Analyse - Résumés et exercices

Georges Skandalis

Université Paris Diderot (Paris 7) - IREM

Préparation à l'Agrégation Interne

Année 2013 – 2014

Table des matières

1 Suites de nombres réels

Références pour ce chapitre : les livres classiques de premières années, vos livres de L1-L2, DEUG ou CPGE ([L M, L-F A, M Ana, RDO] *etc.*). Pour les développements décimaux - surtout des nombres rationnels, on consultera volontiers [Per].

Les nombres et les opérations sur les nombres sont des objets que l'on rencontre bien sûr très tôt en mathématiques. On rencontre d'abord les nombres entiers positifs, puis, comme ils sont insuffisants pour la soustraction et la division, on est amené à introduire les entiers relatifs puis les nombres rationnels. Le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est insuffisant : il manque des points qui auraient dû y être : $\mathbb{Q}$ n'est pas complet... On est ainsi amené à introduire le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. On n'aura pas tout à fait fini puisque des idées d'algèbre et géométrie nous conduiront ensuite à construire le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Un nombre réel peut être donné comme solution d'une équation plus ou moins simple :
- $\sqrt{2}$ est solution de l'équation $x^2 = 2$;
- π de l'équation $\sin x = 0$...

Par contre tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.

Ainsi, on peut construire $\mathbb{R}$ comme l'ensemble des limites de nombres rationnels ($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$). Cette idée se réalise de la façon suivante.
- on sait quand une suite de nombres rationnels devrait avoir une limite : cela a lieu si et seulement si c'est une suite de Cauchy.
- on sait quand deux suites de nombres rationnels devrait avoir la même limite : cela a lieu si et seulement si leur différence tend vers 0.

La construction mathématique est alors la suivante. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites de Cauchy de nombres rationnels (c'est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ des suites de nombres rationnels) ; sur $\mathcal{C}$ on définit une relation R en écrivant

$$(u_n)R(v_n) \iff \lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0.$$

On démontre que R est une relation d'équivalence et on définit $\mathbb{R}$ comme le quotient d'équivalence $\mathcal{C}/R$. Il reste alors à définir les opérations (addition, multiplication, relation d'ordre $\leqslant$) sur $\mathbb{R}$, plonger $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$...

Une autre façon de concevoir $\mathbb{R}$ est de *choisir* pour chaque nombre réel une une suite de nombres rationnels convergeant vers ce nombre. Par exemple, comme notre façon de compter est basée sur le nombre 10, un nombre réel est limite de la suite de ses développements décimaux. On aurait pu évidemment choisir un développement en base b pour un entier $b \geqslant 2$ quelconque... Mais comme nos mains nous offrent dix doigts, c'est le nombre dix qui a été choisi !

1.1 Développement décimal des nombres réels *cf.* [Per]

Écriture décimale des nombres entiers positifs. Pour décrire les nombres entiers, on pourrait imaginer :
- utiliser un symbole différent pour chaque nombre - cela est évidemment impossible : il faudrait une infinité de symboles différents...
- mettre une barre pour chaque entier - cette méthode est utilisée lors de dépouillements de scrutins et certaines rencontres sportives ; on regroupe alors par paquets de cinq ou de dix ; cependant, pour des nombres moyennement grands, cette méthode est fastidieuse tant à l'écriture qu'à la lecture.

L'écriture décimale permet avec dix symboles de pouvoir exprimer de façon relativement compacte n'importe quel nombre entier.

Nous ne rappelons pas ici le principe de cette écriture, ni les algorithmes des opérations dans cette écriture. Rappelons par contre les tests de division que cette écriture permet.

Division par 10^n. Un nombre entier est divisible par 10^n si et seulement si les n derniers chiffres de son écriture décimale sont nuls. Le reste d'un nombre entier dans la division par 10^n est le nombre obtenu en conservant les n derniers chiffres de son écriture décimale. On en déduit qu'un nombre est divisible par 2^n (ou 5^n) si et seulement si le nombre obtenu en conservant les n derniers chiffres de son écriture décimale l'est.

Division par 3, par 9. Tout nombre entier est congru modulo 9, donc modulo 3 à la somme de ses chiffres (dans l'écriture décimale) : c'est la base de la *preuve par* 9. En effet 10 est congru à 1 modulo 9, donc 10^k est congru à 1 modulo 9 pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, 10^k$ est congru modulo 9 à $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$.

Division par 11. Remarquons que 10 est congru à -1 modulo 11, donc 10^k est congru à $(-1)^k$ modulo 11 pour tout $k \in \mathbb{N}$. On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\, 10^k$ est congru modulo 11 à $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$. On trouve ainsi facilement le reste modulo 11 d'un nombre entier.

Nombres décimaux - approximation décimale des nombres réels

Définition. Un nombre $x \in \mathbb{R}$ est dit *décimal* s'il existe $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = m\,10^{-n}$. En particulier, un nombre décimal est rationnel.

Approximation décimale. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Posons $p_n = E(10^n x)$ (où E désigne la partie entière), $a_n = 10^{-n} p_n$ et $b_n = 10^{-n}(p_n + 1)$, de sorte que $p_n \in \mathbb{Z}$ et $a_n \leqslant x < b_n$. Les nombres a_n et b_n sont décimaux ; le nombre a_n est appelé l'*approximation décimale par défaut* de x à l'ordre n. Si $x \neq a_n$, on dit que b_n est l'*approximation décimale par excès* de x à l'ordre n.

Comme $10 p_n \leqslant 10^{n+1} x < 10(p_n + 1)$, il vient $10 p_n \leqslant p_{n+1} < 10(p_n + 1)$; en particulier, la suite (a_n) est croissante ; et puisque $p_{n+1} < 10 p_n$, il vient $p_{n+1} + 1 \leqslant 10(p_n + 1)$, donc la suite (b_n) est décroissante. Enfin $b_n - a_n = 10^{-n}$, donc les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes ; puisque pour tout n on a $a_n \leqslant x \leqslant b_n$, la limite commune de ces deux suites est x.

Discutons quelques aspects de cette approximation décimale :

Densité de $\mathbb{Q}$. L'approximation décimale nous permet d'écrire tout nombre réel comme limite d'une suite de nombres décimaux. En d'autres termes, les nombres décimaux forment un sous-ensemble dense de $\mathbb{R}$; on en déduit *a fortiori* que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Développement décimal propre. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre entier $c_n = p_n - 10 p_{n-1}$ est compris entre 0 et 9. C'est la *n-ième décimale de x après la virgule.* On a (par récurrence sur n) $a_n = a_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k 10^{-k}$ et, puisque x est la limite des a_k, il vient

$$x = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k 10^{-k}.$$

Cette expression s'appelle le *développement décimal propre* de x. On obtient alors l'*écriture décimale (infinie) de x* sous la forme

$$x = a_0, c_1 c_2 c_3 \ldots$$

b) Inversement, donnons-nous une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres entiers relatifs tels que pour $n \geqslant 1$ on ait $0 \leqslant c_n \leqslant 9$. La série (à termes positifs) de terme général $(c_k 10^{-k})_{k\geqslant 1}$ est convergente car majorée par la série géométrique $\sum 9\,10^{-k}$. Posons $x = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k 10^{-k}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, le nombre $q_n = \sum_{k=0}^{n} c_k 10^{n-k}$ est entier et l'on a

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} c_k 10^{n-k} \leqslant 9 \sum_{k=1}^{+\infty} 10^{-k} = 1.$$

Cette inégalité est stricte à moins que $c_k = 9$ pour tout $k > n$.

Distinguons deux cas :

- Si l'ensemble des k tels que $c_k \neq 9$ est infini, le développement décimal propre de x est

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k 10^{-k}.$$

- Supposons qu'à partir d'un certain rang, tous les c_k sont égaux à 9. Notons $m \in \mathbb{N}$ le plus petit entier tel que $c_k = 9$ pour tout $k > m$; posons $c'_k = c_k$ pour $k < m$ et $c'_m = 1 + c_m$. Le développement décimal propre de x est

$$x = \sum_{k=0}^{m} c'_k 10^{-k}.$$

Dans ce dernier cas, l'expression $x = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k 10^{-k} = \sum_{k=0}^{m} c_k 10^{-k} + \sum_{k=m+1}^{+\infty} 9.10^{-k}$ s'appelle le *développement décimal impropre* de x.

Une bijection. Notons $A = \mathbb{Z} \times \{0, \dots, 9\}^{\mathbb{N}^*}$ l'ensemble des suites $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres entiers relatifs tels que pour $n \geqslant 1$ on ait $0 \leqslant c_n \leqslant 9$. Notons aussi $A' \subset A$ l'ensemble des suites (c_n) comportant une infinité de termes distincts de 9. On a construit une application $f : \mathbb{R} \to A$ qui à $x \in \mathbb{R}$ associe son développement décimal propre, et une application $g : A \to \mathbb{R}$ donnée par $g\Big((c_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_k 10^{-k}$.

On a vu ci-dessus que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ (1.1.a) et que $f \circ g\Big((c_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big) = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A'$ (1.1.b). On en déduit que f et g induisent par restriction des bijections réciproques l'une de l'autre entre $\mathbb{R}$ et A'.

Théorème de Cantor. *Le corps $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que $[0; 1[$ n'est pas dénombrable.

Soit $f : \mathbb{N}^* \to [0, 1[$ une application. Définissons alors le réel $a = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ de la manière suivante :

- On chosit la première décimale a_1 de a dans l'ensemble $\{0, \dots, 8\}$ et distincte de la première décimale de $f(1)$; on a donc $a \neq f(1)$.
- On choisit ensuite a_2 dans l'ensemble $\{0, \dots, 8\}$ et distinct de la deuxième décimale de $f(2)$; donc $a \neq f(2)$.
- Plus généralement, on choisit la n-ième décimale a_n de a dans l'ensemble $\{0, \dots, 8\}$ et distincte de la n-ième décimale de $f(n)$; donc $a \neq f(n)$.

- Les décimales de a ne peuvent valoir 9, donc le développement $a = 0, a_1 a_2 \dots$ est le développement décimal propre de a. Comme $a \neq f(n)$ pour tout n l'application f n'est pas surjective. $\square$

Remarque : développement décimal des nombres strictement négatifs. Pour les nombres réels négatifs l'usage est d'écrire plutôt $x = -|x|$ où l'on développe $|x|$ dans son écriture décimale. Ainsi, le nombre $-\pi$ s'écrit $-3, 14159\dots$ plutôt que $(-4), 85840\dots$

1.2 Cas des nombres rationnels *cf.* [Per]

Soit a un nombre rationnel positif. Notons $a = \dfrac{p}{q}$ son *écriture irréductible*, *i.e.* avec p et q des nombres entiers premiers entre eux. Nous allons étudier le développement décimal de a : nous démontrerons qu'il est périodique et étudierons sa période en fonction du dénominateur q.

a) - Si les seuls diviseurs premiers de q sont 2 et 5, on écrit $q = 2^k 5^\ell$. Alors $10^m a \in \mathbb{N}$ où $m = \max(k, \ell)$, de sorte que a est un nombre décimal (avec m chiffres après la virgule).
   - Inversement, si a est décimal avec m chiffres après la virgule, on a $10^m a \in \mathbb{N}$, de sorte que $q | 10^m$ (puisque $\dfrac{p}{q}$ est l'écriture irréductible de $\dfrac{10^m a}{10^m}$), puis que q est de la forme $2^k 5^\ell$ avec $k \leqslant m$ et $\ell \leqslant m$. Enfin, si a possède exactement m chiffres après la virgule, $10^{m-1} a \notin \mathbb{N}$, donc $m = \max(k, \ell)$.

b) - Supposons que le dénominateur q est premier avec 10 et $q \neq 1$. Notons $p = dq + r$ la division euclidienne de p par q avec $1 \leqslant r \leqslant q - 1$. Notons que $r \neq 0$ puisque p et q sont premiers entre eux et $q > 1$.
   Comme q et 10 sont premiers entre eux, la classe de 10 est un élément du groupe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Notons k l'ordre de 10 dans ce groupe. Il en résulte que $10^k \equiv 1 \;\; [q]$, donc q divise $10^k - 1$. Ecrivons alors $10^k - 1 = bq$ et enfin
   $$a = d + \frac{br}{10^k - 1} = d + br \sum_{n=1}^{+\infty} 10^{-nk}.$$
   Remarquons que $br < bq = 10^k - 1$. Notons $br = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} c_j 10^{k-j}$ son développement décimal (autrement dit l'écriture décimale de l'entier br est $br = c_1 c_2 \dots c_k$). On a alors $a = d + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^{k} c_j 10^{-(nk+j)}$. Le développement décimal de a est donc $a = d + \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} c_j 10^{-j}$ où l'on a prolongé les c_j par périodicité, posant $c_{j+nk} = c_j$ (pour $n \in \mathbb{N}$ et $1 \leqslant j \leqslant k$). En d'autres termes, le développement décimal de a est $a = d, c_1 \dots c_k c_1 \dots c_k \dots$; il est périodique après la virgule, et k est un multiple de sa période.
   - Inversement, si le développement décimal d'un nombre réel a est périodique de période ℓ après la virgule, on a : $a = d, c_1 \dots c_\ell c_1 \dots c_\ell \dots$, c'est-à-dire :
   $$a = d + \sum_{j=1}^{+\infty} c_j 10^{-j} = d + \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^{\ell} c_j 10^{-(n\ell+j)} = d + \Big(\sum_{j=1}^{\ell} c_j 10^{\ell-j} \Big) \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} 10^{-n\ell} \Big).$$
   Enfin $a = d + \dfrac{u}{10^\ell - 1}$ où $u = \displaystyle\sum_{j=1}^{\ell} c_j 10^{\ell-j}$, donc l'écriture irréductible de a est $\dfrac{p}{q}$ où q est un diviseur de $10^\ell - 1$. En particulier 10 et q sont premiers entre eux et l'ordre de 10 dans le groupe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ divise ℓ.

c) Dans le cas général, on écrit $q = 2^k 5^\ell q'$ avec $q' > 1$ et premier avec 10. Posons $m = \max(k, \ell)$. Alors l'écriture irréductible de $10^m a$ est de la forme $\dfrac{p'}{q'}$ de sorte que l'écriture décimale de a est périodique à partir de la $m+1$-ème décimale après la virgule de période k où k est l'ordre de 10 dans le groupe $(\mathbb{Z}/q'\mathbb{Z})^*$.

On a donc démontré :

Théorème. • *Le développement décimal d'un nombre réel est fini ou périodique (à partir d'un certain rang) si et seulement s'il est rationnel.*

• *Soit* $a = \dfrac{p}{2^k 5^\ell q}$ *un nombre rationnel avec* $k, \ell \in \mathbb{N}$ *et* q *premier avec* $10p$. *Posons* $m = \max(k, \ell)$.

a) Le développement décimal de a *est fini si et seulement si* $q = 1$.

b) Si $q \neq 1$, *le développement décimal de* a *est périodique à partir du* $m+1$*-ème chiffre après la virgule et sa période est l'ordre de* 10 *dans le groupe* $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$.

□

Remarque. On peur remplacer le développement décimal par le développement en base b où b est un nombre entier $\geqslant 2$ quelconque. On pourra ainsi écrire :

- tout nombre entier positif A (de manière unique) sous la forme $A = \sum_{k=0}^{N} a_k b^k$ avec $N \in \mathbb{N}$ et, pour tout $i \in \{0, \ldots, N\}$, $a_i \in \{0, \ldots, b-1\}$; cette suite (a_i) s'appelle le développement en base b de l'entier A.
- tout nombre réel positif A comme somme d'une série $A = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b^{-k}$ avec $a_0 \in \mathbb{N}$ et, pour $i \geqslant 1$, $a_i \in \{0, \ldots, b-1\}$, avec unicité si l'on impose que l'ensemble des $i \in \mathbb{N}$ tels que $a_i \neq b-1$ est infini. La suite (a_i) s'appelle alors le développement en base b propre du nombre réel A.
- Le développement en base b d'un nombre réel est fini ou périodique (à partir d'un certain rang) si et seulement s'il est rationnel.
- Soit A un nombre rationnel et écrivons $A = \dfrac{p}{mq}$ où $p, m, q \in \mathbb{N}$ sont deux à deux premiers entre eux, q est premier avec b et m divise une puissance b^k de b.
  a) Le développement en base b de a est fini (*i.e.* $a_i = 0$ à partir d'un certain rang) si et seulement si $q = 1$.
  b) Si $q \neq 1$, le développement en base b de a est périodique à partir du rang $k+1$ et sa période est l'ordre de b dans le groupe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$.

Remarque. On a vu que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Soit π un nombre irrationnel. On en déduit que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, qui contient $\mathbb{Q} + \pi$, est dense dans $\mathbb{R}$.

L'ensemble $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes à coefficients rationnels est dénombrable. Chaque polynôme à un nombre fini de racines dans $\mathbb{C}$. On en déduit que l'ensemble A des éléments algébriques, réunion sur $P \in \mathbb{Q}[X]$ (non nul) de l'ensemble des racines de P est une partie dénombrable de $\mathbb{C}$. L'ensemble $A \cap \mathbb{R}$ des nombres réels algébriques est aussi dénombrable. Son complémentaire, l'ensemble des nombres transcendants n'est donc pas dénombrable.

Nous exhiberons en exercice des nombres transcendants (les nombres de *Liouville*).

1.3 Axiome de la borne supérieure

Rappelons que la relation binaire $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$, fondamentale en analyse, est une *relation d'ordre* ([1]) *total* ([2]).

Définition. Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
- On dit qu'un nombre réel x est un *majorant* de A ou qu'il *majore* A si pour tout $y \in A$, on a $y \leqslant x$. Si de plus $x \in A$, on dit que c'est le *plus grand élément* de A.
- La partie A est dite *majorée* s'il existe $x \in \mathbb{R}$ qui majore A.
- De même, on dit qu'un nombre réel x est un *minorant* de A ou qu'il *minore* A si pour tout $y \in A$, on a $y \geqslant x$. Si de plus $x \in A$, on dit que c'est le *plus petit élément* de A.
- La partie A est dite *minorée* s'il existe $x \in \mathbb{R}$ qui minore A.
- La partie A est dite *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée.

Axiome de la borne supérieure. Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. L'ensemble de ses majorants a un plus petit élément : c'est le *plus petit des majorants de A* qui s'appelle *borne supérieure* de A et se note $\sup A$.

De même, si A est une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$, elle possède un *plus grand minorant*, la *borne inférieure* de A qui se note $\inf A$.

Si A n'est pas majorée (*resp.* minorée) on pose $\sup A = +\infty$ (*resp.* $\inf A = -\infty$). On pose aussi $\sup \emptyset = -\infty$ et $\inf \emptyset = +\infty$.

1.4 Suites de nombres réels

Définition. Une *suite de nombres réels* est une application (d'une partie) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Cependant la notation est ici différente : l'image de l'élément $n \in \mathbb{N}$ par la suite se note x_n ou u_n, ou ... plutôt que $f(n)$. La suite elle même se note sous la forme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (plutôt que f). Par abus, il arrive qu'on note la suite juste $(u_n)_n$ voire (u_n).

On définit de même une suite d'éléments d'un ensemble X : c'est une application (d'une partie) de $\mathbb{N}$ dans X.

Pour ne pas alourdir les notations, toutes nos suites seront supposées définies sur $\mathbb{N}$.

Définition. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *majorée*, *minorée*, ou *bornée* si l'ensemble $\{u_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est.

Définition. On dit qu'une suite (u_n) de nombres réels *converge* vers un nombre ℓ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ satisfaisant $n \geqslant N$, on ait $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Dans ce cas, le nombre ℓ est uniquement déterminé par la limite (u_n) (*théorème d'unicité de la limite*). On l'appelle *limite* de la suite u_n et on le note $\lim(u_n)$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Lorsqu'une suite admet une limite, on dit qu'elle est *convergente.*

Proposition. *Toute suite convergente est bornée.*

1. C'est une relation (i) *réflexive* : $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $x \leqslant x$, (ii) *antisymétrique* : $\forall x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, alors $x = y$ et (iii) *transitive* : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$, alors $x \leqslant z$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$.

Opérations sur les limites. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes de nombres réels. Alors les suites $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et l'on a*

$$\lim_{n\to\infty}(u_n+v_n)=\Big(\lim_{n\to\infty}u_n\Big)+\Big(\lim_{n\to\infty}v_n\Big)\quad \textit{et}\quad \lim_{n\to\infty}(u_nv_n)=\Big(\lim_{n\to\infty}u_n\Big)\Big(\lim_{n\to\infty}v_n\Big).$$

Puisque de plus les suites constantes sont convergentes, on en déduit que l'ensemble des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de toutes les suites et que l'application qui à une suite convergente associe sa limite est linéaire.

Limites infinies. On dit qu'une suite (u_n) de nombres réels admet la limite $+\infty$ (*resp.* $-\infty$) si pour tout $M\in\mathbb{R}$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}$ satisfaisant $n\geqslant N$, on ait $u_n\geqslant M$ (*resp.* $u_n\leqslant M$).

Théorème d'encadrement (*ou* « théorème des gendarmes »). *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de nombres réels. On suppose que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $u_n\leqslant v_n\leqslant w_n$ et que les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ. Alors la suite (v_n) converge aussi vers ℓ.*

Suites monotones. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *croissante* si pour tout $m,n\in\mathbb{N}$, tels que $m\leqslant n$ on a $u_m\leqslant u_n$. Notons qu'il suffit de vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $u_n\leqslant u_{n+1}$ (par récurrence sur $n-m$). On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *décroissante* si pour tout $m,n\in\mathbb{N}$, tels que $m\leqslant n$ on a $u_m\geqslant u_n$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *monotone* si elle est croissante ou si elle est décroissante.

L'axiome de la borne supérieure se traduit par :

Théorème. *Toute suite monotone bornée converge :*
- *Toute suite croissante majorée converge vers sa borne supérieure.*
- *Toute suite décroissante minorée converge vers sa borne inférieure.*

En effet, soit (u_n) une suite croissante majorée et posons $\ell=\sup\{u_n;\ n\in\mathbb{N}\}$. Soit $\varepsilon>0$; alors $\ell-\varepsilon$ ne majore pas $\{u_n;\ n\in\mathbb{N}\}$, donc il existe n_0 tel que $u_{n_0}>\ell-\varepsilon$. Pour $n\geqslant n_0$, on a alors $\ell-\varepsilon<u_{n_0}\leqslant u_n\leqslant\ell$.

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites *adjacentes* si l'une est croissante, l'autre décroissante et leur différence converge vers 0.

Corollaire. *Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.*

Corollaire (Segments emboités). *Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments de $\mathbb{R}$ (des intervalles fermés bornés et non vides, i.e. de la forme $[a_n,b_n]$ avec $a_n\leqslant b_n$). On suppose que $I_{n+1}\subset I_n$ et que la longueur de I_n tend vers 0. Alors $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}I_n$ contient un et un seul point.*

Ce point est la limite commune de a_n et b_n.

Limite supérieure, limite inférieure. Soit (u_n) une suite bornée de nombres réels. Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $v_n=\inf\{u_k;\ k\geqslant n\}$ et $w_n=\sup\{u_k;\ k\geqslant n\}$. La suite (v_n) est croissante, la suite (w_n) décroissante et pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $v_n\leqslant w_n$.
La limite de la suite (v_n) s'appelle la *limite inférieure* de (u_n) et se note $\liminf(u_n)$; la limite de la suite (w_n) s'appelle la *limite supérieure* de (u_n) et se note $\limsup(u_n)$.

