Leçon 403 : Exercices complémentaires

On peut aussi parler des suites homographiques (sujet très classique, donc exercices faciles à trouver), de suites chaotiques avec les exercices **1.6** ou **1.7** du polycopié d'analyse, s'inspirer du chapitre **2** (accélération de converge, méthode de Newton) et des exercices qu'il contient, ou encore parler de séries génératrices comme dans l'exercice suivant, voire caser le second (tous deux tirés du [Monier]). Mais il faut faire des choix parmi tout cela, et l'essentiel est d'obtenir une leçon cohérente...

Exercice 1 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k\, u_{n-k} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}\,.$$

Exprimer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Indication : on pourra considérer la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n\, x^n$.

Remarquons tout d'abord que la relation de récurrence et son premier terme déterminent entièrement la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Supposons que le rayon de convergence R de la série entière $\sum u_n\, x^n$ soit strictement positif, et posons pour tout $x \in\,]-R\,,\, R\,[$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\, x^n \quad \text{, donc :} \quad \big(f(x)\big)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n\, x^n \;\text{ où }\; v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, u_{n-k} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\,.$$

On obtient donc pour tout $x \in\,]-R\,,\, R\,[$:

$$x\,\big(f(x)\big)^2 - f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n\, x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\, x^n = -u_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} (v_n - u_{n+1})\, x^{n+1} \quad ,$$

et par unicité du développement en série entière on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie : $u_0 = 1$ et la relation de récurrence si et seulement si on a :

$$x\,\big(f(x)\big)^2 - f(x) + 1 = 0 \qquad \text{pour tout } x \in\,]-R\,,\, R\,[\quad .$$

Si $0 < |\,x\,| \leqslant \dfrac{1}{4}$ les racines de ce trinôme en $f(x)$ sont :

$$f_+(x) = \frac{1 + \sqrt{1-4\,x}}{2\,x} \qquad \text{et} \qquad f_-(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4\,x}}{2\,x}$$

et f_+ n'est pas bornée au voisinnage l'origine, donc elle ne se prolonge pas en une fonction développable en série entière à l'origine, mais pour tout $u \in\,]-1\,,\, 1\,[$ on a :

$$\big(1-u\big)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, u^n \quad \text{ où :} \quad a_n = \frac{\big(-1\big)^n}{n!}\,\frac{1}{2}\,\frac{-1}{2}\,\frac{-3}{2}\,\cdots\,\frac{3-2\,n}{2} = \frac{-(2\,n-3)!}{2^{2\,n-2}\,n!\,(n-2)!}$$

pour tout entier $n \geqslant 2$ ainsi que : $a_0 = 1$ et $a_1 = \dfrac{-1}{2}$, donc si $0 < |\,x\,| < \dfrac{1}{4}$ on obtient :

$$f_-(x) \;=\; 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\,(2\,n-1)!}{(n+1)!\,(n-1)!}\, x^n \;=\; 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n+1} \binom{2\,n-1}{n-1} x^n \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n \quad .$$

En posant : $f_-(0) = b_0 = 1$ on obtient : $x\,\big(f_-(x)\big)^2 - f_-(x) + 1 = 0$ pour tout $x \in\,]-\frac{1}{4}\,,\, \frac{1}{4}\,[$, et le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n\, x^n$ vaut $\frac{1}{4}$, donc les calculs faits ci-dessus montrent que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence et on a : $b_0 = 1$. On en conclut que $u = b$ par unicité d'une telle suite, et on obtient donc :

$$u_n \;=\; \frac{2}{n+1} \binom{2\,n-1}{n-1} \qquad \text{pour tout entier } n \geqslant 1 \quad .$$

Exercice 2 **a)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée vérifiant :

$$\lim_{n\to+\infty}\big(u_{n+1}-u_n\big)=0 \quad .$$

Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un segment non vide.
b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est un singleton.
c) Soient $a<b$ deux réels et $f\,:\,[a\,,\,b]\to[a\,,\,b]$ une fonction continue. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant la relation de récurrence : $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\big(u_{n+1}-u_n\big)=0 \quad .$$

a) Voir les exercices **1.12** et **3.3** du polycopié, où l'on montre que l'ensemble A des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un intervalle et que

$$A=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{\{u_k\,,\,k\geqslant n\}}$$

donc A est fermé et borné, et il est non vide d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass.
b) L'implication est évidente, donc supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une unique valeur d'adhérence ℓ. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne convergeait pas vers ℓ, on obtiendrait :

$$\forall\varepsilon>0\,,\,\forall N\in\mathbb{N}\,,\,\exists n\geqslant N\,,\,|\,u_n-\ell\,|\geqslant\varepsilon \quad ,$$

ce qui permet de construire une suite $\big(u_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $|\,u_{\varphi(n)}-\ell\,|\geqslant\varepsilon$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Mais $\big(u_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc elle possède une valeur d'adhérence ℓ' et on obtient : $|\,\ell'-\ell\,|\geqslant\varepsilon$ en passant à la limite. Comme ℓ' est aussi une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient une contradiction qui montre finalement que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
c) L'implication est évidente, et pour la réciproque on a montré que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un segment non vide $A=[\alpha\,,\,\beta]\subset[a\,,\,b]$ et qu'il suffit de montrer que $\alpha=\beta$ pour conclure. Pour tout $\ell\in A$ il existe une suite extraite $\big(u_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers ℓ, donc $\big(u_{\varphi(n)}+1\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$ par continuité de f et on en déduit que :

$$0=\lim_{n\to+\infty}\big(u_{\varphi(n)+1}-u_{\varphi(n)}\big)=f(\ell)-\ell \quad ,$$

d'où : $f(\ell)=\ell$. Supposons par l'absurde que $\alpha<\beta$ et soit $\ell\in\,]\,\alpha\,,\,\beta\,[$: il existe donc un entier N tel que $u_N\in\,]\,\alpha\,,\,\beta\,[$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire et n'a donc qu'une valeur d'adhérence, ce qui est contradictoire d'où le résultat.