\widetilde{a}$ est aussi un point fixe de f d'où : $\widetilde{a} = a$ par unicité.
d) Remarquons d'abord que la suite $(d(a\,,\,u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, donc qu'elle converge vers sa borne inférieure $m \geqslant 0$. Posons : $Y = \{u_n\,,\,n \in \mathbb{N}\} \subset X$ et $K = \overline{Y}$. On a donc : $f(Y) = \{u_n\,,\,n \in \mathbb{N}^*\} \subset Y$, d'où l'on déduit : $f(K) \subset K$ par continuité de f (pour tout $\ell \in K$ il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans Y convergeant vers ℓ, et la suite $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans Y et converge vers $f(\ell)$, donc : $f(\ell) \in K$). On en déduit que : $a \in K = \overline{Y}$, c'est à dire que : $m = d(a\,,\,Y) = 0$, et on en conclut que : $(d(a\,,\,u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, c'est à dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a.
e) La fonction f est dérivable et on a pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \in \,]-1\,,\,1\,[$$

donc la formule de Taylor-Lagrange montre qu'elle vérifie l'hypothèse. Mais on a : $f(x) \neq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout entier naturel n on a : $\big(u_{n+1}\big)^2 = 1 + \big(u_n\big)^2$ donc par récurrence on obtient : $\big(u_n\big)^2 = \big(u_0\big)^2 + n$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. L'espace $X = \mathbb{R}$ n'est pas compact mais il est pourtant complet, donc cette hypothèse ne suffit pas pour obtenir les résultats ci-dessus puisque f n'admet aucun point fixe et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge toujours.