Proposition. *Une suite bornée de nombres réels converge si et seulement si sa limite supérieure et sa limite inférieure coïncident.*

En effet, on a $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ donc si la limite supérieure et sa limite inférieure coïncident, la suite (u_n) converge par le $t$héorème des gendarmes ≫.

Si (u_n) converge vers un nombre ℓ, il existe n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$ on ait $\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$. On aura alors, $\ell - \varepsilon \leqslant v_{n_0}$ et $w_{n_0} \leqslant \ell + \varepsilon$. Pour $n \geqslant n_0$, on aura $\boxed{\ell - \varepsilon \leqslant v_{n_0} \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant w_{n_0} \leqslant \ell + \varepsilon,}$ donc (v_n) et (w_n) convergent toutes deux vers ℓ.

Remarque. Si la suite (u_n) n'est pas majorée, on a $\sup\{u_k;\ k \geqslant n\} = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\limsup(u_n) = +\infty$ et $(u_n) \to +\infty$ si et seulement si $\liminf(u_n) = +\infty$. De même, si la suite (u_n) n'est pas minorée, on a $\inf\{u_k;\ k \geqslant n\} = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\liminf(u_n) = -\infty$ et $(u_n) \to -\infty$ si et seulement si $\limsup(u_n) = -\infty$.

Suites extraites. Soit (u_n) une suite et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. La suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ s'appelle une *suite extraite* de (u_n).

Une suite extraite d'une suite convergente, converge vers la même limite.

Théorème de Bolzano-Weierstrass. *De toute suite bornée de nombres réels, on peut extraire une suite convergente.*

On peut en fait assez facilement extraire une suite qui converge vers $\limsup(u_n)$. En effet :

(*) Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout ε, comme $w_m - \varepsilon$ ne majore pas $\{u_k,\ k \geqslant m\}$, il existe $k \geqslant m$ tel que $w_m - \varepsilon < u_k$. Alors $\boxed{w_k - \varepsilon \leqslant w_m - \varepsilon < u_k \leqslant w_k}$.

A l'aide de la propriété (*), on construit (par récurrence sur n) une application φ strictement croissante telle que pour tout n on ait $0 \leqslant w_{\varphi(n)} - u_{\varphi(n)} \leqslant 2^{-n}$. Alors, la suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers la même limite que $(w_{\varphi(n)})$, soit $\limsup(u_n)$.

On peut de même trouver une suite extraite de (u_n) qui converge vers $\liminf(u_n)$.

Suites de Cauchy. Une suite (u_n) est dite *de Cauchy* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour $p, q \geqslant n$, on ait $|u_p - u_q| \leqslant \varepsilon$.

Une suite convergente est clairement de Cauchy. La réciproque est vraie (parce que $\mathbb{R}$ est *complet*). En effet, si (u_n) est de Cauchy, $\Big(\sup\{u_k;\ k \geqslant n\} - \inf\{u_k;\ k \geqslant n\}\Big)$ tend vers 0. On a donc :

Critère de Cauchy. *Une suite de nombres réels est convergente (dans $\mathbb{R}$) si et seulement si elle est de Cauchy.*

Convergence d'une suite dans un espace métrique. Soient (X, d) un espace métrique et (x_n) une suite d'éléments de X. On dit que la suite (x_n) converge vers $\ell \in X$ si la suite de nombres réels $\big(d(x_n, \ell)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Nous reviendrons sur cette notion en topologie.

1.5 Exercices

1.1 Exercice. 1. Soit p un nombre premier. Démontrer que le développement décimal de $1/p$ est périodique de période 5 si et seulement si $p|11\,111$.

2. Soit p un diviseur premier de $11\,111$.

   a) Quel est l'ordre de la classe 10 dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$?

   b) En déduire que $p \equiv 1$ [10].

3. Quel est le plus petit nombre entier p tel que le développement décimal de $1/p$ soit périodique de période 5 ?

1.2 Exercice. Considérons le nombre $n = 142\,857$. On a $2n = 285\,714$, $3n = 428\,571$, $4n = 571\,428$, $5n = 714\,285$, $6n = 857\,142$. En d'autres termes, multiplier n par k pour $1 \leqslant k \leqslant 6$ fait tourner les décimales de n. On dira qu'on a des *multiplications magiques*. Enfin $7n = 999\,999$. Le but de cet exercice est de comprendre et généraliser ce fait.

Soit p un nombre premier. On suppose que 10 est un générateur du groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ - ce groupe est cyclique. Écrivons $\dfrac{10^{p-1}-1}{p} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p-1} a_j 10^{p-1-j}$ le développement décimal de l'entier $N = \dfrac{10^{p-1}-1}{p}\cdot$

1. Quel est le développement décimal du nombre entier pN ? Quel est le développement décimal du nombre rationnel $\dfrac{1}{p}$?
2. Soit k un nombre entier avec $1 \leqslant k \leqslant p-1$.
   a) Démontrer qu'il existe un unique nombre entier ℓ avec $0 \leqslant \ell \leqslant p-2$ tel que $10^\ell \equiv k \quad [p]$.
   b) Écrivons $10^\ell N = 10^{p-1}A + R$ la division euclidienne de $10^\ell N$ par 10^{p-1}. Quels sont les développement décimaux de A et R ?
   c) Démontrer que $kN = R + A$. Quel est son développement décimal ?
3. Le calcul des 16 premières décimales du nombre $1/17$ donnent $0,0588235294117647$.
   a) Quel est l'ordre de 10 dans $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^*$?
   b) Calculer de tête $2 \times 0588235294117647$ puis $3 \times 0588235294117647$, *etc.* jusqu'à $16 \times 0588235294117647$.

1.3 Exercice. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\delta(x) = \inf\{|x-n|\,;\ n \in \mathbb{Z}\}$ sa distance à $\mathbb{Z}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient $s_0, \ldots, s_{n+1} \in [0,1]$. Montrer qu'il existe des nombres entiers i et j satisfaisant $0 \leqslant i < j \leqslant n+1$ et $|s_i - s_j| \leqslant \dfrac{1}{n+1}\cdot$
2. Soient $t_0, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe des entiers i et j satisfaisant $0 \leqslant i < j \leqslant n$ et $\delta(t_i - t_j) \leqslant \dfrac{1}{n+1}\cdot$
3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ satisfaisant $1 \leqslant k \leqslant n$ et $\delta(kt) \leqslant \dfrac{1}{n+1}\cdot$
4. En déduire qu'il existe une suite de nombres rationnels p_n/q_n qui converge vers t et telle que $|t - p_n/q_n| < q_n^{-2}$.

1.4 Exercice. 1. Démontrer que la série de terme général $10^{-k!}$ est convergente.

Posons $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} 10^{-k!}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 10^{-k!}$.

2. Démontrer que $0 < S < 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $0 < S - a_n < 2.10^{-(n+1)!}$.
3. Soit P un polynôme non nul à coefficients entiers. Notons p son degré.
   a) Démontrer que pour tout n on a $10^{p.n!}P(a_n) \in \mathbb{Z}$.
   b) Démontrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout n on ait $|P(S) - P(a_n)| \leqslant M.10^{-(n+1)!}$.
   c) Démontrer que $P(S) \neq 0$ (on remarquera que, pour n assez grand, a_n n'est pas racine de P).
4. Démontrer que S est transcendant.

1.5 Exercice. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré d que l'on peut supposer irréductible. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ une racine de P. Soit $\frac{p_n}{q_n}$ une suite de rationnels qui tend vers x. Démontrer que la suite $q_n^d \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right|$ est bornée inférieurement (*on s'inspirera de l'exercice 1.4*). Exhiber d'autres nombres transcendants.

1.6 Exercice. On définit une suite (u_n) en posant $u_0 = a \in \mathbb{C}$ et $u_{n+1} = u_n^{10}$.

1. Décrire la suite u_n.
2. On suppose $|a| \neq 1$. Discuter selon la valeur de a le comportement de cette suite.
3. On suppose ici que $|a| = 1$. On écrit $a = e^{2i\pi\theta}$ où $\theta \in [0, 1[$. On note $\theta_n = \dfrac{\arg u_n}{2\pi}$ (l'argument étant pris dans $[0, 2\pi[$).
   a) Exprimer θ_n en fonction du développement décimal de θ.
   b) Pour quelles valeurs de θ la suite (u_n) est-elle constante ?
   c) Pour quelles valeurs de θ la suite (u_n) prend-elle un nombre fini de valeurs ?
   d) Pour quelles valeurs de θ la suite (u_n) converge-t-elle ?
   e) (*) Construire θ tel que $\{u_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans le cercle unité de $\mathbb{C}$.

1.7 Exercice. (Variante) Étudier l'application $f : [0, 1[\to [0, 1[$ donnée par $f(x) = 10x - E(10x)$ et les suites récurrentes (u_n) données par un point $u_0 \in [0, 1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Décrire l'application f en termes de développement décimal.
2. Quels sont les points fixes de f ?
3. Pour quelles valeurs de u_0 cette suite stationne-t-elle ?
4. Pour quelles valeurs de u_0 cette suite converge-t-elle ?
5. Pour quelles valeurs de u_0 cette suite est-elle périodique ? Pour lesquelles devient-elle périodique à partir d'un certain rang ?
6. Construire un u_0 pour lequel $\{u_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans $[0, 1]$.

1.8 Exercice. Soient (u_n) une suite convergente et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application injective. Démontrer que la suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers la même limite.

1.9 Exercice. (Cesàro généralisé). Soit (v_n) une suite croissante de nombres réels non nuls telle que $\lim v_n = +\infty$. Soit (u_n) admettant une limite $\ell \in [-\infty, +\infty]$.

Démontrer que la suite (w_n) définie par $w_n = \dfrac{1}{v_n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k (v_k - v_{k-1})$ admet la même limite.

1.10 Exercice. Soit (u_n) une suite de nombres réels telle que pour tout $n, m \in \mathbb{R}$ on ait $u_{n+m} \leqslant u_n + u_m$. Démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$ tend vers $\inf \left\{\dfrac{u_n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

1.11 Exercice. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $0 < b < a$. On définit les suites (a_n) et (b_n) par récurrence en posant $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$. Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

1.12 Exercice.

1. Soit (u_n) une suite de nombres réels. On suppose que $u_{n+1} - u_n \to 0$. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est un intervalle.
2. Soient (X, d) un espace métrique compact et (u_n) une suite d'éléments de X telle que l'on ait $d(u_n, u_{n+1}) \to 0$. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est connexe.
3. Est-ce que l'ensemble des valeurs d'adhérence de toute suite (u_n) d'éléments de $\mathbb{R}^2$ telle que $\|u_n - u_{n+1}\| \to 0$ est connexe ?

2 Approximation

Références pour ce chapitre : on trouve beaucoup de choses dans les classiques ([L M, L-F A, M Ana, RDO] *etc.*). Voir aussi [Dem]. Pour les approximations de π, voir [Del, E L].

2.1 Rapidité de convergence

Un nombre réel est donc défini comme une limite de suite. On peut cependant essayer de bien choisir une suite convergeant vers un nombre réel donné...

Pour cela on introduit la notion de *rapidité de convergence.*

Définition. Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de nombres réels. Notons x et y leurs limites respectives. On dit que (v_n) converge plus vite que (u_n) si $(v_n - y) = o(u_n - x)$, c'est à dire si $\lim \dfrac{v_n - y}{u_n - x} = 0$.

Plus une suite convergera rapidement, meilleure sera l'approximation qu'elle donne. Notons cependant qu'il faut ternir compte d'une deuxième donnée : la quantité de calculs que représente l'évaluation de (u_n). Par exemple, on pourrait trouver artificiellement une suite (v_n) qui converge *a priori* plus vite que la suite u_n en posant $v_n = u_{2n}$ voire $v_n = u_{2^n}$...

Dans les exercices, nous étudierons des suites convergent vers e, vers π, et comparerons leurs vitesses de convergence.

La comparaison avec les suites géométriques donne :

Définition. Soit (u_n) une suite convergente de nombres réels ; notons x sa limite. Si la suite $\left(\dfrac{u_{n+1} - x}{u_n - x}\right)$ converge vers un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$, alors ce nombre λ s'appelle *coefficient de convergence* de la suite. Dans ce cas :
- Si $|\lambda| = 1$ on dira que la convergence de la suite (u_n) vers x est *lente.*
- Si $0 < |\lambda| < 1$ on dira que la convergence de la suite (u_n) vers x est *géométrique* (d'ordre λ).
- Si $\lambda = 0$ on dira que la convergence de la suite (u_n) vers x est *rapide.*

On vérifie aisément que la convergence est d'autant plus rapide (au sens de la définition 2.1) que le coefficient de convergence $|\lambda|$ est petit.

2.2 Accélération de convergence

Le principe de l'accélération de convergence est, étant donnée une suite convergente (u_n), d'essayer de fabriquer une suite (v_n) qui se calcule facilement à partir de la suite (u_n) et qui converge plus vite que (u_n) vers la même limite.

Accélération au moyen d'un équivalent. Notons x la limite. Si on connait un équivalent simple de $(x - u_n)$, il suffit de l'ajouter à u_n... Par exemple, si on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, de limite $\dfrac{\pi^2}{6}$, on a $\dfrac{\pi^2}{6} - u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Écrivant $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{k(k+1)} \leqslant \dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$, il vient $\dfrac{\pi^2}{6} - u_n \sim \dfrac{1}{n}$.

En posant $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$, on aura accéléré la convergence.

NB. Dans certains cas, un développement limité, nous permettra d'accélérer encore plus la convergence.

Accélération de Richardson-Romberg. Si la convergence de (u_n) vers x est géométrique d'ordre λ avec $\lambda \in]-1,0[\cup]0,1[$, on posera $v_n = \dfrac{u_{n+1}-\lambda u_n}{1-\lambda}$. Notons que cela marche aussi pour $\lambda=-1$ (et aussi, pour $\lambda=0$, mais cela n'a aucun intérêt...).

Dans plusieurs exemples importants (que l'on rencontre dans des suites récurrentes ou des évaluations d'intégrales), la suite (v_n) ainsi construite converge aussi géométriquement avec un ordre plus petit. On pourra alors répéter cette méthode.

Par exemple, si $u_n = x + a_1\lambda_1^n + a_2\lambda_2^n + o(\lambda_2^n)$ où $|\lambda_2| < |\lambda_1| < 1$, on va poser $v_n = \dfrac{u_{n+1}-\lambda_1 u_n}{1-\lambda_1}$, puis $w_n = \dfrac{v_{n+1}-\lambda_2 v_n}{1-\lambda_2}$ et on aura $x - w_n = o(\lambda_2^n)$ (on remarque que, si a_1 et a_2 sont non nuls, (u_n) est géométrique d'ordre λ_1 et (v_n) est géométrique d'ordre λ_2).

Méthode d'Aitken. Il arrive que l'on sache que la convergence est géométrique mais qu'on ne connaisse pas l'ordre λ : c'est souvent le cas pour les suites récurrentes. Dans ce cas, on remplace λ par $\dfrac{u_{n+2}-u_{n+1}}{u_{n+1}-u_n}$ qui converge vers λ. Ainsi, on va poser $v_n = \dfrac{u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2}{u_n + u_{n+2} - 2u_{n+1}}$.

2.3 Suites données par une formule de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ une application. Soit $u_0 \in I$ On pose $u_n = f^n(u_0)$.

Rappelons deux faits importants :

Proposition. *Si (u_n) converge vers $x \in I$ et f est continue en x, alors $f(x) = x$.*

Théorème du point fixe. *Toute application contractante f d'un espace métrique* complet *X non vide dans lui-même admet un unique point fixe. Pour tout $u \in X$, la suite $(f^n(u))$ converge vers cet unique point fixe.*

Rappelons que f est dite contractante s'il existe $k \in [0,1[$ tel que l'on ait $d(f(x), f(y)) \leqslant kd(x,y)$ pour tous $x, y \in X$.

Dans le cas d'une fonction f dérivable définie sur un intervalle I, remarquons que f est contractante, si et seulement s'il existe $k \in [0,1[$ tel que pour tout $x \in I$ on ait $|f'(x)| \leqslant k$ (on utilise le théorème des accroissements finis).

Enfin, si $f : I \to I$ et si une suite (u_n) vérifie la formule de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et converge vers un point x sans être stationnaire et f est dérivable en x, alors $\dfrac{u_{n+1}-x}{u_n-x} \to f'(x)$. En particulier, $|f'(x)| \leqslant 1$, et si $|f'(x)| \neq 1$, on pourra donc appliquer les méthodes d'accélération de convergence vues ci-dessus. Notons qu'*a priori* on ne connait pas $f'(x)$ puisqu'on ne connait pas x... On appliquera alors la méthode d'Aitken.

2.4 Solution d'une équation $g(x) = 0$

Enfin cherchons à approcher une solution ℓ d'une équation $g(x) = 0$.

Dichotomie. Si $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue et $g(a),\ g(b)$ sont de signes opposés, alors par le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule sur $[a,b]$. Pour localiser un zéro de g, on pourra procéder par dichotomie : on considérera le signe de $g((a+b)/2)$; en fonction de ce signe, on saura s'il y a un point ℓ où g s'annule dans $[a,(a+b)/2]$ ou dans $[(a+b)/2, b]$. Ainsi, on aura divisé l'incertitude sur ℓ par 2... et on continue.

En pratique, on pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Si a_n et b_n sont construits $g(a_n)g(b_n) \leqslant 0$, on construit a_{n+1} et b_{n+1} de la manière suivante : posons $c_n = (a_n + b_n)/2$; si $g(a_n)g(c_n) \leqslant 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$; si $g(a_n)g(c_n) > 0$, alors $g(b_n)g(c_n) \leqslant 0$ et l'on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$. Dans tous les cas, on a $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$, $b_{n+1} - a_{n+1} = (b_n - a_n)/2$ et $g(a_{n+1})g(b_{n+1}) \leqslant 0$. Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et g s'annule en leur limite commune.

Méthode de la sécante. Si g est plus régulière, au moins de classe C^1, on peut sur un petit intervalle l'assimiler à une fonction affine. Ainsi, si on a deux points a et b proches tels que $g(a)/g(b)$ loin de 1, on s'approchera d'une solution ℓ de $g(x) = 0$ en se basant sur la sécante : on posera $c = \dfrac{ag(b) - bg(a)}{g(b) - g(a)}$.

Retour sur les suites récurrentes. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et posons $f(x) = x + \alpha g(x)$. On remarque alors que $g(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = x$. On sera amené à considérer une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour que la méthode soit efficace, on choisira α de sorte à ce que $|f'|$ soit la plus petite possible - du moins autour du point ℓ cherché, soit $1 + \alpha g'(\ell)$ petit. Idéalement $\alpha = -\dfrac{1}{g'(\ell)}$.

Méthode de Newton. Le calcul ci-dessus, nous incite à poser $f(x) = x - \dfrac{g(x)}{g'(x)}$. Le point ainsi défini est l'abscisse de l'intersection de la tangente en x au graphe de g avec l'axe des x. Si g est de classe C^2 et g' ne s'annule pas, alors f est de classe C^1 et l'on a $f'(x) = 1 - \dfrac{g'(x)^2 - g(x)g''(x)}{g'(x)^2} = \dfrac{g(x)g''(x)}{g'(x)^2}$.
En particulier, $f'(\ell) = 0$; donc une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ avec u_0 suffisamment proche de ℓ va converger rapidement vers ℓ. Elle sera (au moins) quadratique : avec un développement limité, on voit que la suite $\dfrac{u_{n+1} - \ell}{(\ell - u_n)^2}$ a une limite finie $\dfrac{g''(\ell)}{2g'(\ell)}$, donc, si cette limite n'est pas nulle, $u_{n+1} - \ell$ est du même ordre que $(\ell - u_n)^2$: le nombre de décimales exactes de u_n double (en gros) à chaque nouvelle étape.

Remarque. Si g est convexe, en partant d'un point u_0 tel que $g(u_0) > 0$, la méthode de Newton va donner une suite $f^n(u_0)$ qui converge toujours (car monotone). De même si g est concave et $g(u_0) < 0$. Notons cependant que si $g''(\ell) = 0$, la convergence sera cubique (à condition que g soit suffisamment régulière - de classe C^3, et que l'on parte de u_0 suffisamment proche de ℓ) : le nombre de décimales exactes de u_n triplera (en gros) à chaque nouvelle étape. Dans ce cas, $\dfrac{u_{n+1} - \ell}{(\ell - u_n)^3}$ tend vers $\dfrac{g'''(\ell)}{3g'(\ell)}$.

Notons cependant que toutes ces méthodes ne marchent pas bien si $|g'|$ est trop petit, et en particulier si $g'(\ell) = 0$. Pour appliquer ce type de méthodes, il faut commencer par éliminer les points où g et g' s'annulent simultanément. En particulier, si g est un polynôme, on « chassera » les racines multiples en regardant les racines de $PGCD(g, g')$.

2.5 Exercices

2.1 Exercice. Posons $u_0 = 2$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n}$. Démonter que la suite u_n converge vers $\sqrt{2}$. Démontrer que $u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$; en déduire une majoration de $u_n - \sqrt{2}$. Combien de termes de la suite doit on utiliser pour approcher $\sqrt{2}$ avec 100 décimales ?

Questions subsidiaires :
- Quelle est ici la méthode utilisée pour approcher $\sqrt{2}$?
- Approcher de même $a^{1/b}$ où $a, b \in \mathbb{N}^*$ $(a, b \geqslant 2)$.

2.2 Exercice. On considère les suites $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ qui convergent vers e. Donner un équivalent de $e - u_n$ et de $e - v_n$. Quelle suite utiliseriez-vous pour approcher e ? Comment accélérer la convergence de u_n vers e ?

2.3 Exercice.

1. Démontrer qu'il existe un et un seul $a \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos a$.
   On veut approcher a. On définit la suite (u_n) en posant $u_0 = 1$ et, pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \cos u_n$.
2. Démonter que la suite (u_n) converge vers a et que les suites u_{2n} est (u_{2n+1}) sont adjacentes.
3. Démontrer que $|u_n - a| < (\sin 1)^n$.
4. Calculer u_1, u_2, u_3 et $\sin u_1$. Sachant que $\sin u_1 \geqslant 1/2$ et $u_3 - u_1 \geqslant 1/10$, démontrer que, pour $n \geqslant 1$, on a $|a - u_{n+1}| \geqslant \dfrac{1}{10 \times 2^n}\cdot$
5. Combien de termes doit on calculer pour approcher a à 10^{-10} près.
6. Peut-on accélérer cette convergence ?

2.4 Exercice. On approche le cercle de rayon 1 par un polygone régulier à n côtés ($n \geqslant 2$). On note a_n l'aire de ce polygone et b_n sa demi-circonférence.

1. Exprimer a_n, b_n à l'aide d'un sinus.
2. On pose $c_n = \cos \dfrac{\pi}{n}$. Exprimer a_{2n}, b_{2n}, c_{2n} en fonction de a_n, b_n, c_n. En déduire des méthodes d'approximations de π.

2.5 Exercice. (Fractions continues. *cf.* Poly d'algèbre exercice 1.7.)

1. Soit $(q_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres entiers strictement positifs. On définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, et, pour $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n q_n$ et $b_{n+1} = b_{n-1} + b_n q_n$.
   a) Quelle est la limite de la suite b_n ?
   b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} \\ b_n & b_{n+1} \end{pmatrix}.$$
   En déduire que l'on a $a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Dans la suite, on notera $\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = [q_1, ..., q_n]$.
   c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'écriture en « fraction continue » :
   $$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots \, q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}}$$
   Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $y_n = \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\cdot$
   d) Démontrer que les suites (y_{2n+1}) et (y_{2n}) sont adjacentes. En déduire que la suite (y_n) converge.
   e) Soit x la limite de la suite y_n. Démontrer que $0 < |x - y_n| < \dfrac{1}{q_n q_{n+1}}\cdot$
   f) Démontrer que $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

2. Soit $x \in \mathbb{Q} \cap]0,1[$. On veut démontrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, et $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{N}^*$. On écrit $x = \frac{a}{b}$ où a et b sont de entiers positifs premiers entre eux. On raisonne par récurrence « forte » sur p.
   a) Traiter le cas $a = 1$ (*i.e.* si $\frac{1}{x}$ est entier).
   b) Si $\frac{1}{x}$ n'est pas entier, on note $q_1 = \left[\frac{1}{x}\right]$ la partie entière de $\frac{1}{x}$ et $x_1 = \frac{1}{x} - q_1$. Démontrer que $x_1 = \frac{a_1}{b_1}$ avec $a_1 < a$ et conclure.
3. On suppose désormais que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
   a) Démontrer que l'on peut définit une suite (q_n) d'entiers $\geqslant 1$ et une suite $x_n \in \mathbb{R}_+$ en posant $x_0 = x$ et$q_1 = [x]$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $q_{n+1} = \left[\frac{1}{x}\right]$ et $x_{n+1} = \frac{1}{x_n} - q_{n+1}$.
   b) Démontrer que $([q_1, \dots, q_n])_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x.

2.6 Exercice. 1. Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

2. Combien faut il de termes pour obtenir une approximation de π à 10^{-6} près ?
3. On pose $v_n = \displaystyle\sum_{k=2n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \frac{1}{8n}$ et $w_n = \displaystyle\sum_{k=2n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \frac{1}{8n+1}$; étudier le sens de variation de ces suites et en déduire un encadrement de π. Combien de termes faut il utiliser maintenant pour obtenir une approximation de π à 10^{-6} près ?
4. Démontrer que l'on a $\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$ (formule de Machin). En déduire une méthode d'approximation de π. Combien de termes faudra-t-il utiliser pour obtenir une approximation de π à 10^{-6} près ?
5. Faire de même grâce à la formule

$$\frac{\pi}{4} = 44 \operatorname{Arctan} \frac{1}{57} + 7 \operatorname{Arctan} \frac{1}{239} - 12 \operatorname{Arctan} \frac{1}{682} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{12943}.$$

2.7 Exercice. Soient $b \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ une application continue. On suppose que $f(0) = 0$ et que pour $x > 0$ on a $0 < f(x) < x$. On définit la suite u_n en posant $u_0 = b$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer que la suite (u_n) converge vers 0.
   On suppose que f admet un développement limité $f(x) = x - ax^p + o(x^p)$ en 0, où $a > 0$ et $p > 1$.
2. De quelle type de convergence s'agit-il ?
3. Calculer la limite de $f(x)^{1-p} - x^{1-p}$ lorsque $x \to 0$.
4. En déduire un équivalent de u_n^{1-p} puis de u_n.
5. Exemples : on prend $u_0 = v_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sin u_n$, $v_{n+1} = \frac{v_n}{1+v_n}$. Donner un équivalent de u_n et de v_n.

3 Topologie des espaces métriques

Biblio pour ce chapitre : les classiques ([L M, L-F A, M Ana, RDO] *etc.*). Je me suis un peu servi de [Sk]...

3.1 Définitions et propriétés

3.1.1 Définitions

Définition. Soit X un ensemble. Une *distance* sur X est une application de $X \times X$ dans $\mathbb{R}_+$ qui vérifie les trois propriétés suivantes

a) Pour tous $x, y \in X$, on a $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

b) Pour tous $x, y \in X$, on a $d(x, y) = d(y, x)$.

c) Pour tous $x, y, z \in X$, on a $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

Un *espace métrique* est un ensemble muni d'une distance - c'est donc un couple (X, d) où X est un ensemble et d une distance sur X.

3.1.2 Exemples d'espaces métriques

Espaces normés. Rappelons qu'une *norme* sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est une application $N : E \to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :

a) Pour tout $x \in E$, on a $N(x) = 0 \iff x = 0$.

b) Pour tous $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.

c) Pour tous $x, y \in E$, on a $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

Un espace vectoriel normé (E, N) est un espace métrique pour la distance $(x, y) \mapsto N(x - y)$.

Sous-espace. Remarquons que toute partie d'un espace métrique est un espace métrique.

3.1.3 Propriétés des distances

Distance à une partie. Soient (X, d) un espace métrique, $x \in X$ et A une partie non vide de X. On appelle distance de x à A et le nombre réel $d(x, A) = \inf\{d(x, y);\ y \in A\}$. On pose parfois $d(x, \emptyset) = +\infty$.

Diamètre. Soient (X, d) un espace métrique et A une partie non vide de X. Le diamètre de A est la quantité $\sup\{d(x, y);\ (x, y) \in A \times A\} \in [0, +\infty]$. Par convention le diamètre de l'ensemble vide est 0.

Boule ouverte, boule fermée. Soient (X, d) un espace métrique, $x \in X$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$; la boule ouverte (*resp.* fermée) de centre x et de rayon r est l'ensemble $\mathring{B}(x, r) = \{y \in X;\ d(x, y) < r\}$ (*resp.* $\overline{B}(x, r) = \{y \in X;\ d(x, y) \leqslant r\}$).

3.1.4 Notions topologiques

Limite d'une suite. On dit qu'une suite (x_n) de points de X tend vers $\ell \in X$ si et seulement si la suite de nombres réels $(d(x_n, \ell))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

Voisinage. Soient (X, d) un espace métrique et $x \in X$. Un voisinage de x dans X est une partie de X qui contient une boule ouverte centrée en x.

Ouvert. Soit (X, d) un espace métrique. Une partie de X est dite ouverte si c'est un voisinage de chacun de ses points.

Fermé. Soit (X, d) un espace métrique. Une partie de X est dite fermée si son complémentaire est ouvert.

Intérieur, adhérence. Soit (X, d) un espace métrique et soit A une partie de X.
- La réunion de tous les ouverts de X contenus dans A s'appelle l'intérieur de A et se note $\mathring{A}$. C'est le plus grand ouvert de X contenu dans A.
- L'intersection de tous les fermés de X contenant A s'appelle l'adhérence de A et se note $\overline{A}$. C'est le plus petit fermé de X contenant A.
- On dit que A est *dense* dans X si $\overline{A} = X$.
- L'ensemble $\overline{A} \setminus \mathring{A}$ s'appelle la *frontière* de A.

Application continue. Soient (X, d) et (X', d') des espaces métriques et $f : X \to X'$ une application. On dit que l'application f est continue en un point $a \in X$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que pour $x \in X$ on ait $d(a, x) < \alpha \Rightarrow d'(f(a), f(x)) < \varepsilon$.
On dit que l'application f est continue si elle est continue en tout point de X.

Homéomorphisme. Une application $f : X \to X'$ est un homéomorphisme si elle est bijective et si f et f^{-1} sont continues.

Propriétés des voisinages. *a) Une partie de X est un voisinage de x si et seulement si elle contient une boule fermée centrée en x (de rayon > 0).*

b) Toute partie contenant un voisinage de x est un voisinage de x.

c) L'intersection de deux (d'un nombre fini de) voisinages de x est un voisinage de x.

Propriétés des ouverts. *a) Une réunion quelconque d'ouverts est ouverte.*

b) L'intersection de deux (d'un nombre fini d') ouverts est ouverte.

c) Une boule ouverte est ouverte. Les ouverts de X sont les réunions de boules ouvertes.

Propriétés des fermés. *a) Une intersection quelconque de fermés est fermée.*

b) La réunion de deux (d'un nombre fini de) fermés est fermée.

c) Une boule fermée est fermée.

Soit A une partie de X.

Caractérisation de l'intérieur. *Pour $x \in X$, on a $x \in \mathring{A} \iff A$ est un voisinage de x.*

Caractérisation de l'adhérence. *Pour $x \in X$, on a l'équivalence*

(i) $x \in \overline{A}$;

(ii) il existe une suite de points de A convergeant vers x ;

(iii) $d(x, A) = 0$;

(iv) tout voisinage de x a une intersection non vide avec A.

Caractérisation de la continuité en un point. *Les conditions suivantes sont équivalentes pour une application $f : X \to X'$ et $a \in X$:*

(i) L'application f est continue en a ;

(ii) l'image inverse par f de tout voisinage de $f(a)$ est un voisinage de a ;

(iii) pour toute suite (x_n) dans X convergeant vers a la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.

Caractérisation de la continuité. *Les conditions suivantes sont équivalentes pour une application $f : X \to X'$:*

(i) L'application f est continue ;

(ii) l'image inverse par f de tout ouvert de X' est un ouvert de X ;

(iii) l'image inverse par f de tout fermé de X' est un fermé de X.

(iv) pour toute suite convergente (x_n) dans X, la suite $(f(x_n))$ est convergente dans X'.

3.1.5 Propriétés métriques

Ces propriétés dépendent de la distance, pas seulement de la topologie...

Application uniformément continue. Soient (X, d) et (X', d') des espaces métriques et $f : X \to X'$ une application. On dit que l'application f est uniformément continue si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous $x, y \in X$ on ait $d(x, y) < \alpha \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Application lipschitzienne. Soient (X, d) et (X', d') des espaces métriques, $k \in \mathbb{R}_+$ et $f : X \to X'$ une application. On dit que l'application f est *lipschitzienne* de rapport k si pour tous $x, y \in X$ on a $d'(f(x), f(y)) \leqslant k\, d(x, y)$.

Proposition. *Une application uniformément continue est continue. Une application lipschitzienne est uniformément continue.*

3.1.6 Comparaison de distances

Soient d et d' deux distances sur X.

- Les distances d et d' sont dites *topologiquement équivalentes* si l'identité de X est un homéomorphisme de (X, d) sur (X, d').
- Les distances d et d' sont dites *uniformément équivalentes* si l'identité de X est uniformément continue de (X, d) sur (X, d') et de (X, d') sur (X, d).
- Les distances d et d' sont dites *équivalentes* si l'identité de X est lipschitzienne de (X, d) sur (X, d') et de (X, d') sur (X, d).

3.1.7 Produits finis d'espaces métriques

Soient (X, d) et (X', d') des espaces métriques. Les applications

$$\begin{array}{rcl} ((x, x'), (y, y')) & \mapsto & \max\{d(x, y), d'(x', y')\} \\ ((x, x'), (y, y')) & \mapsto & d(x, y) + d'(x', y') \\ ((x, x'), (y, y')) & \mapsto & \sqrt{d(x, y)^2 + d'(x', y')^2} \end{array}$$

sont des distances sur $X \times X'$; elles sont équivalentes.

3.2 Les grandes notions de topologie

3.2.1 Compacité

Définition. Un espace métrique (X, d) est dit *compact* si de toute suite de points de X on peut extraire une suite convergente.

Parties compactes. Une partie compacte d'un espace métrique est fermée. Une partie d'un espace métrique compact est compacte si et seulement si elle est fermée.

Produit de compacts. Le produit de deux (d'un nombre fini d') espaces métriques compacts est compact.

Parties compactes de $\mathbb{R}^n$. Les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés (Bolzano-Weierstrass).

Applications continues. L'image d'un espace compact par une application continue est compacte. L'image d'un compact non vide par une application continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Théorème de Heine. *Une application continue définie sur un compact est uniformément continue.*

3.2.2 Espaces métriques connexes.

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition. On dit que X est connexe si toute partie de X à la fois ouverte et fermée est vide ou égale à X.

Caractérisation. L'espace X est connexe si toute application continue de X dans $\{0, 1\}$ est constante.

Parties connexes. Une partie A de X est un espace métrique ; donc cela a un sens de dire si A connexe ou non.

Réunion de connexes. La réunion d'une famille de parties connexes de X d'intersection non vide est connexe.

Composante connexe. Soit $x \in X$. La réunion de toutes les parties connexes de X contenant x est le plus grand connexe contenant x. On l'appelle la composante connexe de x (dans X). Les composantes connexes forment une *partition* de X.

Proposition. *Tout produit d'espaces connexes est connexe.*

Théorème. *Tout intervalle est connexe.*

On en déduit que les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Théorème. *L'image d'un espace connexe par une application continue est connexe.*

On en déduit le **théorème des valeurs intermédiaires**.

Connexité par arcs. On dit que X est connexe par arcs si deux points de X peuvent être joints par un chemin continu, *i.e.* si pour tous $x, y \in X$, il existe une application continue $f : [0, 1] \to X$ telle que $f(0) = x$ et $f(1) = y$.
Tout espace métrique connexe par arcs est connexe. Un ouvert connexe d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs.

3.2.3 Espaces métriques complets.

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition (Suite de Cauchy)**.** Une suite (u_n) dans X est dite *de Cauchy* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour $p, q \geqslant n$, on ait $d(u_p, u_q) \leqslant \varepsilon$.

Définition. On dit que l'espace métrique (X, d) est complet si toute suite de Cauchy de X est convergente.

Parties complètes. Une partie complète d'un espace métrique est fermée. Une partie d'un espace métrique complet est complète si et seulement si elle est fermée.

Exemples. Les espaces métriques $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets. Un espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

Théorème du point fixe. Une application $f : X \to X$ est dite *contractante* si elle est lipschitzienne de rapport k pour un certain $k < 1$.

Théorème du point fixe. *Si X est un espace métrique* complet *non vide, toute application contractante f de X dans X admet un unique point fixe. Pour tout $x \in X$, la suite récurrente (x_n) définie par $x_n = f^n(x)$ converge vers le point fixe de f.*

3.3 Exercices

3.3.1 Espaces métriques

3.1 Exercice. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante telle que $f(0) = 0$ et, pour tous $s, t \in \mathbb{R}_+$, $f(s + t) \leqslant f(s) + f(t)$.

1. On suppose qu'il existe $s > 0$ tel que $f(s) = 0$. Montrer que f est nulle sur $\mathbb{R}_+$.
2. On suppose que f n'est pas nulle. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que l'application $(x, y) \mapsto f\big(d(x, y)\big)$ est une distance sur X.
3. Vérifier que les applications suivantes satisfont les hypothèses faites sur f :
   • $0 \mapsto 0$ et $t \mapsto 1$ si $t > 0$; • $t \mapsto t^\alpha$ avec $\alpha \in \,]0, 1[$; • $t \mapsto \min(t, 1)$; • $t \mapsto \dfrac{t}{t+1}\cdot$
4. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante, continue, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $g(0) = 0$. On suppose que g' est décroissante. Montrer que g vérifie les hypothèses faites sur f.

3.2 Exercice. Soit F une partie fermée de $\mathbb{R}$.

1. On suppose que F est non vide et majorée. Montrer que $\sup F \in F$.
2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus F$. Montrer qu'il existe $a \in F \cup \{-\infty\}$ et $b \in F \cup \{+\infty\}$ tels que $a < x < b$ et $]a, b[\subset \mathbb{R} \setminus F$.
   Soient (E, N) un espace vectoriel normé et $f : F \to E$ une application continue.
3. Montrer qu'il existe une application $g : \mathbb{R} \to E$ qui prolonge f et qui est affine sur tout intervalle $[a, b]$ tel que $]a, b[\subset \mathbb{R} \setminus F$.
4. Montrer qu'une telle application g est continue.

3.3.2 Espaces métriques compacts

3.3 Exercice. Soient K une partie compacte non vide d'un espace métrique (X, d) et U une partie ouverte de X contenant K. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in X$, on ait l'implication $d(x, K) < r \Rightarrow x \in U$. *Considérer l'application $x \mapsto d(x, X \setminus U)$ définie sur K.*

3.4 Exercice. Soient E un espace vectoriel normé et A, B des parties de E. On pose $A+B = \{x+y; x \in A,\ y \in B\}$.

1. On suppose que A et B sont compactes. Montrer que $A + B$ est compacte.
2. On suppose que A est compacte et que B est fermée dans E. Montrer que $A + B$ est fermée dans E.

3.5 Exercice. Soient (X, d) un espace métrique compact et W une partie ouverte de $X \times X$ contenant la diagonale $\{(x, x); x \in X\}$ de X. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $(x, y) \in X \times X$, on ait l'implication $d(x, y) < r \Rightarrow (x, y) \in W$.

3.6 Exercice. Soient X un espace métrique, Y un espace métrique compact et $f : X \to Y$ une application dont le graphe $G \subset X \times Y$ (c'est-à-dire l'ensemble $\{\big(x, f(x)\big); x \in X\}$) est fermé dans $X \times Y$. Montrer que f est continue.

3.7 Exercice. On dit qu'un espace métrique X est *précompact* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un suite finie $(x_1, \ldots, x_n)$ de points de X telle que $X = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} B(x, \varepsilon)$.

1. a) Soit (X, d) un espace métrique qui n'est pas précompact. Démontrer qu'il existe $r > 0$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de X telle que, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, avec $n \neq m$, on ait $d(x_n, x_m) > r$.
   b) Démontrer que tout espace métrique compact est précompact.
2. Démontrer inversement que tout espace métrique précompact et complet est compact.

3.8 Exercice. Soit (X, d) un espace métrique.

1. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans X, non convergente. Montrer que, pour tout x la suite $\big(d(x, x_n)\big)$ est convergente vers un nombre $g(x) \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que l'application $x \mapsto g(x)^{-1}$ est continue de X dans $\mathbb{R}$ et n'est pas bornée.
2. On suppose que X n'est pas précompact (exerc 3.7). Soient alors $r > 0$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de X telle que, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, avec $n \neq m$, on ait $d(x_n, x_m) > r$. Montrer qu'il existe une unique fonction $f : X \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = n\big(\frac{r}{3} - d(x_n, x)\big)$ si $d(x_n, x) < \frac{r}{3}$ et $f(x) = 0$ si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $d(x_n, x) \geqslant \frac{r}{3}$. Montrer que f est continue et qu'elle n'est pas bornée.
3. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   a) l'espace X est compact ;
   b) pour tout espace métrique Y et toute application continue $f : X \to Y$, $f(X)$ est fermé dans Y ;
   c) toute fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$ est bornée.

3.9 Exercice. Soient X un espace métrique compact non vide, Y un espace métrique et $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ une application continue. Démontrer que l'application $y \mapsto \sup\{f(x, y); x \in X\}$ de Y dans $\mathbb{R}$ est continue.

3.10 Exercice. Soient X, Y des espaces métriques. Montrer que la projection $X \times Y \to Y$ est fermée si et seulement si X est compact ou Y discret. *On rappelle qu'une application f d'un espace métrique A dans un espace métrique B est dite* fermée *(resp. ouverte) si l'image par f de toute partie fermée (resp. ouverte) de A est fermée (resp. ouverte) dans B.*

3.3.3 Connexité

3.11 Exercice. Soit X un espace métrique. Montrer que la relation R définie par $x\,R\,y$ si et seulement s'il existe une application continue $\alpha : [0,1] \to X$ telle que $\alpha(0) = x$ et $\alpha(1) = y$ est une relation d'équivalence sur X. Montrer que la classe d'équivalence d'un point $x \in X$ est la plus grande partie de X connexe par arcs contenant x.

3.12 Exercice. Une démonstration du théorème de Darboux. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Soit $I \subset U$ un intervalle. Notons $A = \{(x,y) \in I \times I; x < y\}$.

1. Montrer que A est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$.
2. Pour $(x,y) \in A$, posons $g(x,y) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}\cdot$ Montrer que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.
3. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle.
   Ce résultat signifie que la dérivée de toute fonction dérivable possède la propriété de la valeur intermédiaire. Voir 7.10 pour deux autres démonstrations.

3.13 Exercice. Soit U une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$. Montrer que les composantes connexes de U sont ouvertes dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'ensemble des composantes connexes de U est dénombrable.

3.14 Exercice. Soit X un espace métrique. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) l'espace X est compact et connexe ;

(ii) pour tout recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de X, il existe un nombre entier $n \in \mathbb{N}$ et des éléments $i_1, \dots, i_n$ de I tels que $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k} = X$ et tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k < n$, on ait $U_{i_k} \cap U_{i_{k+1}} \neq \emptyset$.

3.3.4 Complétude

3.15 Exercice. Soit (E,N) un espace vectoriel normé.

1. Soient $x, y \in E$ et $r, s \in \mathbb{R}_+^*$ tels que la boule fermée de centre x et de rayon r soit contenue dans la boule fermée de centre y et de rayon s. Montrer que $N(y - x) + r \leqslant s$.
2. On suppose que E est complet. Soit (B_n) une suite décroissante de boules fermées. Montrer que l'intersection des B_n n'est pas vide.

3.16 Exercice. On se propose de donner une autre démonstration du théorème du point fixe. Soient (X,d) un espace métrique complet non vide et $f : X \to X$ une application lipschitzienne de rapport $k \in [0,1[$. Pour $R \in \mathbb{R}_+$, on pose $A_R = \{x \in X; d\big(x, f(x)\big) \leqslant R\}$.

1. Montrer que $f(A_R) \subset A_{kR}$ et en déduire que pour tout $R \in \mathbb{R}_+^*$, A_R est une partie fermée non vide de X.
2. Soient $x, y \in A_R$. Montrer que $d(x,y) \leqslant 2R + d\big(f(x), f(y)\big)$ et en déduire que $\delta(A_R) \leqslant \dfrac{2R}{1-k}\cdot$
3. Montrer que A_0 n'est pas vide.

3.17 Exercice. (Théorème du point fixe à paramètres). Soient X un espace métrique, (Y,d) un espace métrique complet non vide et $f : X \times Y \to Y$ une application telle que

- pour tout $y \in Y$, l'application $x \mapsto f(x,y)$ est continue ;
- pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V de x et un nombre réel k tels que $0 \leqslant k < 1$ et, pour tout $(x', y, y') \in V \times Y \times Y$, on ait $d\big(f(x',y), f(x',y')\big) \leqslant k\, d(y,y')$.

1. Montrer que l'application f est continue.
2. Montrer qu'il existe une unique application $g : X \to Y$ telle que, pour tout $x \in X$, on ait $f\big(x, g(x)\big) = g(x)$.
3. Montrer que l'application g est continue.

4 Espaces vectoriels normés, espaces de Banach

Biblio pour ce chapitre : les classiques ([L M, L-F A, M Ana, RDO] *etc.*). Je me suis un peu servi de [Sk]...

4.1 Applications linéaires continues

Comme un espace vectoriel normé est, comme on l'a vu muni d'une distance, toutes les notions de continuité, de limite *etc.* , y ont un sens.

Proposition. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Les applications $(x, y) \mapsto x + y$ de $E \times E$ dans E et $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ de $\mathbb{R} \times E$ dans E sont continues.*

Définition. Un espace de Banach est un espace vectoriel (réel ou complexe) normé complet.

Sous-espaces de Banach. On appelle sous-espace de Banach d'un espace de Banach E un sous-espace vectoriel fermé F de E (muni de la restriction à F de la norme de E).

Norme d'une application linéaire. Soient E et F des espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application linéaire. L'application f est continue si et seulement si elle est continue en 0 ce qui a lieu si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ avec $\|f(x)\| \leqslant k\|x\|$ pour tout $x \in E$.
La meilleure constante dans cette inégalité, est le nombre $\sup\{\|f(x)\|;\ \ x \in E,\ \|x\| \leqslant 1\}$ qui s'appelle la *norme* de f et se note $|||f|||$.
Pour $k \in \mathbb{R}_+$ on a $(\|f(x)\| \leqslant k\|x\|$ pour tout $x \in E) \iff (k \geqslant |||f|||)$.
Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des applications linéaires continues, alors $|||g \circ f||| \leqslant |||g|||.|||f|||$.

Proposition. *Soient E et F des espaces vectoriels normés. L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de toutes les applications linéaires de E dans F. L'application $|||\ |||$ est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$. Si F est complet, il en va de même pour $\mathcal{L}(E, F)$.*

Équivalence de normes Soient p et q des normes sur un même espace vectoriel E. On dit que p et q sont *équivalentes* s'il existe $k, \ell \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $k\,p \leqslant q \leqslant \ell\,p$.

Remarquons que les distances associées à des normes équivalentes sont des distances équivalentes, donc uniformément équivalentes.

En particulier si p et q sont des normes équivalentes sur E, alors (E, p) est un espace de Banach si et seulement si (E, q) est un espace de Banach.

Remarquons aussi que contrairement au cas des espaces métriques généraux, il n'y a qu'une seule notion d'équivalence de distances : les distances associées à deux normes sont topologiquement équivalentes si et seulement si elles sont équivalentes.

4.2 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Présentons-les ici à nouveau rapidement.

Sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, on dispose de plusieurs normes : pour $\xi = (x_1, \ldots, x_n)$ on pose
- $\|\xi\|_\infty = \max(|x_1|, \ldots |x_n|)$
- $\|\xi\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$

• $\|\xi\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$.
Ces normes sont équivalentes : on a $\|\xi\|_\infty \leqslant \|\xi\|_2 \leqslant \|\xi\|_1 \leqslant n\|\xi\|_\infty$. Nous allons voir que toutes les normes de $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes. Le point clef est que les boules et les sphères de l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$ sont compactes.

Lemme. *Munissons $\mathbb{R}^n$ de la norme $\| \ \|_\infty$.*

a) Toute application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans un espace vectoriel normé est continue.

b) Toute application linéaire bijective de $\mathbb{R}^n$ dans un espace vectoriel normé est un homéomorphisme.

Démonstration. Notons $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soient (E, N) un espace vectoriel normé et $\varphi : \mathbb{R}^n \to E$ une application linéaire.

a) Pour tout $\xi = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\varphi(\xi) = \varphi(x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) = x_1\varphi(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_n\varphi(\mathbf{e}_n),$$

donc

$$N\big(\varphi(\xi)\big) \leqslant |x_1|N\big(\varphi(\mathbf{e}_1)\big) + \cdots + |x_n|N\big(\varphi(\mathbf{e}_n)\big) \leqslant \|\xi\|_\infty\Big(N\big(\varphi(\mathbf{e}_1)\big) + \cdots + N\big(\varphi(\mathbf{e}_n)\big)\Big);$$

en d'autres termes, φ est continue et l'on a $\|\varphi\| \leqslant N\big(\varphi(\mathbf{e}_1)\big) + \cdots + N\big(\varphi(\mathbf{e}_n)\big)$.

b) Supposons φ bijective. Notons $S = \{\xi \in \mathbb{R}^n ; \|\xi\|_\infty = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. L'application $N \circ \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ est continue d'après (a). Comme φ est injective et N est une norme, pour tout $\xi \in S$, on a $N\big(\varphi(\xi)\big) > 0$. Comme S est compact, il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ qui minore $\{N \circ \varphi(\xi) ; \xi \in S\}$. Soit $\xi \in \mathbb{R}^n$; si ξ n'est pas nul, posons $\eta = \|\xi\|_\infty^{-1}\xi$. Alors $\eta \in S$, donc $N\big(\varphi(\eta)\big) \geqslant a$; on en déduit que $N\big(\varphi(\xi)\big) \geqslant a\|\xi\|_\infty$. Cette dernière égalité étant aussi vraie si ξ est nul, on en déduit que, pour tout $u \in E$, on a $N(u) = N\Big(\varphi\big(\varphi^{-1}(u)\big)\Big) \geqslant a\|\varphi^{-1}(u)\|_\infty$, ou encore $\|\varphi^{-1}(u)\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{a}N(u)$. Donc φ^{-1} est continue (et $\|\varphi^{-1}\| \leqslant a^{-1}$). □

Théorème. *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.*

a) Toutes les normes sur E sont équivalentes.
Munissons E d'une norme.

b) Toute application linéaire de E dans un espace vectoriel normé est continue.

Démonstration. Choisissons une application linéaire bijective φ de $\mathbb{R}^n$ sur E, où n désigne la dimension de E.

a) Soient N et N' des normes sur E. Par le lemme ci-dessus, φ^{-1} est un homéomorphisme de (E, N) sur $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$ et l'application φ est un homéomorphisme de $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$ sur (E, N'). Leur composée, l'identité de E, est donc un homéomorphisme de (E, N) sur (E, N').

b) Soit ψ une application linéaire de E dans un espace vectoriel normé F. Par le lemme ci-dessus, l'application φ^{-1} est un homéomorphisme de E sur $\mathbb{R}^n$ et l'application $\psi \circ \varphi$ est continue de $\mathbb{R}^n$ dans F. Leur composée ψ est donc continue. □

Il résulte de ce théorème que pour tout espace vectoriel normé E de dimension finie n, il existe un homéomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^n$ sur E.

Proposition. *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.*

Corollaire. *Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé.*

Théorème de Riesz. *Soit (E, N) un espace vectoriel normé. On a équivalence entre :*
(i) E est de dimension finie
(ii) La boule fermée B de centre 0 et de rayon 1 est compacte
(iii) E est localement compact i.e. tout point admet un voisinage compact.

Démonstration. **(i)⇒(iii)** Tout espace vectoriel normé de dimension finie n est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. Il est donc localement compact.

(iii)⇒(ii) Soit (E, N) un espace vectoriel normé localement compact. Soit V un voisinage compact de 0 dans E. Il existe alors $r > 0$ tel que V contienne la boule fermée de centre 0 et de rayon r. Comme cette boule est fermée dans le compact V, elle est compacte. Comme la multiplication par $1/r$ est continue B est compacte.

(ii)⇒(i) Nous utiliserons un lemme :

Lemme. *Soit F un sous espace vectoriel fermé de E distinct de E. Il existe $x \in E$ tel que $N(x) \leqslant 1$ et $d(x, F) = \inf\{N(x - z);\ z \in F\} \geqslant 1/2$.*

Démonstration. Puisque $E \neq F$, il existe $y \in E$ et $y \notin F$. Comme F est fermé, $d(y, F) \neq 0$. Quitte à remplacer y par $\dfrac{1}{2d(y, F)}y$, on peut supposer que $d(y, F) = \inf\{N(y - z);\ z \in F\} = 1/2$. Il existe alors $z \in F$ tel que $x = y - z$ satisfasse $N(x) \leqslant 1$. Notons que $d(x, F) = d(y, F) = 1/2$. □

Supposons que E n'est pas de dimension finie et construisons, par récurrence, une suite x_n de points de B telle que, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n \neq m$, on a $N(x_n - x_m) \geqslant 1/2$.
Posons $x_0 = 0$. Supposons $(x_0, \ldots, x_n)$ construits, et notons F le sous-espace vectoriel qu'ils engendrent. Il est de dimension finie, donc fermé et distinct de E. D'après le lemme, il existe $x_{n+1} \in E$ tel que $N(x_{n+1}) \leqslant 1$ et $d(x_{n+1}, F) \geqslant 1/2$. En particulier, puisque pour $k \leqslant n$ on a $x_k \in F$, il vient $N(x_k - x_{n+1}) \geqslant 1/2$. Toute suite extraite de la suite (x_n) ainsi construite, n'est pas de Cauchy, donc elle n'est pas convergente. Il s'ensuit que B n'est pas compacte. □

Le théorème de Riesz nous dit que dans un espace vectoriel normé de dimension infinie, les boules fermées de rayon non nul ne sont pas compactes. En particulier, en dimension infinie, *les fermés bornés ne sont pas toujours compacts.*

4.3 Espaces préhilbertiens

Produit scalaire. Soit E un espace vectoriel réel. Une forme bilinéaire symétrique $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est dite *positive* si pour tout $x \in E$, on a $\varphi(x, x) \in \mathbb{R}_+$. Si de plus on a $\varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$, on dit que φ est *définie positive* (ou positive non dégénérée).

Un *produit scalaire* sur E est une forme bilinéaire définie positive.

Un *espace préhilbertien* est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

En général, les produits scalaires se notent $(x, y) \mapsto \langle x|y\rangle$.

Lorsque E est un espace vectoriel complexe, un produit scalaire est une forme *sesquilinéaires* $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ (linéaire par rapport à une des variables, antilinéaire par rapport à l'autre ([3]) hermitienne ($\varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}$ pour $x, y \in E$) définie positive. convent

3. Les deux conventions existent : selon les auteurs, c'est l'application $x \mapsto \varphi(x, y)$ ou l'application $y \mapsto \varphi(x, y)$ qui est linéaire. Nous supposerons ici que $x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire.

Inégalité de Cauchy-Schwarz. Soit φ une forme hermitienne positive sur un espace vectoriel E. Pour tout $x, y \in E$, on a $|\varphi(x,y)|^2 \leqslant \varphi(x,x)\varphi(y,y)$.

Norme associée. Si $(E, \langle \ | \ \rangle)$ est un espace préhilbertien, l'application $x \mapsto \langle x|x\rangle^{1/2}$ est une norme sur E notée $\| \ \|$. Un espace préhilbertien est donc un espace vectoriel normé.

Théorème de Pythagore. Soient $(E, \langle \ | \ \rangle)$ un espace préhilbertien, et $x, y \in E$. On a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re\langle x|y\rangle$. Donc si x et y sont orthogonaux, *i.e.* si $\langle x|y\rangle = 0$, on a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Familles orthonormales.. Une famille $(e_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est dite orthonormale si les e_i sont deux à deux orthogonaux de norme 1.

Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ une famille orthonormée et $x \in E$. Notons F le sous-espace vectoriel engendré par les e_i. Posons $y = \sum_{i=1}^{k} \langle x|e_i\rangle e_i$. Alors $y \in F$ et $\langle y|e_i\rangle = \langle x|e_i\rangle$, donc $x - y \in F^\perp$. Pour $z \in F$ on a $y - z \in F$ et $x - y \in F^\perp$ donc $\|x-z\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 \geqslant \|x-y\|^2$ donc $d(x,F)^2 = \|x-y\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{k} |\langle x|e_i\rangle|^2$.

Procédé d'orthonormalisation de (Gram-)Schmidt. Un espace vectoriel hermitien de dimension finie possède une base orthonormale. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une base de E ; il existe une unique base orthonormale de E vérifiant les deux conditions suivantes :

a) Pour $k = 1, \ldots, n$ les espaces vectoriels engendrés par $(e_1, \ldots, e_k)$ et $(x_1, \ldots, x_k)$ coïncident ;

b) $\langle e_k|x_k\rangle \in \mathbb{R}_+$.

La construction des e_k est algorithmique : on pose $y_1 = x_1$ et $e_1 = \|y_1\|^{-1}y_1$; supposant $(e_1, \ldots, e_k)$ construits, on pose $y_{k+1} = x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle x_{k+1}|e_i\rangle e_i$ puis $e_{k+1} = \|y_{k+1}\|^{-1}y_{k+1}$.

Notons que la matrice de passage de la base $(e_1, \ldots, e_n)$ à $(x_1, \ldots, x_n)$ est triangulaire supérieure avec des coefficients strictement positifs sur la diagonale. On peut interpréter ce procédé de deux façons :

Décomposition d'Iwasawa. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$; il existe une unique matrice $K \in O(n)$ et T triangulaire supérieure avec des coefficients strictement positifs sur la diagonale telles que $A = KT$.

En effet, écrivons A comme matrice de passage $P_{B_0,B}$ de la base (orthonormée) canonique B_0 dans une base B. Écrire $A = KT$ c'est trouver une base B_1 telle que la matrice de passage P_{B_0,B_1} soit orthogonale et $P_{B_1,B}$ soit triangulaire supérieure avec des coefficients strictement positifs sur la diagonale : c'est la base du procédé de (Gram-)Schmidt.

Décomposition de Cholesky. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ définie positive ; il existe une unique matrice T triangulaire supérieure avec des coefficients strictement positifs sur la diagonale telles que $A = {}^tTT$.

En effet, la matrice A est la matrice d'un produit scalaire dans une base B. Si T triangulaire supérieure avec des coefficients strictement positifs sur la diagonale est la matrice de passage d'une B_0 vers B, alors B_0 est orthonormée si et seulement si la matrice du produit scalaire dans la base B_0 est I_n, *i.e.* si et seulement si $A = {}^tTT$.

Exemples de produits scalaires. Citons brièvement deux exemples importants :

Suites de carré sommable. Notons ℓ^2 l'espace vectoriel des suites $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que l'on ait $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 < +\infty$. Pour $(a_n), (b_n) \in \ell^2$, la série de terme général (a_nb_n) converge absolument (car $|2a_nb_n| \leqslant a_n^2 + b_n^2$). On pose $\big\langle (a_n)|(b_n)\big\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_nb_n$.

Fourier. Notons D l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes, périodiques de période 2π, et telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $2f(x) = \lim_{t \to 0} f(x+t) + f(x-t)$.

Pour $f, g \in E$, posons $\langle f|g\rangle = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt$.

4.4 Polynômes orthogonaux

Nous développons ici un troisième exemple de produit scalaire.

Soient $I =]a, b[$ un intervalle ouvert non vide et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive. On suppose que l'ensemble $\{t \in]a, b[; \varphi(t) \neq 0\}$ est dense dans I. Notons E_φ l'ensemble des fonctions continues $g \in C(I; \mathbb{R})$ telles que la fonction $t \mapsto \varphi(t)\big|g(t)\big|^2$ soit intégrable. L'ensemble E_φ est un sous-espace vectoriel de $C(I; \mathbb{R})$ et l'application $(f, g) \mapsto \langle f|g\rangle = \displaystyle\int_a^b \varphi(t)f(t)g(t)\, dt$ est un produit scalaire sur E_φ.

Supposons de plus que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $t \mapsto \varphi(t)t^{2n}$ est intégrable sur I, de sorte que $t \mapsto t^n$ appartient à E_φ ; on en déduit que toute fonction polynomiale appartient à E_φ.

Comme I est ouvert et non vide, il est infini. Donc l'application qui à un polynôme P associe l'élément $t \mapsto P(t)$ de $C(I; \mathbb{R})$ est injective. Pour simplifier les notations qui suivent, nous identifierons abusivement polynôme et application polynomiale définie sur I. En particulier, on note X l'application $t \mapsto t$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons E_n le sous-espace vectoriel de E_φ formé des polynômes de degré $< n$. Notons p_n le projecteur orthogonal de E_{n+1} d'image E_n. Enfin posons $h_n = X^n - p_n(X^n)$. On a les propriétés suivantes :

a) comme $p_n(X^n)$ est un polynôme de degré $< n$, h_n est un polynôme unitaire de degré n ; en particulier, $h_0 = 1$ et $h_n \in E_{n+1}$;

b) h_n est orthogonal à E_n.

Ces propriétés (a) et (b) caractérisent le polynôme h_n. Notons que si $n \neq m$, alors les polynômes h_n et h_m sont orthogonaux.

Sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X] \subset E_\varphi$, considérons la forme bilinéaire $B : (f, g) \mapsto \langle Xf|g\rangle$; comme $B(f, g) = \displaystyle\int_a^b \varphi(t)tf(t)g(t)\, dt = B(g, f)$, la forme B est symétrique.

Propriétés des polynômes orthogonaux h_n.

- **Formule de récurrence.** Soit $f \in E_{n-1}$; on a $\langle Xh_n|f\rangle = B(h_n, f) = B(f, h_n) = \langle Xf|h_n\rangle = 0$ puisque $Xf \in E_n$. Comme h_{n+1} et Xh_n sont unitaires, il en résulte que $h_{n+1} - Xh_n$ est un élément de E_{n+1} orthogonal à E_{n-1}. Or $E_{n+1} \cap E_{n-1}^\perp$ admet comme base (h_{n-1}, h_n). Il existe donc $\alpha_n \in \mathbb{R}$ et $\beta_n \in \mathbb{R}$ tels que $h_{n+1} = (X - \alpha_n)h_n - \beta_n h_{n-1}$.
- **Interprétation des racines.** Notons $T_n : E_n \to E_n$ l'application $f \mapsto p_n(Xf)$. Pour $f, g \in E_n$, on a $\langle T_n(f)|g\rangle = \langle p_n(Xf)|g\rangle = \langle Xf|g\rangle$, puisque $Xf - p_n(Xf)$ appartient à $E_n^\perp$. On a donc $\langle T_n(f)|g\rangle = B(f, g)$. En particulier, l'endomorphisme T_n de E_n est symétrique. Il admet donc une base orthonormale de vecteurs propres. Soit f un vecteur propre pour T_n de valeur propre λ. Alors, pour tout $g \in E_n$, on a $0 = \langle T_n(f) - \lambda f|g\rangle = \langle Xf - \lambda f|g\rangle$. On en déduit que $(X - \lambda)f \in E_n^\perp$; comme de plus $(X - \lambda)f$ est de degré $\leqslant n$, il est proportionnel à h_n. En d'autres termes, f est vecteur propre pour la valeur propre λ si et seulement si λ est une racine de h_n et f est proportionnel au quotient de h_n par $X - \lambda$.
- **Position des racines**

  a) Comme T_n est diagonalisable, il admet une base $q_1, \ldots, q_n$ de vecteurs propres ; ce sont des polynômes de degré $n - 1$ que l'on peut évidemment supposer unitaires. Par ce qui précède, on a $(X-\lambda_i)q_i = h_n$ où λ_i est la valeur propre associée ; comme les q_i sont distincts, il existe n nombres réels distincts $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $X - \lambda_i$ divise h_n ; autrement dit, h_n a n racines réelles distinctes.

b) Soit λ une racine (réelle) de h_n. Si q est le quotient de h_n par $X-\lambda$, on a $h_n = (X-\lambda)q$ et $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)(t-\lambda)q(t)^2\,dt = \langle h_n|q\rangle = 0$, donc $t-\lambda$ ne garde pas un signe constant sur $]a,b[$; on en déduit que $\lambda \in]a,b[$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$. Notons $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ les racines de h_n et $\mu_1 < \cdots < \mu_n < \mu_{n+1}$ celles de h_{n+1}. Pour $j \in \{1, \ldots, n+1\}$, notons f_j un vecteur propre de norme 1 de T_{n+1} pour la valeur propre μ_j et, si $j \leqslant n$, notons e_j un vecteur propre de norme 1 de T_n pour la valeur propre λ_j. Si $g = \displaystyle\sum_{j=1}^n x_j e_j$, on a $\|g\|^2 = \displaystyle\sum_{j=1}^n x_j^2$ et $B(g,g) = \langle T_n(g), g\rangle = \displaystyle\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^2$. De même, si $g = \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} y_j f_j$, on a $\|g\|^2 = \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} y_j^2$ et $B(g,g) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \mu_j y_j^2$.

Fixons $k \in \{1, \ldots, n\}$. Notons F_-, F_+ les sous-espaces vectoriels de E_n engendrés respectivement par les e_j pour $j \leqslant k$ et par les e_j pour $j \geqslant k$. Notons aussi G_-, G_+ les sous-espaces vectoriels de E_{n+1} engendrés respectivement par les f_j pour $j \leqslant k+1$ et par les f_j pour $j \geqslant k$. La dimension de F_- est k, celle de F_+ est $n-(k-1)$, celle de G_- est $k+1$ et celle de G_+ est $n+1-(k-1)$; donc les sous-espaces vectoriels $F_- \cap G_+$ et $F_+ \cap G_-$ de E_{n+1} ne sont pas nuls. Soient $g \in F_- \cap G_+$ et $h \in F_+ \cap G_-$ des vecteurs non nuls.

Comme $g \in F_- \cap G_+$, il existe $x_1, \ldots, x_k, y_k, \ldots, y_{n+1} \in \mathbb{R}$ tels que $g = \displaystyle\sum_{j=1}^k x_j e_j = \sum_{j=k}^{n+1} y_j f_j$; écrivons aussi $h = \displaystyle\sum_{j=k}^n u_j e_j = \sum_{j=1}^{k+1} v_j f_j$. Comme g est un élément non nul de E_n, il n'est pas proportionnel à f_k (qui est de degré n car proportionnel à $h_{n+1}/(X-\mu_k)$) ; il existe donc $j > k$ tel que $y_j \neq 0$. On trouve $B(g,g) = \displaystyle\sum_{j=1}^k \lambda_j x_j^2 \leqslant \lambda_k \|g\|^2$ et $B(g,g) = \displaystyle\sum_{j=k}^{n+1} \mu_j y_j^2 > \mu_k \sum_{j=k}^{n+1} y_j^2 = \mu_k \|g\|^2$.
On en déduit que $\mu_k < \lambda_k$.
De même, h n'est pas proportionnel à f_{k+1}, donc $\lambda_k \|h\|^2 \leqslant B(h,h) < \mu_{k+1}\|h\|^2$.
Cela montre que l'on a $\mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \ldots \mu_n < \lambda_n < \mu_{n+1}$.

d) **Méthode de quadrature de Gauss.** Il s'agit d'approcher une intégrale du type $\displaystyle\int_a^b f(t)\varphi(t)\,dt$.
L'énoncé est le suivant.
Soit h_n le n-ième polynôme orthogonal pour φ et notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses racines. Alors il existe $w_1, \ldots w_n \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout polynôme P de degré $\leqslant 2n-1$ on ait

$$\int_a^b \varphi(t)\,P(t)\,dt = \sum_{k=1}^n w_k P(\lambda_k).$$

De plus, pour tout k, on a $w_k > 0$.
En effet, les formes linéaires $P \mapsto P(\lambda_k)$ forment une base du dual de l'espace vectoriel des polynômes de degré $< n$. Il existe donc un unique n-uplet $w_1, \ldots w_n$ tels que l'on ait $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\,P(t)\,dt = \sum_{k=1}^n w_k P(\lambda_k)$ pour P de degré $< n$. Cette égalité a aussi lieu pour $P = h_n Q$ avec Q de degré $< n$ puisque les deux membres sont nuls, h_n étant orthogonal à Q. Or tout polynôme P de degré $\leqslant 2n-1$ s'écrit sous la forme $P = h_n Q + R$ (division euclidienne).

Enfin, prenant $P_k = \displaystyle\prod_{j\neq k}(X-\lambda_j)^2$, on trouve $w_k \displaystyle\prod_{j\neq k}(\lambda_k - \lambda_j)^2 = \int_a^b \varphi(t) P_k(t)\,dt > 0$.

e) **Formule de Darboux-Christoffel** Voir exerc. 4.13

Nous allons à présent donner quelques exemples de polynômes orthogonaux. Nous utiliserons un lemme simple.

Lemme. *Soient $k \in \mathbb{N}$, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f une fonction de classe C^{k+1} sur I. On suppose que, pour tout $j \leqslant k$, la fonction $t \mapsto t^j f^{(j)}(t)$ tend vers 0 aux bords de I. Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b t^k f^{(k+1)}(t)\,dt$ est convergente et l'on a $\displaystyle\int_a^b t^k f^{(k+1)}(t)\,dt = 0$.*

Démonstration. En effet, une primitive de $t \mapsto t^k f^{(k+1)}(t)$ est la fonction $t \mapsto \displaystyle\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \frac{k!}{j!}\, t^j\, f^{(j)}(t)$. □

Exemples. a) On suppose $I =]-1,1[$ et $\varphi = 1$. Notons q_n la dérivée n-ième du polynôme $(X^2-1)^n$ et posons $h_n = \dfrac{n!}{(2n)!} q_n$. C'est un polynôme unitaire. Pour tout $k < n$, on peut écrire $h_n = f^{(k+1)}$, où f est proportionnel à la dérivée d'ordre $n-k-1$ de $(X^2-1)^n$. En particulier, pour tout $j \in \mathbb{N}$, tel que $j \leqslant k$ on a $f^{(j)}(-1) = f^{(j)}(1) = 0$. Par le lemme, on trouve $\displaystyle\int_{-1}^{1} h_n(t) t^k\,dt = 0$. Cela montre que h_n est le n-ième polynôme orthogonal. Ces polynômes h_n s'appellent les *polynômes de Legendre.*

b) On suppose $I =]-1,1[$ et, pour $t \in I$, $\varphi(t) = (1-t^2)^{-1/2}$. Rappelons qu'il existe un polynôme T_n de degré n tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $T_n(\cos x) = \cos nx$. Pour $n \neq 0$, le polynôme $2^{1-n} T_n$ est unitaire ; notons le h_n. On pose aussi $h_0 = 1$. Pour $n, m \in \mathbb{N}$ distincts, faisant le changement de variable $t = \cos x$, pour $x \in]0,\pi[$, puisque $\varphi(t)\,dt = -dx$, on trouve

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} T_n(t) T_m(t)\,\varphi(t)\,dt &= -\int_{\pi}^{0} T_n(\cos x) T_m(\cos x)\,dx \\
&= \int_0^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx \\
&= 0 && \text{car } n \neq m.
\end{aligned}$$

Cela montre que h_n est le n-ième polynôme orthogonal.

c) On suppose $I =]-1,1[$ et, pour $t \in I$, $\varphi(t) = (1-t^2)^{1/2}$. Rappelons qu'il existe un polynôme S_n de degré n tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin x\, S_n(\cos x) = \sin(n+1)x$. Pour tout n, le polynôme $2^{-n} S_n$ est unitaire ; notons le h_n. Pour $n, m \in \mathbb{N}$ distincts, faisant le changement de variable $t = \cos x$, pour $x \in]0,\pi[$, puisque $\varphi(t)\,dt = -(\sin x)^2 dx$, on trouve

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} S_n(t) S_m(t)\,\varphi(t)\,dt &= -\int_{\pi}^{0} (\sin x)^2\, S_n(\cos x) S_m(\cos x)\,dx \\
&= \int_0^{\pi} \sin(n+1)x\, \sin(m+1)x\,dx \\
&= 0 && \text{puisque } n \neq m.
\end{aligned}$$

Cela montre que h_n est le n-ième polynôme orthogonal.

Les polynômes T_n et S_n s'appellent les *polynômes de Tchebycheff* de première et deuxième espèce respectivement.

d) On suppose $I =]0,+\infty[$ et, pour $t \in I$, $\varphi(t) = e^{-t}$. La dérivée n-ième de la fonction $t \mapsto t^n e^{-t}$ s'écrit $t \mapsto (-1)^n h_n(t) e^{-t}$, où h_n est un polynôme unitaire de degré n. Pour tout $k < n$, on peut écrire $h_n(t)\, e^{-t} = f^{(k+1)}(t)$, où f est une fonction proportionnelle à la dérivée d'ordre $n-k-1$ de $t \mapsto t^n e^{-t}$. En particulier, pour tout $j \leqslant k$ on a $f^{(j)}(0) = 0$. Par ailleurs, comme $f^{(j)}$ est le produit d'une fonction polynomiale par $t \mapsto e^{-t}$, on a $\lim_{t \to +\infty} f^{(j)}(t)t^j = 0$. Par le lemme précédent, on trouve $\int_0^{+\infty} h_n(t)t^k e^{-t}\,dt = 0$. Cela montre que h_n est le n-ième polynôme orthogonal. Ces polynômes h_n s'appellent les *polynômes de Laguerre.*

e) On suppose $I = \mathbb{R}$ et, pour $t \in I$, $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$. La dérivée n-ième de la fonction $t \mapsto e^{-t^2/2}$ s'écrit $t \mapsto (-1)^n h_n(t)e^{-t^2/2}$, où h_n est un polynôme unitaire de degré n. Pour tout $k < n$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on peut écrire $h_n(t)e^{-t^2/2} = f^{(k+1)}(t)$, où f est proportionnel à la dérivée d'ordre $n-k-1$ de $t \mapsto e^{-t^2/2}$. Comme $f^{(j)}$ est le produit d'une fonction polynomiale par $t \mapsto e^{-t^2/2}$, on a $\lim_{t \to \pm\infty} f^{(j)}(t)t^j = 0$. Par le lemme, on trouve $\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)t^k e^{-t^2/2}\,dt = 0$. Cela montre que h_n est le n-ième polynôme orthogonal. Ces polynômes h_n s'appellent les *polynômes de Hermite.*

4.5 Exercices

4.5.1 Espaces vectoriels normés

4.1 Exercice. Soient E un espace vectoriel normé complexe, B la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 et ℓ une forme linéaire sur E. Montrer que pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda \in \ell(B)$ et $|\mu| \leqslant 1$, on a $\lambda\mu \in \ell(B)$. En déduire que pour toute partie ouverte non vide U de E et toute forme linéaire ℓ non continue, on a $\ell(U) = \mathbb{C}$.

4.2 Exercice. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et p, q des normes sur E.

1. On suppose que $B_p(0,1) \subset \overline{B}_q(0,1)$. Montrer que $q \leqslant p$.
2. On suppose que $B_p(0,1) = B_q(0,1)$. Montrer que $p = q$.

4.3 Exercice. Notons $C^1([0,1];\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que les applications $p : f \mapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ et $q : f \mapsto |f(0)| + \|f'\|_\infty$ sont des normes équivalentes sur $C^1([0,1];\mathbb{C})$.
2. Les normes p et $f \mapsto \|f\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?
3. Montrer que $C^1([0,1];\mathbb{C})$ muni de la norme q est un espace de Banach.

4.4 Exercice. Démontrer que dans un espace vectoriel normé
- l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même rayon ;
- l'intérieur d'une boule fermée de rayon non nul est la boule ouverte de même rayon.

Ces deux énoncés sont faux dans le cas d'un espace métrique quelconque !

4.5 Exercice. Démontrer que, dans un espace vectoriel normé, l'adhérence d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.

4.6 Exercice. Soient (E,p) et (F,q) des espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application linéaire de rang fini (ce qui signifie que le sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} f$ de F est de dimension finie). Démontrer que f est continue si et seulement si son noyau est fermé.

4.7 Exercice.
1. Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $y \in F$ tel que $d(x,F) = \|x-y\|$. En déduire que, si $E \neq F$, pour tout $y \in F$ et tout $\lambda > 0$, il existe $x \in E$, tel que $d(x,F) = \|x-y\| = \lambda$.
2. Soient E un espace de Banach et (F_n) une suite strictement croissante de sous-espaces vectoriels de E de dimension finie.
   a) Construire une suite (x_n) d'éléments de E tels que $x_n \in F_n$, $d(x_{n+1}, F_n) = \|x_{n+1} - x_n\| = 3^{-n}$.
   b) Montrer que la suite (x_n) converge dans E et que sa limite x vérifie $d(x, F_n) \geqslant \dfrac{3^{-n}}{2}$.

   c) En déduire que l'on a $E \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$.
3. Démontrer qu'un espace de Banach n'admet pas de base (algébrique) infinie dénombrable.
4. Démontrer, en adaptant la preuve ci-dessus, qu'un espace de Banach n'est pas réunion d'une suite strictement croissante de sous-espaces fermés.

4.5.2 Espaces préhilbertiens

4.8 Exercice. Soient E un espace vectoriel réel et $f : E \to \mathbb{R}_+$ une application qui vérifie

$$\forall x, y \in E, \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)\,.$$

1. Montrer que $f(0) = 0$ et que pour tout $y \in E$, on a $f(-y) = f(y)$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in E$, on a $f(kx) = k^2 f(x)$. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{Q}$, on a $f(kx) = k^2 f(x)$.
3. Montrer que, pour tout $x, y, z \in E$, on a

$$f(x+y+z) = f(x+y) + f(x+z) + f(y+z) - f(x) - f(y) - f(z)\,.$$

4. Montrer que l'application $(x, y) \mapsto f(x+y) - f(x) - f(y)$ est $\mathbb{Q}$-bilinéaire.
5. Montrer que toute norme sur E vérifiant l'identité de la médiane ($\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$) est issue d'un produit scalaire.

Projection sur un convexe

4.9 Exercice. Soient E un espace préhilbertien.
1. Soit C une partie de E et $x \in E$.
   a) Soit $y \in C$ tel que, pour tout $z \in C$, on ait $\Re\big(\langle x-y|z-y\rangle\big) \leqslant 0$. Démontrer que l'application $x \mapsto \|x-z\|$ définie sur C atteint en y son minimum.
   b) On suppose que C est une partie convexe complète non vide de E. Montrer qu'il existe un et un seul point y_0 de C en lequel la fonction $y \mapsto \|y-x\|$ (définie sur C) atteint son minimum. Le point y_0 ainsi défini s'appelle le *projeté* de x sur C ; on le notera $p_C(x)$.
   c) Démontrer que pour tout $x \in E$ et tout $z \in C$, on a $\Re\big(\langle x - p_C(x)|z - p_C(x)\rangle\big) \leqslant 0$.
2. Soient E un espace hilbertien réel et $(e_1, \ldots, e_n)$ un système orthonormal dans E. Notons C l'enveloppe convexe de $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Soit $x \in E$.
   a) Pour $j \in 1, \ldots, n$, on pose $a_j = \langle x|e_j\rangle$. Posons aussi $a = \sum_{j=1}^n a_j$, $b_j = a_j + \dfrac{1-a}{n}$ et $y = \sum_{j=1}^n b_j e_j$. Montrer que $p_C(x) = p_C(y)$.
   b) Montrer qu'il existe un unique $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $\sum_{j=1}^n \sup\{b_j - c, 0\} = 1$.
   c) Montrer que $p_C(x) = \sum_{j=1}^n \sup\{b_j - c, 0\} e_j$.

4.10 Exercice. Soient E un espace préhilbertien et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale de E. Notons F le sous-espace vectoriel de E engendré par les e_n. Montrer que, pour $x \in E$, on a $d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x|e_n\rangle|^2$.

4.5.3 Un peu de Fourier...

4.11 Exercice. Soit $a \in \mathbb{C}$. Notons f la fonction périodique de période 2π telle que, pour tout $x \in [0, 2\pi[$, on ait $f(x) = e^{ax}$.

1. Notons b la partie réelle de a. Montrer que si $b = 0$, alors on a $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)|^2 = 1$ et que si $b \neq 0$, alors on a $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)|^2 = \dfrac{e^{4\pi b} - 1}{4\pi b}\cdot$
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Montrer que pour tout nombre réel non nul a on a
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \Big(\frac{\pi}{a}\Big)\Big(\frac{e^{2a\pi} + 1}{e^{2a\pi} - 1}\Big)\cdot$$
4. Montrer que pour tout nombre réel c non entier on a $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n - c)^{-2} = \Big(\dfrac{\pi}{\sin \pi c}\Big)^2.$

4.12 Exercice. On considère la suite de polynômes à coefficients réels $(P_k)_{k\geqslant 1}$ caractérisés par les relations $P_1 = \pi - X$ et, pour tout $k \geqslant 1$, $P'_{k+1} = P_k$ et $\int_0^{2\pi} P_k(t)\, dt = 0$. Ce sont les *polynômes de Bernoulli.*

1. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a $P_k(2\pi - t) = (-1)^k P_k(t)$.
2. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$ et tout $n \in \mathbb{Z}$ non nul, on a $(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} P_k(t) e^{-int}\, dt = (in)^{-k}$.
3. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $P_{2k+1}(\pi) = 0$ et, pour $k \geqslant 1$,
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_k(t)^2\, dt = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2k} = (-1)^k P_{2k}(0)\,.$$
4. En déduire les égalités $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^4} = \dfrac{\pi^4}{90}\cdot$

4.5.4 Polynômes orthogonaux

Dans les exercices qui suivent on reprend les notations de la section 5 : on se donne un intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$ et une fonction continue positive $\varphi : I \to \mathbb{R}$. On suppose que l'ensemble $\{t \in I; \varphi(t) \neq 0\}$ est dense dans I et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $t \mapsto \varphi(t)t^{2n}$ est intégrable sur I. On note (h_n) la suite des polynômes orthogonaux unitaires associés à φ. On désigne par E_φ l'espace préhilbertien des fonctions $g \in C(I; \mathbb{R})$ telles que la fonction $t \mapsto \varphi(t)\big|g(t)\big|^2$ soit intégrable.

4.13 Exercice.
1. Montrer que $\beta_n \|h_{n-1}\|^2 = \langle Xh_n | h_{n-1}\rangle = \langle h_n | Xh_{n-1}\rangle = \|h_n\|^2$, où β_n est donné par la formule de récurrence $h_{n+1} = (X - \alpha_n)h_n - \beta_n h_{n-1}$.
2. Démontrer que l'on a, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \neq y$ la formule de Christoffel-Darboux :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{h_k(x)h_k(y)}{\|h_k\|^2} = \frac{h_{n+1}(x)h_n(y) - h_n(x)h_{n+1}(y)}{(x - y)\|h_n\|^2}\cdot$$

4.14 Exercice. On suppose qu'il existe $a \in]0, +\infty]$ tel que $I =]-a, a[$ et que φ est une fonction paire. Montrer que, pour n pair, le polynôme h_n est pair et que, pour n impair, le polynôme h_n est impair. En déduire que les α_n de la formule de récurrence ($h_{n+1} = (X - \alpha_n)h_n - \beta_n h_{n-1}$) sont nuls.

4.15 Exercice. On suppose que $I =]-1, 1[$ et que pour $t \in I$, on a $\varphi(t) = (1 - t^2)^a$, où a est un nombre réel strictement supérieur à -1. Montrer que la fonction $t \mapsto (1 - t^2)^a h_n(t)$ est proportionnelle à la dérivée n-ième de $t \mapsto (1 - t^2)^{n+a}$.

4.16 Exercice. Pour $j \in \mathbb{N}$, posons $a_j = \displaystyle\int_I t^j \varphi(t)\, dt$. On note E_n l'espace vectoriel des polynômes réels de degré $< n$. Écrire la matrice du produit scalaire dans les bases $(h_0, \ldots, h_{n-1})$ et $(1, X, \ldots, X^{n-1})$. En déduire l'égalité

$$\prod_{0 \leqslant j < n} \|h_j\|^2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & \ldots & a_{2n-2} \end{vmatrix}$$

4.17 Exercice. On note T_n l'application qui à $f \in E_n$ associe le projeté orthogonal de Xf dans E_n.

1. Quel est le polynôme caractéristique de T_n ?
2. Écrire les matrices de l'application T_n dans la base $(1, X, \ldots, X^{n-1})$ et dans la base $(h_0, \ldots, h_{n-1})$.
3. Montrer que $(-1)^n h_n$ est le polynôme caractéristique de la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_1 & \beta_2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_{n-2} & \beta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

(où les α_k et les β_k sont définis par la formule de récurrence $h_{k+1} = (X - \alpha_k)h_k - \beta_k h_{k-1}$).

5 Séries

Biblio pour ce chapitre : les classiques ([L M, L-F A, M Ana, RDO] *etc.*).

5.1 Séries généralités

Définition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes dans un espace vectoriel normé E.

a) On dit que la série de terme général (u_n) est *convergente* ou qu'elle *converge* si la suite (s_n) définie par $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ a une limite. Sinon, on dit qu'elle est *divergente* ou qu'elle *diverge.*

b) Si la série de terme général (u_n) est convergente, la limite de (s_n) s'appelle la *somme* de la série de terme général (u_n) et est notée $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$.

Proposition. *Les séries convergentes forment un espace vectoriel et la somme est linéaire : si les séries de terme général (u_n) et (v_n) sont convergentes et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), la série de terme général $(\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente et l'on a* $\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\Big) + \mu\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\Big)$.

Remarque (les premiers termes). S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_k = v_k$ pour $k \geqslant N$, alors les séries de terme général (u_n) et (v_n) sont de *même nature* (si l'une converge, l'autre aussi).

ATTENTION : Leurs sommes ne sont pas en général égales.

De ce fait, lorsqu'on s'intéresse juste à la convergence d'une série, on peut ne définir u_n qu'à partir d'un certain rang.

Notons aussi que, pour $k \in \mathbb{N}$, les séries de terme général (u_n) et (u_{n+k}) sont de même nature.

Exemple. La série géométrique : si $|z| < 1$, la série de terme général (z^n) converge et l'on a $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$; sinon la série de terme général (z^n) diverge.

Exemple. $u_n = (n(n-1))^{-1}$ n'est définie que pour $n \geqslant 2$. On a $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, donc $\sum_{k=2}^{n} u_k = 1 - \frac{1}{n} \to 1$: la série de terme général (u_n) converge et $\sum_{n=2}^{\infty} u_n = 1$.

Proposition. *Si la série de terme général (u_n) converge, la suite (u_n) tend vers* 0.

ATTENTION : Réciproque fausse.

5.2 Séries à termes positifs

Proposition. *On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geqslant 0$. La série de terme général (u_n) converge si et seulement si la suite $n \mapsto \sum_{k=0}^{n} u_k$ est majorée.*

Théorème de comparaison. *Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et la série de terme général (v_n) converge, alors la série de terme général (u_n) converge.*

... et, *a cotrario*, si la série de terme général (u_n) diverge, la série de terme général (v_n) diverge !

Exemples. • La série de terme général (n^{-2}) converge puisque $\dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n(n-1)}$.

• Comparaison avec la série géométrique : Soit (a_n) une suite de nombres entiers dans $\{0, ..., 9\}$. La série de terme général $(a_n 10^{-n})$ converge : c'est le développement décimal du nombre réel $S = \sum a_k 10^{-k}$.

  Remarque. $\sum_{k=1}^{\infty} 9.10^{-k} = 1$.

Règle de Cauchy. $u_n \geqslant 0$. *Si* $(u_n)^{1/n}$ *tend vers* a *et*
• $a < 1$ *la série de terme général* (u_n) *converge.*
• $a > 1$ *la série de terme général* (u_n) *diverge.*

Remarque. Si $a = 1$ tout est encore possible : si $u_n = 1$ ou $u_n = 1/n$ la série diverge ; si $u_n = n^{-2}$ elle converge ; dans tous ces cas $(u_n)^{1/n} \to 1$.

Corollaire. *Soient (u_n) et (v_n) à termes strictement positifs. S'il existe $m, M \in \mathbb{R}_+^*$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $mu_n \leqslant v_n \leqslant Mu_n$, alors les séries de terme général (u_n) et (v_n) sont de même nature.*

Vrai si les inégalités ont lieu pour $n \geqslant n_0$.

Corollaire. *Soient (u_n) et (v_n) des séries à termes strictement positifs. Si u_n/v_n a une limite non nulle, les séries de terme général (u_n) et (v_n) sont de même nature. En particulier, si $u_n \sim v_n$ les séries de terme général (u_n) et (v_n) sont de même nature.*

Exemples. a) Les séries de terme général $x_n = 1/n$ et $y_n = \text{Log}(1 + 1/n) = \text{Log}(n + 1) - \text{Log} n$ divergent toutes deux (on a $x_n \sim y_n$ et $\sum_{k=1}^{n} y_k = \text{Log}(n + 1) \to \infty$).

b) La série de terme général $z_n = 1/n - \text{Log}(1 + 1/n)$ converge (*via* un développement limité de $\text{Log}(1 + x)$ à l'ordre 2, il vient $z_n \sim \dfrac{1}{2n^2}$).

c) Faux sans l'hypothèse à termes positifs : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, $v_n = u_n + \dfrac{1}{n+1}$; la série (alternée) de terme général u_n converge ; la série de terme général $v_n - u_n$ diverge, donc la série de terme général v_n diverge.

Théorème (Comparaison avec une intégrale)**.** *Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}_+$ une application* décroissante*. La série de terme général $(f(n))$ est convergente si et seulement si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ a une limite quand $x \to \infty$.*

On utilise les inégalités $f(n+1) \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt \leqslant f(n)$.

Exemples. Séries de Riemann. La série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Séries de Bertrand. La série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Règle $n^\alpha u_n$. • *Si $n^\alpha u_n$ est majoré (en particuier si elle a une limite finie) et $\alpha > 1$, la série de terme général (u_n) converge.*
• *Si $n^\alpha u_n$ est minoré dans $\mathbb{R}_+^*$ (en particuier si elle a une limite non nulle) et $\alpha \leqslant 1$, la série de terme général (u_n) diverge.*

Exemple. La série de terme général $\left(1 - \cos\dfrac{1}{n}\right)$ converge.

Proposition. *Soient (u_n) et (v_n) des séries à termes strictement positifs telles que, (pour $n \geqslant n_0$) $u_{n+1}/u_n \leqslant v_{n+1}/v_n$. Si la série de terme général v_n converge, alors la série de terme général (u_n) converge.*

La suite u_n/v_n est décroissante, donc majorée...

Règle de d'Alembert. *Soit (u_n) une série à termes strictement positifs. Si u_{n+1}/u_n tend vers a et*
- *$a < 1$ la série de terme général (u_n) converge.*
- *$a > 1$ la série de terme général (u_n) diverge.*

Exemple. La série de terme général $n!/n^n$ converge

5.2.1 Séries absolument (normalement) convergentes

Définition. Une série numérique de terme général (u_n) est dite *absolument convergente* si la série de terme général $(|u_n|)$ est convergente.
Soit (u_n) une suite d'éléments dans un espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$. On dit que la série de terme général (u_n) est *normalement convergente* si la série de terme général $(\|u_n\|)$ est convergente.

Théorème. *Toute série absolument convergente est convergente.*
Toute série normalement convergente dans un espace de Banach *est convergente.*

Cela découle du résultat plus précis suivant :

Critère de Cauchy pour les séries. *Soit $(E, \|\ \|)$ un espace* de Banach*. Une série de terme général (u_n) converge dans E si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $p, q \geqslant N$ on ait $\left\|\displaystyle\sum_{k=p+1}^{q} u_k\right\| < \varepsilon$. En particulier si $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \|u_k\| < +\infty$ (on dit parfois que (u_n) est absolument convergente - je dirais normalement...) alors la série de terme général (u_n) converge.*

Produit de Cauchy de séries absolument convergentes. *Soient E un espace de Banach $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in E^{\mathbb{N}}$ deux séries absolument convergentes. Posons $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$. La série de terme général (w_n) est (absolument) convergente et l'on a $(\sum u_n)(\sum v_n) = (\sum w_n)$.*

Exemple. Par le reste de Taylor Lagrange $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\cdot$ La série produit donne $e^{x+y} = e^x e^y$.

L'exponentielle complexe. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. On a $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

Par le reste de Taylor Lagrange, $e^{iy} = \cos y + i \sin y$. Donc $e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$.

Remarque. Soient (u_n) et (v_n) deux séries convergentes. Posons $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$. Si (u_n) ou (v_n) est absolument convergente, alors la série de terme général (w_n) est convergente et l'on a $(\sum u_n)(\sum v_n) = (\sum w_n)$. Cela n'est plus vrai sans hypothèse d'absolue convergence : si $u_n = v_n = (-1)^n (n+1)^{-1/2}$, alors $w_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (k+1)^{-1/2}(n-k+1)^{-1/2}$, donc $|w_n| \geqslant \sum_{k=0}^{n} (n+1)^{-1/2}(n+1)^{-1/2} = 1$. Donc w_n ne tend pas vers 0.

5.2.2 Séries semi convergentes

Critère spécial des séries alternées. *Si (u_n) est décroissante et $\lim(u_n) = 0$, alors la série de terme général $((-1)^n u_n)$ est convergente.*

Exemples. a) Pour $\alpha > 0$, la série de terme général $(-1)^n (n+1)^{-\alpha}$ converge.

$\boxed{\text{Attention}}$ Ne pas oublier l'hypothèse (u_n) décroissante :

b) La série (w_n) définie par $w_n = 1/(n+1)$ pour n pair et $w_n = -1/(2n)$ pour n impair diverge (on a $w_{2n} + w_{2n+1} = 1/(4n+2)$ qui est une série à termes positifs divergente.

c) Plus caché : posons $u_n = \ln(1 + (-1)^n n^{-\alpha})$ ($\alpha \in \mathbb{R}_+^*$) converge absolument pour $\alpha > 1$ (critère $n^\alpha u_n$) ; pour $0 < \alpha \leqslant 1$, à l'aide d'un développement limité de $\ln(1+x)$, on trouve que $(-1)^n n^{-\alpha} - u_n \sim n^{-2\alpha}/2$ - qui est positif. On en déduit que (u_n) est semi convergente pour $1/2 < \alpha \leqslant 1$ et divergente pour $0 < \alpha \leqslant 1/2$.

Généralisation : règle d'Abel. *Si (u_n) est décroissante, $\lim(u_n) = 0$ et (v_n) est une suite telle que la suite $s_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ de ses somme partielles soit bornée, alors la série de terme général $(u_n v_n)$ est convergente.*

On écrit $v_k = s_k - s_{k-1}$, puis $\sum_{k=1}^{n} u_k v_k = \sum_{k=1}^{n} u_k s_k - \sum_{\ell=0}^{n-1} u_{\ell+1} s_\ell = u_n s_n - u_1 s_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) s_k$.

Cette suite converge car
- $(u_n) \to 0$ et (s_n) est bornée, donc $(u_n s_n) \to 0$;
- on a $\sum_{k=0}^{n} u_k - u_{k+1} = u_0 - u_{n+1}$, donc la série de terme général $(u_k - u_{k+1})$ est convergente et puisqu'elle est à termes positifs, elle est absolument convergente ;

- on en déduit que la série de terme général $((u_k - u_{k+1})s_k)$ est absolument convergente donc convergente, ce qui veut exactement dire que la suite $n \mapsto \sum_{k=1}^{n-1}(u_k - u_{k+1})s_k$ est convergente.

Remarquons que d'après cette démonstration il suffit de supposer que $(u_n) \to 0$ et que la série de terme général $(u_n - u_{n+1})$ est absolument convergente.

Exemple. Si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, la suite $\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \dfrac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$ est bornée, donc si (u_n) est une suite décroissante de limite nulle, la série de terme général $(u_n e^{in\theta})$ est convergente. Dans ce cas, les séries de terme général $(u_n \cos n\theta)$ et $(u_n \sin n\theta)$ sont convergentes.

5.3 Exercices

5.1 Exercice. Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes positifs. On suppose que $u_n \sim v_n$.

1. On suppose que la série de terme général u_n converge. Démontrer que les restes des séries de terme général u_n et v_n sont équivalents.
2. On suppose que la série de terme général u_n diverge. Démontrer que les sommes partielles des séries de terme général u_n et v_n sont équivalents.
3. Comparer avec le théorème de Cesàro.

5.2 Exercice. Comparaison série intégrale : Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction décroissante telle que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$. Démontrer que la série de terme général $f(n) - \int_n^{n+1} f(t)dt$ converge.

5.3 Exercice.

1. Démontrer que la suite $\sum_{k=1}^{n} 1/k - \ln n$ converge. On note γ sa limite (cette limite est la *constante d'Euler*).
2. Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} 1/k - \ln n - \gamma$.
3. En déduire des développements limités « à deux termes » des sommes partielles de $(1/2k)$ et de $(1/2k + 1)$.
4. Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k+1}$.
5. On construit une suite v_n en alternant un terme positif de la suite $\dfrac{(-1)^k}{k+1}$, avec deux termes négatifs : formellement $v_{3k} = \dfrac{1}{2k+1}$, $v_{3k+1} = -\dfrac{1}{4k+2}$ et $v_{3k+1} = -\dfrac{1}{4k+4}$. Démontrer que la série de terme général v_n converge et calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} v_k$.
6. Même question si on alterne p termes positifs de la suite $\dfrac{(-1)^k}{k+1}$, avec q termes négatifs (avec p et q entiers strictement positifs).
7. Soit $x \in \mathbb{R}$. Trouver une façon de réarranger la série $\dfrac{(-1)^k}{k+1}$ afin qu'elle converge vers x.

5.4 Exercice. Soit (u_n) une série semi convergente de nombres réels. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que $\sum u_{\sigma(n)}$ converge vers x.

5.5 Exercice. 1. Soit (u_n) une série convergente à termes positifs. Démontrer que, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$ on a $\sum u_{\sigma(n)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

2. Soit (u_n) une série absolument convergente de nombres réels. Démontrer que, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$ on a $\sum u_{\sigma(n)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

6 Suites et séries de fonctions

Biblio pour ce chapitre : les classiques ([L M, L-F A, M Ana, RDO] *etc.*). Une très bonne référence est [Dan].

6.1 Suites de fonctions

On suppose donnée une suite (f_n) de fonctions définies dans un espace métrique X (souvent un intervalle) à valeurs dans un espace métrique Y (souvent $\mathbb{R}$). On suppose que pour tout $x \in X$ la suite $(f_n(x))$ converge vers un élément $f(x) \in Y$. On veut étudier f.

Définition. Soient X un ensemble, (Y, d) un espace métrique et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans Y.

a) La suite de fonctions (f_n) est dite *simplement convergente* si pour tout $x \in X$ la suite $(f_n(x))$ est convergente.

b) La suite de fonctions (f_n) est dite *uniformément convergente* vers une fonction $f : X \to Y$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $x \in X$ et tout $n \geqslant n_0$ on ait $d(f(x), f_n(x)) \leqslant \varepsilon$.

Proposition. *Toute suite de fonctions uniformément convergente est simplement convergente.*

Si $A \subset X$, on dira que (f_n) converge vers f *uniformément sur* A si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $x \in A$ et tout $n \geqslant n_0$ on ait $d(f(x), f_n(x)) \leqslant \varepsilon$.

Théorème d'interversion des limites. *Soient X un espace métrique, A une partie de X, $a \in \overline{A}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A à valeurs dans un espace métrique Y. On suppose que*

a) chaque f_n a une limite ℓ_n en a ;

b) la suite de fonctions (f_n) converge uniformément *vers une application $f : A \to Y$;*

c) la suite ℓ_n est convergente.

Alors f admet une limite en a ; on a $\lim\limits_{t\to a} f(t) = \lim \ell_n$.
Si Y est complet, la condition (c) résulte des deux premières.

Corollaire. *Une limite uniforme d'applications continues est continue.*

Remarque. Soit (f_n) une suite de fonctions continues. Si (f_n) converge uniformément *sur les compacts,* sa limite est encore continue.

Théorème de dérivation. *Soit I un intervalle, $a \in I$, (f_n) une suite de fonctions définies sur I (à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), dérivables sur I. Si la suite (f_n') des dérivées est* uniformément convergente *et $f_n(a)$ est convergente, alors*

a) pour tout $t \in I$, la suite $f_n(t)$ est convergente.

b) La fonction $t \mapsto \lim f_n(t)$ est dérivable et sa dérivée en t vaut $\lim f_n'(t)$.

Rappelons pour être complets le :

Théorème de convergence dominée. *Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux à valeurs complexes convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I. Si la suite des modules des f_n est majorée par une fonction g intégrable sur I, alors f est intégrable sur I et on a $\displaystyle\int_I f = \lim \int_I f_n$.*

6.2 Séries de fonctions

6.2.1 Les principaux théorèmes

On suppose donnée une suite (u_n) de fonctions définies dans un espace métrique X - (souvent un intervalle) à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ([4]). On suppose que pour tout $x \in X$, la série de terme général $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$. Le but est d'étudier S : continuité, dérivabilité, limites...

Définition. Soient X un ensemble et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctionsde X à valeurs dans $\mathbb{K}$ (ou dans un espace vectoriel normé F).

a) La série de fonctions de terme général (u_n) est dite *simplement convergente* si pour tout $x \in X$ la série de terme général $(u_n(x))$ est convergente.

b) La série de fonctions de terme général (u_n) est dite *absolument convergente* si pour tout $x \in X$ la série de terme général $(u_n(x))$ est absolument convergente.

c) La série de fonctions de terme général (u_n) est dite *uniformément convergente* (de somme S) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $x \in X$ et tout $n \geqslant n_0$ on ait

$$\left|S(x) - \sum_{k=0}^{n} u_k(x)\right| \leqslant \varepsilon.$$

d) On dit que la série de fonctions de terme général (u_n) est *normalement convergente* s'il existe une série convergente b_n telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ (assez grand) et tout $x \in X$ on ait $|u_n(x)| \leqslant b_n$.

Proposition. *Toute série de fonctions uniformément convergente est simplement convergente. Toute série de fonctions normalement convergente à valeurs* dans un espace de Banach *est uniformément convergente.*

Théorème (d'interversion des limites). *Soient X un espace métrique, A une partie de x, $a \in \overline{A}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A à valeurs dans $\mathbb{K}$ (ou dans un espace de Banach). Si chaque u_n a une limite ℓ_n en a et la série de fonctions (u_n) est* uniformément convergente *de somme S, alors la série de terme général (ℓ_n) est convergente, S admet une limite en a et on a $\lim_{t\to a} S(t) = \sum \ell_n$.*

Théorème (de continuité de la somme d'une série). *Soient X un espace métrique et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctionsde X à valeurs dans $\mathbb{K}$ (ou dans un espace vectoriel normé F). On suppose que la série de fonctions de terme général (u_n) est* uniformément convergente. *Si chaque u_n est continue en $x \in X$ alors $\sum u_n$ est continue en x. Si chaque u_n est continue alors $\sum u_n$ est continue.*

Théorème (de dérivation). *Soit I un intervalle, $a \in I$, (u_n) une suite de fonctions définies sur I, dérivables sur I. Si la série de terme général (u_n') est* uniformément convergente *et la série de terme général $(u_n(a))$ est convergente, alors*

a) pour tout $t \in I$, la série de terme général $(u_n(t))$ est convergente ;

b) la fonction $t \mapsto \displaystyle\sum_n u_n(t)$ est dérivable et sa dérivée en t vaut $\displaystyle\sum_n u_n'(t)$.

4. Tout reste vrai pour des fonctions à valeurs dans un espace de Banach E, dont on notera $| \ |$ la norme.

Rappelons aussi le :

Théorème (Intégration terme à terme)**.** *Soit* (u_n) *une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes, intégrables sur* I*, telle que la série* $\sum u_n$ *converge simplement vers une fonction* S *continue par morceaux sur* I*, et telle que la série* $\sum_n \int_I |u_n|$ *converge. Alors* S *est intégrable sur* I *et on a* $\int_I S = \sum_n \int_I u_n$*.*

6.2.2 Séries entières

Une série entière est une série de fonctions $\sum u_n$ où les u_n sont des fonctions $x \mapsto a_n x^n$ définies sur $\mathbb{K}$ (avec $a_n \in \mathbb{K}$ - ou dans un espace de Banach).

Remarque. Soit (a_n) une suite de nombres complexes. Soient $x, y \in \mathbb{C}$ avec $|x| < |y|$. Si la suite $(a_n y^n)$ est bornée la série de terme général $(a_n x^n)$ est (absolument) convergente.

Définition. On a donc $\sup\{r \in \mathbb{R}_+; |a_n| r^n \ \text{ borné}\} = \sup\{r \in \mathbb{R}_+; \sum_n |a_n| r^n < +\infty\}$. Ce nombre ($\in [0, +\infty]$) s'appelle le *rayon de convergence* de la série entière $\sum a_n x^n$.

Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$. Pour $r < R$ la série entière converge normalement sur $\{z \in \mathbb{C};\ |z| \leqslant r\}$. Pour $|x| > R$ la suite $(a_n x^n)$ n'est pas bornée. On appelle *disque ouvert de convergence* l'ensemble $\{z \in \mathbb{C};\ |z| < R\}$.

Soit $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ une série entière. On appelle *série dérivée* la série entière $\sum_{n \geqslant 1} n a_n x^{n-1}$.

Proposition. *La série dérivée* $\sum_{n \geqslant 1} n a_n x^{n-1}$ *a même rayon de convergence que la série* $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$*.*

Soit $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R. Pour $t \in]-R, R[$, posons $S(t) = \sum_{n \geqslant 0} a_n t^n$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}$.

Théorème. *La somme d'une série entière est de classe* C^∞ *sur le disque ouvert de convergence.*

Proposition. *Soit* $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ *une série entière de rayon de convergence* R*. Notons* D *le disque ouvert de convergence. Pour* $z \in D$*, posons* $S(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ *et* $T(z) = \sum_{n \geqslant 1} n a_n z^{n-1}$*. Pour* $z_0 \in D$ *on a* $\lim_{z \to z_0} \dfrac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0} = T(z_0)$*.*

Définition. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$ (*resp.* de $\mathbb{C}$) et $f : U \to \mathbb{K}$ (*resp.* $f : U \to \mathbb{C}$) une fonction. On dit que f est *développable en série entière* (sur U), si pour tout $a \in U$, il existe $r > 0$ et une série entière $\sum a_n t^n$ de rayon de convergence $\geqslant r$ tels que, pour tout $x \in U$ avec $|x - a| < r$ on ait $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - a)^n$.

Remarquons que, dans cette définition, les a_n sont déterminées par f : on a $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$.
La somme d'une série entière est développable en série entière sur son intervalle de convergence.

6.3 Exercices

6.1 Exercice. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

1. Soient $k \in \mathbb{R}_+$ et (f_n) une suite de fonctions k-lipschitziennes de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que (f_n) converge simplement vers une fonction f. Démontrer que f est k-lipschitzienne et que la convergence est uniforme.
2. Soit(f_n) une suite de fonctions convexes de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que (f_n) converge simplement vers une fonction f. Démontrer que f est convexe et que la convergence est uniforme sur tout compact de $]a, b[$. Est elle uniforme sur $]a, b[$?

6.2 Exercice. *Premier Théorème de Dini.* Soient X un espace métrique compact et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues de X dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in X$, la suite $n \mapsto f_n(x)$ est croissante, qu'elle converge vers un nombre réel $f(x)$ et que l'application f est continue. Démontrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f.

6.3 Exercice. *Deuxième Théorème de Dini.* Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications croissantes de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in [0, 1]$, la suite $n \mapsto f_n(x)$ converge vers un nombre réel $f(x)$ et que l'application f est continue. Démontrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f.

6.4 Exercice. *Théorème de Weierstraß.* Pour $f \in C([0, 1]; \mathbb{K})$, et $n \in \mathbb{N}$, notons $B_n(f)$ la fonction polynomiale $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\Big(\frac{k}{n}\Big) x^k (1 - x)^{n-k}$, où les $\dbinom{n}{k}$ sont les coefficients binomiaux ($\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$).

1. Calculer la fonction $B_n(f)$ dans les trois cas suivants :
   a) f est constante ;
   b) $f(x) = x$ - on utilisera la formule $\dfrac{k}{n}\dbinom{n}{k} = \dbinom{n-1}{k-1}$;
   c) $f(x) = x(1 - x)$ - on utilisera la formule $\dfrac{k(n-k)}{n(n-1)}\dbinom{n}{k} = \dbinom{n-2}{k-1}$.
2. On suppose que $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont des constantes. Montrer que pour $n \geqslant 1$, on a $\big(B_n(f) - f\big)(x) = ax(1 - x)/n$.
3. Soient $f \in C([0, 1]; \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x, y \in [0, 1]$, on ait $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon + K(x - y)^2$.
4. On fixe f, ε et K comme dans (3). Soit $y \in [0, 1]$. Notons g_y et h_y les fonctions $x \mapsto f(y)-\varepsilon-K(x-y)^2$ et $x \mapsto f(y) + \varepsilon + K(x - y)^2$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $B_n(g_y) \leqslant B_n(f) \leqslant B_n(h_y)$. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $|f(y) - B_n(f)(y)| \leqslant \varepsilon + Ky(1 - y)/n$.
5. Montrer que pour tout $f \in C([0, 1]; \mathbb{K})$, la suite de fonctions polynomiales $\big(B_n(f)\big)$ converge uniformément vers f.

6.5 Exercice. *Théorème de Stone-Weierstraß.*

1. Démontrer que toute fonction continue périodique est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

   Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $D_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $D_n(t) = 1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos kt$ (la fonction D_n est appelée noyau de Dirichlet).

2. En utilisant l'identité $2\cos a\cos b = \cos(a+b)+\cos(a-b)$, montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a $D_n^2(t) = 2n+1+\sum_{k=1}^{2n} 2(2n+1-k)\cos(kt)$.
   On pose $F_n(t) = (2n+1)^{-1}D_n^2(t)$ (la fonction F_n est appelée noyau de Fejer).
3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,dt = 1$ et que
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\cos t\,dt = \frac{2n}{2n+1}.$$
   Soit $\alpha_n \in]0,\pi[$ tel que $1-\cos\alpha_n = (2n+1)^{-1/2}$.
4. Montrer que $\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_n}^{2\pi-\alpha_n} F_n(t)\,dt \leqslant (2n+1)^{-1/2}$.
   Soit $f\in C(\mathbb{R};\mathbb{K})$ continue, périodique de période 2π. Posons $f_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t-s)f(s)\,ds$.
5. Montrer que f_n est un polynôme trigonométrique.
6. Soit $\varepsilon > 0$ et $n\in\mathbb{N}$; on suppose que pour tout $s,t\in\mathbb{R}$ tels que $|s-t|\leqslant\alpha_n$, on a $|f(t)-f(s)|\leqslant\varepsilon$. Montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a $|f_n(t)-f(t)|\leqslant \varepsilon + 2(2n+1)^{-1/2}\sup\{|f(s)|;\ s\in[0,2\pi]\}$.
7. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f.

6.6 Exercice. Notons D le disque $\{\lambda\in\mathbb{C}; |\lambda|\leqslant 1\}$. Pour $k\in\mathbb{N}$, $k\geqslant 1$, on note $z^k\in C(D;\mathbb{C})$ l'application $\lambda\mapsto\lambda^k$; on note aussi $z^0\in C(D;\mathbb{C})$ l'application $\lambda\mapsto 1$. Notons $A\subset C(D;\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions polynomiales, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel de $C(D;\mathbb{C})$ engendré par $\{z^k; k\in\mathbb{N}\}$.

1. Montrer que A est une sous-algèbre de $C(D;\mathbb{C})$.
2. Montrer que l'application $\varphi : f \mapsto (1/2\pi)\int_0^{2\pi} f\big(e^{it}\big)\,dt$ est continue de $C(D;\mathbb{C})$ muni de la topologie de la convergence uniforme, dans $\mathbb{C}$.
3. Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $k\geqslant 1$, on a $\varphi(z^k) = 0$. En déduire que pour tout $f\in A$, on a $\varphi(f) = f(0)$.
4. Montrer que A n'est pas dense dans $C(D;\mathbb{C})$.

6.7 Exercice. *Fonctions réglées.* Soient $a,b\in\mathbb{R}$ avec $a<b$. On dit qu'une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est *réglée* si elle est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.

1. a) Montrer qu'une fonction en escalier a une limite à droite en tout point de $[a,b[$ et une limite à gauche en tout point de $]a,b]$.
   b) Montrer qu'une fonction réglée a une limite à droite en tout point de $[a,b[$ et une limite à gauche en tout point de $]a,b]$.
2. Démontrer que toute fonction continue est réglée.
3. Démontrer que toute fonction monotone est réglée.
4. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f admet une limite à droite (notée $g(x)$) en tout point x de $[a,b[$ et une limite à gauche (notée $h(x)$) en tout point x de $]a,b]$.
   a) Soient $x\in[a,b]$ et $\varepsilon>0$. Montrer qu'il existe un intervalle J_x contenant x et ouvert dans $[a,b]$ tel que, pour tout $y\in J_x$, on ait :
   si $y<x$, alors $|f(y)-h(x)|<\varepsilon$; si $y>x$, alors $|f(y)-g(x)|<\varepsilon$.
   b) Soit $\varepsilon>0$. Démontrer qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout segment de longueur $\leqslant (b-a)/n$ contenu dans J, il existe une fonction en escalier $\theta : J\to\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x\in J$, on ait $|\theta(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon$.

c) Montrer que f est réglée.

6.8 Exercice. *Sur la fonction zêta de Riemann.*

1. Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$. Démontrer que la série de terme général (n^{-s}) converge.

   Pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$, on pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$.
2. Démontrer que la fonction ζ est continue sur $\{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s) > 1\}$.
3. Démontrer que $\zeta(s)$ a une limite lorsque $\mathrm{Re}(s) \to +\infty$.
4. Démontrer que (la restriction à l'intervalle $]1, +\infty[$ de) la fonction ζ est de classe C^∞.
5. Démontrer que l'on a un développement asymptotique $\zeta(s) = \dfrac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$ lorsque $s \to 1^+$ (où γ est la constante d'Euler).

6.9 Exercice. Démontrer que la somme d'une série entière est développable en série entière en chaque point de son disque de convergence. Plus précisément, soit $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence R ; posons $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$; pour $|z_0| < R$, il existe une série entière $\sum b_k z^k$ de rayon de convergence non nul telle que l'on ait $f(z) = \sum_{k=0} b_k (z - z_0)^k$ pour $|z - z_0|$ assez petit.

6.10 Exercice. Soit (a_n) une suite de nombres complexes. Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ et posons $B_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < R^2\}$. Pour $(x, y) \in B_R$, posons $F(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x + iy)^n$. Démontrer que F est de classe C^∞ et que pour tout $k, \ell \in \mathbb{N}$ on a $\dfrac{\partial^{k+\ell} F}{\partial x^k \partial y^\ell} = i^\ell \dfrac{\partial^{k+\ell} F}{\partial x^{k+\ell}}\cdot$

6.11 Exercice. *Théorème de Bernstein.* Soient $a > 0$ et $f :]-a, a[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-a, a[$, on a $f^{(2k)}(x) \geqslant 0$.

1. Pour $x \in]-a, a[$, posons $F(x) = f(x) + f(-x)$; pour $n \in \mathbb{N}$, notons R_n le reste de la série de Taylor de F : $R_n(x) = F(x) - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} F^{(2k)}(0)$.
   a) Démontrer que, pour tout $x \in]-a, a[$, on a $0 \leqslant R_n(x) \leqslant F(x)$.
   b) Soient $t, x, y \in \mathbb{R}$ tels que $0 < t < x < y < a$. Démontrer que $\dfrac{x-t}{y-t} \leqslant \dfrac{x}{y}\cdot$
   c) A l'aide d'une formule de Taylor avec reste intégral, en déduire que $R_n(x) \leqslant \left(\dfrac{x}{y}\right)^{2n+1} R_n(y)$. En déduire que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ et que F est développable en série entière sur $]-a, a[$.
2. Pour $x \in]-a, a[$ et $n \in \mathbb{N}$ posons $r_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$. Soit $x \in]-a, a[$.
   a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $r_{2n+1}(x) \geqslant 0$ et $r_{2n+1}(x) + r_{2n+1}(-x) = R_n(x)$.
   b) Démontrer que $\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(0)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
   c) En déduire que $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$ et que f est développable en série entière sur $]-a, a[$

6.12 Exercice. On note a_n le nombre de parenthésages sur un composé de n éléments d'un ensemble E muni d'une loi interne.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ on a $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$ (avec la convention $a_1 = a_2 = 1$).

2. Considérons la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$. On suppose que son rayon de convergence R est strictement positif. On note S sa somme. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a $S(x)^2 - S(x) + x = 0$.
3. Trouver une fonction S développable en série entière sur un intervalle $]-R, R[$ qui vérifie cette condition ; la développer en série entière et en déduire la valeur de a_n.

6.13 Exercice. On considère la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n}$.

1. Vérifier que le rayon de convergence de cette série est 1.

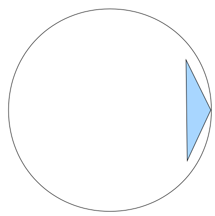
   Pour $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, on pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n}$.
2. Démontrer que $f(t) \to +\infty$ lorsque t est réel et tend vers 1 (par valeurs inférieures).
3. Soit $u \in \mathbb{C}$ tel que $u^{2^m} = 1$ pour un $m \in \mathbb{N}$. Démontrer que $f(ut)$ n'a pas de limite lorsque t est réel et tend vers 1 (par valeurs inférieures).
4. En déduire que pour tout $u \in \mathbb{C}$ de module 1, la fonction f n'a pas de limite en u.

6.14 Exercice. *Théorème d'Abel.* Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. Pour $|z| < 1$, on pose $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$. On suppose aussi que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge, et on note S sa somme.

1. Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Démontrer que, pour $|x| < 1$, la série de terme général $S_n x^n$ est convergente et que l'on a $f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$ et $f(x) - S = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(S_n - S)x^n$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer qu'il existe alors N_0 tel que pour tout $x \in [0, 1[$ on ait

$$|f(x) - S| \leqslant (1-x)\left|\sum_{n=0}^{N_0}(S_n - S)x^n\right| + \varepsilon x^{N_0+1}.$$

3. Démontrer que $\lim_{t\to 1_-} f(t) = S$.
4. (*) On considère un triangle T dans $\mathbb{C}$ ayant pour sommets 1 d'une part et deux points de module strictement inférieur à 1 d'autre part. Démontrer que f est continue sur T.



7 Fonctions d'une variable réelle

7.1 Continuité

Pour ce chapitre les références classiques ([L M, L-F A, M Ana, RDO] *etc.*)

7.1.1 Définitions des limites et continuité

On définit l'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ comme $\mathbb{R}$ avec deux points supplémentaires notés $-\infty$ et $+\infty$.

Soit B une partie de $\mathbb{R}$. On écrit $+\infty \in \overline{B}$ si B n'est pas majorée et $-\infty \in \overline{B}$ si B n'est pas minorée.

Définition. Soit A une partie de $\mathbb{R}$, (X, d) un espace métrique (en général $\mathbb{R}$ ou peut-être $\mathbb{C}$...) et $f : A \to X$ une application. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in X$.

a) Soit B une partie de A telle que $a \in \overline{B}$. Si $a \in \mathbb{R}$, on écrit $\ell = \lim\limits_{x\to a,\ x\in B} f(x)$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que pour $x \in B$ on ait $|x - a| < \alpha \Rightarrow d(f(x), \ell) < \varepsilon$. Si $a = +\infty$ (*resp.* $a = -\infty$) on écrit $\ell = \lim\limits_{x\to a,\ x\in B} f(x)$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour $x \in B$ on ait $x > m \Rightarrow d(f(x), \ell) < \varepsilon$ (*resp.* $x < m \Rightarrow d(f(x), \ell) < \varepsilon$).

b) On dit que f *admet la limite à gauche* ℓ en a et on écrit $\ell = \lim\limits_{x\to a,\ x<a} f(x)$ ou $\ell = \lim\limits_{x\to a_-} f(x)$ ou $\ell = \lim\limits_{a_-} f$ si $a \in \overline{B}$ pour $B = A \cap]-\infty, a[$ et $\ell = \lim\limits_{x\to a,\ x\in B} f(x)$.

c) On dit que f *admet la limite à droite* ℓ en a et on écrit $\ell = \lim\limits_{x\to a,\ x>a} f(x)$ ou $\ell = \lim\limits_{x\to a_+} f(x)$ ou $\ell = \lim\limits_{a_+} f$ si $a \in \overline{B}$ pour $B = A \cap]a, +\infty[$ et $\ell = \lim\limits_{x\to a,\ x\in B} f(x)$.

d) On dit que f est *continue à gauche* en a si $a \in A$ et f admet la limite à gauche $f(a)$ en a.

e) On dit que f est *continue à droite* en a si $a \in A$ et f admet la limite à droite $f(a)$ en a.

f) On dit que f est *continue* en a si f est continue à gauche et à droite en a.

g) Si f est continue en tout point de A on dit que f est continue sur A.

7.1.2 Relations de comparaison entre fonctions

Définition (Prépondérance, négligeabilité, équivalence)**.** Soit I un intervalle non réduit à un point et ℓ un point de I ou une extrémité de I (éventuellement $\ell = \pm\infty$). Soient f, g deux fonctions définies sur $I \setminus \{\ell\}$ et à valeurs réelles. On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de ℓ. On écrit :

a) $f = O(g)$ si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est bornée au voisinage de ℓ.

b) $f = o(g)$ si $\lim\limits_{x\to\ell} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. On dit alors que f est *négligeable* devant g au voisinage de ℓ.

c) $f \sim g$ si $\lim\limits_{x\to\ell} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. On dit alors que f est *équivalente* à g au voisinage de ℓ.

7.1.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue. Si $x \in \mathbb{R}$ et un nombre compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = x$.*

Commentaire. Le théorème des valeurs intermédiaires est un théorème d'existence. La méthode de dichotomie permet d'exhiber (d'approcher) un point en lequel la valeur est atteinte. Selon le contexte, on peut avoir d'autres méthodes plus rapides.

Rappelons qu'une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x \leqslant y \leqslant z$, si $x \in I$ et $z \in I$ alors $y \in I$. Une façon équivalente dénoncer ce théorème est donc :

Théorème des valeurs intermédiaires. *L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.*

Théorème de bijection. *Soit f une application définie sur un intervalle et à valeurs réelles. Deux parmi les énoncés ci-dessous impliquent le troisième :*
- *f est continue ;*
- *f est injective et son image est un intervalle ;*
- *f est strictement monotone.*

Proposition. *Soit f une application continue, strictement monotone définie sur un intervalle et à valeurs réelles. L'application réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $f(I)$ est strictement monotone de même monotone que f et continue.*

7.1.4 Continuité sur un segment

Un segment est un intervalle fermé et borné : c'est donc un ensemble de la forme $[a, b]$ où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leqslant b$ (ou l'ensemble vide).

Théorème des extremums. *L'image par une application continue (à valeurs réelles) d'une partir fermée et bornée de $\mathbb{R}$ est fermée et bornée. En particulier, si $K \subset \mathbb{R}$ une partie fermée, bornée et non vide et $f : K \to \mathbb{R}$ est une application continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Théorème de Heine. *Toute application continue d'un espace métrique compact à valeurs dans un espace métrique est uniformément continue.*

Théorème de Heine de continuité uniforme sur un segment. Fonctions continues par morceaux sur un segment, approximation uniforme des fonctions continues sur un segment par des fonctions en escalier, des fonctions affines par morceaux, des polynômes (théorème de Weierstrass admis).

7.2 Dérivabilité

7.2.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition. Soient I un intervalle non réduit à un point et $a \in I$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est *dérivable* en a si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ (définie sur $I \setminus \{a\}$) admet une limite en a. Lorsque cette limite existe, on l'appelle la *dérivée* de f en a et on la note $f'(a)$.
Si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite à gauche (*resp.* à droite) en a, on dit que f est *dérivable à gauche* (*resp. à droite*) en a, et cette limite à gauche (*resp.* à droite) est appellée *dérivée à gauche* (*resp.* à droite) de f en a et est notée $f'_g(a)$ (*resp.* $f'_d(a)$).
Si f est dérivable en tout point de I on dit que f est *dérivable* sur I.

Si f est dérivable (en a), elle est continue (en a).

Proposition. *a) Soient I un intervalle non réduit à un point et $a \in I$. Soient f et g deux applications de I dans $\mathbb{R}$. Si f et g sont dérivables en a alors $f+g$ et fg sont dérivables en a et l'on a $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ et $(fg)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$.*

b) Soient I et J deux intervalles non réduits à un point et $a \in I$. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux applications. On suppose que $f(I) \subset J$. Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et l'on a $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

c) Soient I et J deux intervalles non réduits à un point et $a \in I$. Soient $f : I \to J$ une application bijective. Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et l'on a $(f^{-1})'(a) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

7.2.2 Théorèmes des accroissements finis

Théorème de Rolle. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application. On suppose que f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ avec $f'(c) = 0$.*

Théorème des accroissements finis. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application. On suppose que f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ avec $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*

Lorsque f est définie sur un intervalle mais à valeurs dans $\mathbb{C}$ (ou plus généralement dans un espace normé), on a encore une notion de dérivée (limite de $\dfrac{1}{x-a}(f(x) - f(a))$), mais on n'a pas d'égalité des accroissements finis comme ci-dessus. Par contre, on a :

Inégalité des accroissements finis. *Soient E un espace vectoriel normé, $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \to E$ une application. On suppose que f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. On suppose que l'application $x \mapsto \|f'(x)\|$ est bornée sur $]a, b[$ et on pose $\sup\{\|f'(x)\|;\quad a < x < b\} = M$. Alors on a $\|f(b) - f(a)\| \leqslant (b - a)M$.*

Conséquences. *Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable.*

a) L'application f est croissante (resp. décroissante) si et seulement si f' est positive (resp. négative).

b) L'application f est lipschitzienne (de rapport k) si et seulement si f' est bornée ($\sup_I |f'(x)| \leqslant k$).

En particulier, f est constante si et seulement si $f' = 0$.

7.2.3 Dérivées successives

Soient I un intervalle non réduit à un point et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est de classe C^1 si elle est dérivable et f' est continue. Puis, par récurrence, pour $k \geqslant 2$, on dit que f est de classe C^k si elle est dérivable et f' est de classe C^{k-1}. On dit que f est de classe C^∞ si elle est de classe C^k pour tout k.

Si f' est dérivable on note f'' la dérivée de f'... On définit ainsi par récurrence la dérivée k-ième de f et l'on note $f^{(k)}$ la dérivée de $f^{(k-1)}$.

Si f et g sont de classe C^k, alors $f+g$ et fg sont de classe C^k et on a $(f+g)^{(k)} = f^{(k)} + g^{(k)}$ et

$$(fg)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(j)} g^{(k-j)} \qquad \text{(Formule de Leibniz)}$$

où les $\binom{k}{j}$ sont les coefficients binomiaux (et avec les conventions $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$...).

Soient I et J deux intervalles non réduits à un point et $a \in I$. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux applications. On suppose que $f(I) \subset J$. Si f et g sont de classe $C^{(k)}$, il en va de même pour $g \circ f$.

Soient I et J deux intervalles non réduits à un point et $a \in I$. Soient $f : I \to J$ une application bijective de classe $C^{(k)}$. Si f' ne s'annule pas, alors f^{-1} est de classe $C^{(k)}$.

7.2.4 Formules de Taylor

Soient I un intervalle non réduit à un point et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Soit $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que f admet une dérivée n-ième en a si f est $n-1$ fois dérivable sur I (ou du moins au voisinage de a) et $f^{(n-1)}$ est dérivable en a.

On suppose dans la suite que f est n fois dérivable en a. Pour $x \in I$, on pose $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ et $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$.

Les diverses formules de Taylor donnent une expression du reste R_n.

Formule de Taylor-Young. *Si f est n fois dérivable en a, alors $R_n(x) = o(x-a)^n$.*

Formule de Taylor-Lagrange. *Soit $b \in I$ distinct de a. Si f est $n+1$ fois dérivable sur I, alors pour tout $b \in I$ (distinct de a), il existe $c \in I$, (strictement) compris entre a et b tel que*

$$R_n(b) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Formule de Taylor avec reste intégrale. *Soit $b \in I$ distinct de a. Si f est de classe C^{n+1} sur I, alors pour tout $b \in I$, on a*

$$R_n(b) = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n \, dt.$$

Pour bien comparer ces formules, on peut faire l'hypothèse sur la dérivée $n+1$-ième de f dans la formule de Taylor-Young tout en faisant porter la conclusion sur R_n :

Formule de Taylor-Young. *Si f est $n+1$ fois dérivable en a, alors*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + o(x-a)^{n+1}.$$

On peut remarquer que, pour $n = 0$, cette formule de Taylor-Young est juste la définition de la dérivée, Taylor-Lagrange est le théorème des accroissements finis, et reste intégrale est le lien entre primitives et intégrales.

Pour être complet, disons que si f est à valeurs complexes ou plus généralement à valeurs dans un espace vectoriel normé, les formules de Taylor-Young et avec reste intégrale restent inchangées ; la formule de Taylor-Lagrange, devient une inégalité. Citons aussi la formule de Taylor-Young à plusieurs variables...

Disons aussi que Taylor-Young est la plus souple à utiliser et permet de calculer des limites, en utilisant en général des opérations sur les développements limités, mais ne peut pas faire plus.

Citons rapidement quelques applications des formules de Taylor.

- Calcul de certaines limites (Taylor -Young).
- Condition nécessaire et condition suffisante pour l'existence d'un extremum (Taylor-Young d'ordre 2 - à une ou plusieurs variables).
- Allure d'une courbe (Taylor-Young).
- Estimation d'erreur dans l'approximation d'un nombre réel solution de $f(x) = 0$ ou d'une intégrale (Taylor Lagrange ou reste intégrale).
- Inégalités de Kolmogorov (Taylor Lagrange - *cf.* exerc. 7.18).
- Développement en série entière (Taylor Lagrange et surtout avec reste intégrale *cf.* exerc. 7.17).
- Théorème de Bernstein (Taylor avec reste intégrale *cf.* exerc. 6.11).

7.2.5 Fonctions convexes

Définition. Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est dite *convexe* si son *épigraphe* $\{(x, u) \in I \times \mathbb{R}; f(x) \leqslant u\}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Proposition. *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *l'application f est convexe ;*

(ii) *pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0, 1]$, on a $f\big(tx + (1 - t)y\big) \leqslant tf(x) + (1 - t)f(y)$;*

(iii) *pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour toute suite $x_1, \dots, x_n$ d'éléments de I et toute suite $t_1, \dots, t_n$ d'éléments de $\mathbb{R}_+$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, on a $\displaystyle f\Big(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i)$. (Inégalité de Jensen)*

Soient I un intervalle et (f_n) une suite de fonctions convexes $f_n : I \to \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in I$, la suite $\big(f_n(x)\big)$ converge vers un nombre réel $f(x)$. Alors il est clair que f vérifie la propriété (ii) de la prop. 7.2.5 ; donc f est convexe.

Lemme. *Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *la fonction f est convexe ;*

(ii) *pour tout $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$, on a $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \dfrac{f(z) - f(x)}{z - x}$;*

(iii) *pour tout $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$, on a $\dfrac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \dfrac{f(z) - f(y)}{z - y}$;*

(iv) *pour tout $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$, on a $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \dfrac{f(z) - f(y)}{z - y}$.*

On peut résumer ce lemme par l'énoncé suivant.

L'application f est convexe si et seulement si, pour tout $x \in I$, l'application « taux d'accroissement » $y \mapsto \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$ est croissante sur $I \setminus \{x\}$.

Proposition. *Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une application.*

a) Si f est convexe, alors f est continue sur $\mathring{I}$ et y admet des dérivées à gauche et à droite en tout point ; celles-ci sont croissantes.

b) Si f est continue et dérivable sur $\mathring{I}$, alors f est convexe si et seulement si f' est croissante.

c) Si f est continue et dérivable sur $\mathring{I}$, alors f est convexe si et seulement si la courbe de f est située au dessus de toutes les tangentes de f.

d) Si f est continue et si f est deux fois dérivable sur $\mathring{I}$, alors f est convexe si et seulement si f'' est positive.

On utilise les fonctions convexes pour établir des inégalités : on démontre (grâce au critère de la dérivée seconde par exemple) qu'une fonction est convexe, et on en déduit des inégalités à l'aide de l'inégalité de Jensen. On peut citer l'inégalité arithmético-géométrique. Une des plus utiles est l'inégalité de Hölder :

Inégalité de Hölder. *Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $1/p + 1/q = 1$. Pour des éléments $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a*

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\Big| \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\Big)^{1/q}.$$

7.3 Exercices

7.3.1 Continuité

7.1 Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{-\infty} f$ existent et sont finies. Démontrer que f est bornée et uniformément continue.

7.2 Exercice. (*cf.* [M Exos, Analyse 1, 4.4.9]) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose $\phi(x) = \sup\{f(t);\ t \in [0, x]\}$. Démontrer que ϕ est croissante et continue.

7.3 Exercice. Etudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$ et $f(p/q) = 1/q$ si $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux.

7.4 Exercice.

1. Déterminer toutes les fonctions continues (*resp.* monotones) f sur $\mathbb{R}$, vérifiant l'équation fonctionnelle $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$. (*Indication : montrer que f est linéaire sur $\mathbb{Q}$ et utiliser l'hypothèse de continuité (resp. de monotonie) pour conclure*).
2. Soit E un supplémentaire de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, vu comme sous-espace vectoriel, de sorte que tout x réel admet une unique décomposition $x = r + e$ avec $r \in \mathbb{Q}$ et $e \in E$. Soit f définie par $f(x) = r$. Vérifier que f satisfait l'égalité du 1 ([5]).
3. Déterminer toutes les fonctions continues f sur $\mathbb{R}$, telles que, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on ait $f\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big) = \dfrac{f(x) + f(y)}{2}$.
4. Variante : démontrer qu'une fonction continue f sur $\mathbb{R}$ est convexe si et seulement si $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big) \leqslant \dfrac{f(x) + f(y)}{2}$.

7.5 Exercice. *Prolongement des fonctions continues définies sur un fermé.* Soit F un fermé non vide de $\mathbb{R}$ et notons U son complémentaire. Soit $f : F \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Si $x \in \mathbb{R}$, on pose $a(x) = \sup\{y \in F;\ y \leqslant x\}$ et $b(x) = \inf\{y \in F; y \geqslant x\}$. Démontrer que $a(x) \leqslant x \leqslant b(x)$.

5. On peut montrer qu'un tel contre exemple ne peut pas être mesurable au sens de Lebesgue.

2. En déduire que U est réunion disjointe d'une famille au plus dénombrable d'intervalles ouverts.
3. Construire une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g = f$ sur F, et affine sur tout intervalle $[a, b]$ tel que $]a, b[\subset U$. Démontrer qu'une telle g est continue sur $\mathbb{R}$.

7.3.2 Bijectivité et fonctions réciproques

7.6 Exercice. (*cf.* [M Exos, Analyse 1, 4.5.12]) Existe-t-il une bijection continue $[0, 1[\to \mathbb{R}$?

7.7 Exercice. (*cf.* [M Exos, Analyse 1, 4.7.8]) Soient $x_1, ..., x_7$ sept nombres réels. Démontrer qu'il existe $i \neq j$ tels que

$$0 \leqslant \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

7.3.3 Dérivabilité

7.8 Exercice. (*cf.* [M Exos, Analyse 1, 5.2.1])

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$. Démontrer qu'il en est de même pour P'.
2. Soit P un polynôme réel scindé. Démontrer que P' est scindé.

7.9 Exercice. (*cf.* [M T], ou [M Exos, Analyse 1, 5.1.6]) Soient I un intervalle ouvert contenant 0 et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0, et telle que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(2x) - f(x)}{x}$ admet en 0 une limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Le but de l'exercice est de démontrer que f est dérivable en 0.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que l'on a
$$f(x) - f(2^{-n}x) = \ell x(1 - 2^{-n}) + x \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} \varepsilon(2^{-k}x)$$
où ε est une fonction tendant vers 0 en 0.
2. Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} \varepsilon(2^{-k}x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 et conclure.

7.10 Exercice. On se propose de donner deux autres démonstrations du théorème de Darboux (*cf.* 3.12) : Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Soient $a, b \in I$ avec $a < b$. On veut démontrer que $f'([a, b])$ contient toute valeur comprise entre $f'(a)$ et $f'(b)$.

Première démonstration. Pour $x \in I \setminus \{a\}$, posons $g(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ et $g(a) = f'(a)$ et, pour $x \in I \setminus \{b\}$, posons $h(x) = \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b}$ et $h(b) = f'(b)$.

1. Démontrer que $g([a, b])$ et $h([a, b])$ et $g([a, b]) \cup h([a, b])$ sont des intervalles.
2. Conclure

Deuxième démonstration. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que $f'(a) < f'(b)$. Soit $c \in]f'(a), f'(b)[$. Posons $g(x) = f(x) - cx$. Démontrer que le minimum de g sur $[a, b]$ n'est atteint ni en a ni en b et conclure.

7.3.4 Convexité

7.11 Exercice. (*cf.* [M Exos, Analyse 1, 5.6.10]) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Démontrer que $\dfrac{f(x)}{x}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ quand $x \to +\infty$.
2. Si $\ell \in \mathbb{R}$, montrer que $f(x) - \ell x$ admet aussi une limite.

7.12 Exercice. Soit $n \geqslant 3$ et un polygone convexe à n cotés inscrit dans le cercle unité. Démontrer que son périmètre est maximal si et seulement s'il est régulier. (*Indication : se ramener à une inégalité de convexité pour la fonction sinus sur* $[0, \pi]$).

7.13 Exercice. *Inégalité d'Hadamard*

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(u_1, \ldots, u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $(c_1, \ldots, c_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$. Établir l'inégalité : $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} u_i^{c_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$. (NB : lorsque les c_i valent $1/n$ il s'agit de la comparaison classique entre moyennes géométrique et arithmétique).
2. Soit $S = (s_{ij})$ une matrice symétrique définie positive. Démontrer que $\det S \leqslant \displaystyle\prod_{i=1}^{n} s_{ii}$. (*Indication : écrire* $S = {}^t PDP$, *où* $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *et P est orthogonale, exprimer les s_{ii} en fonction des* λ_i, *et utiliser 1*).
3. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, montrer que $|\det A| \leqslant \prod \|C_i\|_2$, où les C_i sont les vecteurs colonnes de A et $\| \ \|_2$ désigne la norme euclidienne standard.
4. Étendre le résultat à $M_n(\mathbb{R})$. Cette inégalité s'appelle inégalité d'Hadamard.

7.3.5 Dérivées successives, formules de Taylor

7.14 Exercice. On pose $f(x) = \sin(x^2)$. Calculer $f^{(14)}(0)$.

7.15 Exercice. Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle ouvert, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. Donner à l'aide d'une intégrale l'expression de l'application $F : I \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1} telle que $F^{(k)}(a) = 0$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$ et $F^{(n+1)} = f$.

7.16 Exercice. (*cf.* [M Exos, Analyse 1, 5.3.22] pour le cas $n = 0$) Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} et $a \in \mathbb{R}$. Pour $h \in \mathbb{R}$, on écrit

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta_h h).$$

On suppose en outre que $f^{(n+1)}(a) \neq 0$. Démontrer que pour h assez petit, θ_h est uniquement défini, et que $\displaystyle\lim_{h \to 0} \theta_h = \frac{1}{n+1}$.

7.17 Exercice. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière en 0. Pour cela, deux méthodes.

1. Écrivons $(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_k(x)$ où R_k est un reste de Taylor. Démontrer à l'aide d'une formule de Taylor que $R_k(x) \to 0$ pour $x \in]-1, 1[$.
2. Démontrer que la série entière $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ est convergente pour $x \in]-1, 1[$ et que sa somme satisfait $(1+x)S' = \alpha S$. Conclure.

7.18 Exercice. *Inégalité de Kolmogorov* ([M Exos, Analyse 1, 5.3.25]) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^2. On suppose que f et f'' sont bornées et on pose $M_0 = \sup\{|f(t)|;\ t \in \mathbb{R}\}$ et $M_2 = \sup\{|f''(t)|;\ t \in \mathbb{R}\}$.

1. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange, montrer que pour tous x et $h > 0$ on a
$$|f'(x)| \leqslant \frac{M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}\cdot$$
2. On pose $M_1 = \sup\{|f'(t)|;\ t \in \mathbb{R}\}$. Démontrer que M_1 est fini et qu'on a l'inégalité $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$.
3. Plus généralement on suppose que f est n fois dérivable et on pose $M_k = \sup\{|f^{(k)}(t)|;\ t \in \mathbb{R}\}$ (ce « sup » est pris dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$). Démontrer que si M_0 et M_n sont finis, alors pour tout k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on a $M_k \leqslant 2^{k(n-k)/2} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}$.

7.19 Exercice. *Méthode de Laplace* (*cf.* [C F L, ex. 9-9] ou [LeSc, Tome 3, ex. M3]) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ une fonction de classe C^2. On suppose que f admet un unique maximum en $c \in]a,b[$ et que, de plus, $f''(c) < 0$. Soit également $g : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue. Démontrer que pour $n \to \infty$ on a l'équivalent suivant :
$$\int_a^b g(x)f(x)^n\,dx \sim g(c)f(c)^n \sqrt{\frac{2\pi f(c)}{-f''(c)n}}\cdot$$

7.20 Exercice.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $f(x) = \exp -\dfrac{1}{x^2}$ si $x > 0$. Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Construire une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$, positive, nulle hors de $[-1,1]$, et valant 1 sur $[-1/2, 1/2]$.

8 Fonctions de plusieurs variables

Pour ce chapitre, en dehors des livres « généralistes » (*e.g.* [L M, L-F A, M Ana, RDO] *etc.*), on peut vraiment recommander [Rouvière].

Munissons $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ de normes, notées $\| \ \|$ sans préciser lesquelles : de toute façon elles sont toutes équivalentes !

Les fonctions considérées dans cette section sont définies sur un ouvert de $E = \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $F = \mathbb{R}^p$. Plus généralement, on peut supposer que E et F sont des espaces de Banach.

8.1 Fonctions différentiables

Soit Ω un ouvert de $E = \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to F = \mathbb{R}^p$ une application.

Dérivée selon un vecteur. Soient $a \in \Omega$ et $v \in \mathbb{R}^n$ un vecteur. L'ensemble $U = \{t \in \mathbb{R};\ a + tv \in \Omega\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0. On dit que f est *dérivable en a selon le vecteur v* si l'application $t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0. En particulier, lorsque v est le i-ème vecteur e_i de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on dit que f admet une dérivée partielle qui se note alors $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

Développement limité à l'ordre 1. Comment écrire le développement limité à l'ordre 1 de f en un point a de Ω ? On devra écrire $f(a + h) = f(a) + L(h) + \varepsilon(h)$ où $L(h)$ doit être du premier degré donc *une application linéaire* et $\varepsilon(h)$ doit être un o de h, autrement dit $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\|\varepsilon(h)\|}{\|h\|} = 0$.

Remarquons que si f admet un tel développement limité, alors, pour tout $v \in E$, on a $f(a + tv) = f(a) + tL(v) + \varepsilon(tv)$, d'où l'on déduit que $L(v)$ est alors la dérivée de f selon le vecteur v (d'où l'on déduit l'unicité de L).

Définition (Différentiabilité en un point)**.** On dit que f est *différentiable* en a si elle admet un développement limité $f(a + h) = f(a) + L(h) + \varepsilon(h)$ comme ci-dessus. L'application linéaire $L : E \to F$ ainsi définie s'appelle la *différentielle* de f en a et se note $(df)_a$.

Interprétation géométrique (plan tangent à une surface). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application. On considère la surface $\Sigma = \{(x, y, f(x, y));\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Si $(a, b, c) \in \Sigma$ et f est différentiable en (a, b) de différentielle $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, le plan $P = \{(a+h, b+k, c+L(h, k));\ (h, k) \in \mathbb{R}^2\}$ est tangent en (a, b, c) à la surface Σ.

Matrice jacobienne, déterminant jacobien. L'application linéaire $(df)_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est une matrice à p lignes et n colonnes, appelée *matrice jacobienne* : c'est la matrice $J_a = (b_{i,j})$ où $b_{i,j} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$. Lorsque $n = p$, le déterminant de la matrice jacobienne s'appelle *déterminant jacobien.*

Proposition (Différentielle d'une fonction composée)**.** *Soient $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$ et $G = \mathbb{R}^q$ des espaces de Banach, U un ouvert de E, V un ouvert de F, $f : U \to V$ et $g : V \to G$ des applications. Si f est différentiable en un point $a \in U$ et g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et l'on a $(d(g \circ f))_a = (dg)_{f(a)} \circ (df)_a$.*

Inégalité des accroissements finis. *Soient E et F des espaces de Banach. On note $\| \ \|_E$ et $\| \ \|_F$ leurs normes respectives. Soient Ω un ouvert* convexe *de E et $f : \Omega \to F$ une application différentiable en tout point de Ω. Soit $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in \Omega$, on ait $|||(df)_x||| \leqslant M$. Alors pour tout $x, y \in \Omega$, on a $\|f(x) - f(y)\|_F \leqslant M\|x - y\|_E$.*

La démonstration de l'inégalité des accroissements finis n'est pas au programme ; elle l'est si l'on suppose f de classe C^1.

Corollaire. *Une application différentiable de différentielle nulle définie sur un ouvert connexe d'un espace de Banach à valeurs dans un espace de Banach est constante.*

Une fonction f définie sur un ouvert $\Omega \subset E = \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $F = \mathbb{R}^p$ est dite de classe C^1 si l'application qui à tout point a de Ω fait correspondre la différentielle df_a de f en a est continue (comme application de Ω dans $\mathcal{L}(E, F) = M_{p,n}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{pn}$).

Théorème. *Pour qu'une fonction soit de classe C^1 sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, il faut et il suffit qu'elle admette des dérivées partielles continues sur Ω.*

La composée de deux fonctions de classe C^1 est de classe C^1.

Gradient. Soient E un espace vectoriel *euclidien*, Ω un ouvert de E et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. Pour $a \in \Omega$, l'application $(df)_a$ est une forme linéaire sur E. Il existe un vecteur $(\nabla f)_a$ appelé gradient de f en a tel que, pour $h \in E$ on ait $(df)_a(h) = \langle (\nabla f)_a | h \rangle$. Si $E = \mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique, $(\nabla f)_a$ est le vecteur de composantes $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

8.2 Différentielles d'ordre supérieur

Soit $f : \Omega \to F$ une application de classe C^1. Si sa différentielle qui est application df de Ω dans $\mathcal{L}(E, F)$ est de classe C^1, on dira que f est de classe C^2. Par récurrence, on dit que f est de classe C^k si df est de classe C^{k-1}. Cela revient à dire que toutes les dérivées partielles d'ordre $\leqslant k$ existent et sont continues.

Théorème de Schwarz. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to F$ de classe C^2. Alors pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.*

Soient Ω un ouvert de E et $f : \Omega \to F$ de classe C^2. Pour $a \in \Omega$ l'application l'application $(d^2 f)_a = (d(df))_a$ est une application linéaire de E dans $\mathcal{L}(E, F)$ donc une application bilinéaire de $E \times E$ dans F. Le théorème de Schwarz dit que l'application bilinéaire $(d^2 f)_a$ est symétrique.

Formule de Taylor-Young à l'ordre 2. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to F$ de classe C^2. On a un développement limité pour f au voisinage d'un point $a = (a_1, \dots, a_n)$ de Ω et $h = (h_1, \dots, h_n)$ tel que $a + h \in \Omega$,

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + o(\|h\|^2) \\ &= f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n h_i^2 \frac{\partial^2 f}{(\partial x_i)^2}(a) + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + o(\|h\|^2). \end{aligned}$$

Extremums locaux. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie, Ω un ouvert de E, a un point de Ωet $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application.*

a) Si f est différentiable en a et présente un extremum local en a, alors la forme linéaire $(df)_a$ est nulle.

b) Si f est de classe C^2 et présente un minimum (resp. maximum) local en a, la forme bilinéaire symétrique $(d^2 f)(a)$ est positive (resp. négative).

c) Si f est de classe C^2, si $(df)_a = 0$ et si $(d^2 f)_a$ est définie positive (resp. définie négative) alors f présente un minimum (resp. maximum) local en a.

Supposons que $E = \mathbb{R}^2$. Posons $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(a)$ et $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$. Alors $(d^2 f)_a$ est définie positive (*resp.* négative) si et seulement si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ (*resp.* $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$).

8.3 Difféomorphismes

Définition. Soient U un ouvert de E et V un ouvert de F. Un *difféomorphisme* de classe C^k de U sur V est une application bijective $f : U \to V$ telle que f et f^{-1} soient de classe C^k.

Proposition. *On suppose que $f : U \to V$ est un homéomorphisme. Si f est différentiable en a et df_a est un inversible, alors f^{-1} est différentiable en $f(a)$ et $(df^{-1})_{f(a)} = (df)_a^{-1}$. Si de plus f est de classe C^k, f^{-1} est de classe C^k.*

Proposition. *Soient E et F des espaces de Banach. L'ensemble $U = \{T \in \mathcal{L}(E,F);\ T$ homéomorphisme$\}$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E,F)$ et $\varphi : T \mapsto T^{-1}$ y est continue, de classe C^∞. On a $(d\varphi)_T(h) = -T^{-1}hT^{-1}$.*

Théorème d'inversion locale. *Soient E et F des espaces de Banach, U un ouvert de E et $f : U \to F$ de classe C^1. Soit $a \in U$. On suppose que $(df)_a$ est inversible. Il existe un voisinage ouvert U_0 de a tel que la restriction de f à U_0 soit un difféomorphisme de classe C^1 de U_0 sur un ouvert de F.*

D'après la proposition ci-dessus, si f est de plus de classe C^k, il en va de même pour sa réciproque.

Théorème des fonctions implicites. *Soient E, F et G des espaces de Banach U un ouvert de $E \times F$ et $f : U \to G$ une application de classe C^1. Soit $a = (b,c)$ un point de U. On suppose que $f(a) = 0$ et que la différentielle partielle $(d_2 f)_a : F \to G$ est inversible. Alors il existe des ouverts V, W de E et F et une application $g : V \to W$ de classe C^1 tels que $\{b,c\} \in V \times W \subset U$, $g(b) = c$ et, pour $(x,y) \in V \times W$ on ait l'équivalence $f(x,y) = 0 \iff y = g(x)$. On a $(dg)_b = -(d_2 f)_a^{-1}(d_1 f)_a$. Si f est de classe C^k, il en va de même pour g.*

8.4 Exercices

8.1 Exercice. On munit $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ de leur topologie usuelle. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

1. Calculer df.
2. En quels points de $\mathbb{R}^2$ l'application df est-elle nulle ?
3. Pour chacun de ces points déterminer s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum local ou global.

8.2 Exercice. (Point de Fermat) Soient E un espace affine euclidien et $A \in E$. Notons f_A l'application $M \mapsto AM$ qui à $M \in E$ associe sa distance à A.

1. Démontrer que f_A est de classe C^2 dans $E \setminus \{A\}$ et calculer sa différentielle et sa différentielle seconde (*on pourra bien choisir un repère et effectuer un développement limité*).

   Soient A, B, C trois points non-alignés de E. Posons $f = f_A + f_B + f_C$.
2. a) Démontrer que f atteint son minimum en un point au moins.
   b) Établir que la fonction f est strictement convexe sur E.
   c) En déduire que f possède un unique minimum situé dans le plan affine contenant le triangle ABC.

3. Supposons que f atteigne son minimum en un point F de $E \setminus \{A, B, C\}$.
   a) Établir que ce point satisfait à l'équation suivante : $\overrightarrow{FA}/FA + \overrightarrow{FB}/FB + \overrightarrow{FC}/FC = \overrightarrow{0}$.
   b) Dans le cas précédent, démontrer que les trois angles sous les quels le point F voit les côtés du triangle sont égaux à $2\pi/3$. (On dit pour cela que F est le *centre optique* du triangle ABC.
   c) Dans quels cas est-ce-que F coïncide avec le centre de gravité G ?
   d) Le triangle ABC est bordé extérieurement par trois triangles équilatéraux BCA', CAB' et ABC'. Démontrer que F est situé sur les cercles circonscrits de ces trois triangles.
   e) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{A'FC}$ et en déduire que A, F, A' sont alignés. En déduire que les droites AA', BB' et CC' sont concourantes en F.
4. On suppose que l'un des angles du triangle ABC est supérieur ou égal à $2\pi/3$. démontrer que le minimum de f est atteint en l'un des sommets. Lequel ?
5. On suppose qu'aucun des angles du triangle ABC n'est supérieur ou égal à $2\pi/3$. Démontrer qu'il existe un centre optique F de ABC et que ce point est l'unique minimum de f sur $\mathbb{R}^2$.

8.3 Exercice. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, posons $F(x, y) = x - y + \sin xy$.

1. Démontrer qu'il existe un intervalle ouvert I contenant 0 et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tels que $f(0) = 0$ et, pour tout $x \in I$ on ait $F(x, f(x)) = 0$.
2. Calculer $f'(0)$.
3. Démontrer que f admet en 0 un développement limité à l'ordre 2 et calculer ce développement.

8.4 Exercice. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on pose $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$ et $g(x, y, z) = x^2 - 3xy + 2z^2$. Considérons l'application $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$F(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z)).$$

1. Calculer dF.
2. Démontrer que la matrice
$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) & \dfrac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) \\ \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(1,1,1) & \dfrac{\partial g}{\partial z}(1,1,1) \end{pmatrix}$$
   est inversible.
3. Démontrer qu'il existe un intervalle J centré en 1 et des applications $\varphi : J \to \mathbb{R}$ et $\psi : J \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $\varphi(1) = \psi(1) = 1$ et pour tout $x \in J$ on a $F(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0$.
4. Calculer les $\varphi'(1)$ et $\psi'(1)$.

8.5 Exercice. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Soit $(x_0, y_0) \in U$ tel que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Posons $z_0 = f(x_0, y_0)$.

1. Démontrer qu'il existe un voisinage ouvert V de (x_0, z_0) et une application F de classe C^1 tels que, pour tout $(x, z) \in V$ on ait
$$\Big(x, F(x, z)\Big) \in U \quad \text{et} \quad f\Big(x, F(x, z)\Big) = z\,.$$
   Indication. On pourra considérer l'application $\varphi : (x, y) \mapsto (x, f(x, y))$.
2. Soit $(x, z) \in V$. Posons $y = F(x, z)$. Calculer $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, z)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x, z)$ en fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

8.6 Exercice. Notons E l'espace vectoriel réel des matrices 2×2 (à coefficients réels) et $f : E \to E$ l'application $A \mapsto A^2$.

1. Démontrer que l'application f est différentiable et déterminer sa différentielle df.
2. Notons $I \in E$ la matrice identité. Démontrer qu'il existe des voisinages ouverts U et V de I tels que f induise un difféomorphisme de U sur V.

8.7 Exercice. Soient E un espace de Banach et $f : E \to E$ de classe C^1. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$, avec $k < 1$ tel que pour tout $x \in E$, on a $|||df_x||| \leqslant k$. On pose $F(x) = x - f(x)$.

1. Démontrer que l'application f est lipschitzienne.
2. a) Soit $a \in E$. Démontrer que l'équation $x = f(x) + a$ admet une et une seule solution dans E.
   b) Démontrer que l'application F est bijective.
3. Démontrer que F est un difféomorphisme de classe C^1 de E sur E.

8.8 Exercice. On note $\| \ \|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. On suppose qu'il existe une norme N sur $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on ait $N\big(F(x) - F(y)\big) \geqslant N(x - y)$.

1. Démontrer que F est injective.
2. Soit $a \in \mathbb{R}^n$.
   a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Démontrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}\Big(F(a + tx) - F(a)\Big)$ admet une limite lorsque $t \to 0$. En déduire que $N\Big((dF)_a(x)\Big) \geqslant N(x)$.
   b) Montrer que $(dF)_a$ est bijective.
   c) Soient $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application différentiable et $a \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $(d(Q \circ F))_a = 0$. Démontrer que $(dQ)_{F(a)} = 0$.
   d) Démontrer qu'il existe un voisinage ouvert U de a et un voisinage ouvert V de $F(a)$ tels que la restriction de F soit un difféomorphisme de U sur V.
3. Démontrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on ait $\big\|F(x) - F(y)\big\| \geqslant k\|x - y\|$.
4. Soit $b \in \mathbb{R}^n$. Pour $u, x \in \mathbb{R}^n$, posons $Q(u) = \|u - b\|^2$ et $\varphi(x) = Q \circ F(x) = \big\|F(x) - b\big\|^2$.
   a) Démontrer que Q est différentiable et donner une expression de dQ.
   b) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\|F(x) - b\| + \|b - F(0)\| \geqslant k\|x\|$. En déduire qu'il existe $R \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'on ait $\|x\| > R \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(0)$.
   c) Notons B la boule fermée de $\mathbb{R}^n$ de centre 0 et de rayon R. Démontrer que l'on a $\inf\{\varphi(z);\ z \in \mathbb{R}^n\} = \inf\{\varphi(z);\ z \in B\}$ et que cet « inf » est atteint en un point a de B.
   d) Démontrer que $F(a) = b$.
5. Démontrer que F est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.
6. On se propose de donner une autre démonstration de la surjectivité de F.
   a) Déduire de la question 2.d) que $F(\mathbb{R}^n)$ est ouvert dans $\mathbb{R}^n$.
   b) Soit (x_n) une suite de points de $\mathbb{R}^n$ tels que la suite $\big(F(x_n)\big)$ soit convergente. Démontrer que la suite (x_n) est de Cauchy.
   c) Démontrer que $F(\mathbb{R}^n)$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$.
   d) En déduire que F est surjective.

9 Équations différentielles

Ici, la référence de base (en plus des classiques...) est [Dem].

Une équation différentielle (scalaire, d'ordre n) est une équation du type $f(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0$. L'inconnue est une fonction x définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs scalaires ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Quitte à étudier les équations différentielles vectorielles *i.e.* x est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, on peut toujours se ramener au cas des équations d'ordre 1. On peut aussi en général, à l'aide du théorème des fonctions implicites, se ramener à des équations différentielles du type $X' = f(t, X)$.

Le *problème de Cauchy* pour une telle équation consiste à trouver « la » solution X définie sur un intervalle J le plus grand possible satisfaisant aux *données initiales* $X(t_0) = X_0$

En physique, en chimie, en économie, ... plusieurs phénomènes sont décrits à l'aide d'équations differentielles. Le *théorème de Cauchy-Lipschitz* qui affirme l'existence et unicité de la solution du problème de Cauchy, dit que ces équations différentielles déterminent bien le phénomène : si on connait l'équation différentielle et les données initiales on a déterminé toute l'évolution de notre système.

On dispose de méthodes générales pour « résoudre » plusieurs équations différentielles, *i.e.* pour exprimer les solutions à l'aide de fonctions usuelles. Une autre étude, l'étude dite qualitative, peut-être plus intéressante encore - que nous n'aborderons ici que dans des exemples - consiste à étudier les solutions d'une équation différentielle, sans pour autant pouvoir les exprimer.

9.1 Équations différentielles linéaires

9.1.1 Théorème d'existence et unicité

Un système d'équations différenitelles linéaires est une équation de la forme

$$X' = A(t)X + B(t), \tag{E}$$

où A (*resp.* B) est une application continue d'un intervalle I dans $M_n(\mathbb{C})$ (*resp.* $\mathbb{C}^n$). Une solution de ce système est une fonction $X : I \to \mathbb{C}^n$ de classe C^1 et telle que, pour tout $t \in I$ on ait $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$.

Théorème de « Cauchy-Lipschitz linéaire » (Existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy)**.** *Pour tout $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathbb{C}^n$, il existe une et une seule solution $X : I \to \mathbb{C}^n$ de l'équation (E) telle que $X(t_0) = X_0$.*

L'équation homogène associée à (E) est

$$X' = A(t)X. \tag{H}$$

L'ensemble S_H des solutions sur I de (H) est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 de I dans $\mathbb{C}^n$. D'après le théorème d'existence et d'unicité, pour $t_0 \in I$, l'application $X \mapsto X(t_0)$ est un isomorphisme de S_H sur $\mathbb{C}^n$, donc $\dim S_H = n$.

L'ensemble S_E des solutions de (E) est un espace affine de direction S_H. Pour résoudre une équation différentielle du type (E), on doit donc résoudre (H) et trouver une solution particulière de (E) : la solution générale de (E) est somme de la solution générale de (H) et d'une solution particulière de (E).

Application. Soient a, b, c des fonctions continues sur un intervalle I et à valeurs complexes. Considérons l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t) \tag{$E2$}$$

dont l'inconnue est une fonction $x : I \to \mathbb{C}$ de classe C^2. On se ramène à un système du premier ordre en posant $y = x'$ et en résolvant donc le système

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -a(t) & -b(t) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c(t) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{E'}$$

On en déduit donc un théorème d'existence et unicité du problème de Cauchy correspondant : *pour tout $t_0 \in I$, tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{C}^2$ il existe une unique fonction $x : I \to \mathbb{C}$ de classe C^2 telle que $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = y_0$ et, pour tout $t \in I$, on ait $x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t)$.*

9.1.2 Méthode de la variation des constantes

Supposons que l'on ait résolu (H) et que l'on cherche à résoudre (E). On dispose donc d'une base de solutions $(X_1, \dots, X_n)$ de H. Les solutions de (H) sont donc de la forme $X = \sum y_i X_i$ où les y_i sont des constantes. La méthode de variation des constantes consiste à considérer les y_i comme des fonctions.

Pour tout $t \in I$, notons $R(t)$ la matrice carrée dont les vecteurs colonnes sont les $X_i(t)$. Remarquons que, pour tout $t \in I$, comme l'application $X \mapsto X(t)$ est bijective de S_H sur $\mathbb{C}^n$, $(X_1(t), \dots, X_n(t))$ est une base de $\mathbb{C}^n$, donc la matrice $R(t)$ est inversible. La solution générale de (H) s'écrit $X(t) = R(t)Y$ où $Y \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur colonne (constant).

La méthode des variation des constantes consiste donc à chercher les solutions de (E) sous la forme $X(t) = R(t)Y(t)$. On a alors $X'(t) = R'(t)Y(t) + R(t)Y'(t)$. Remarquons que $R'(t) = A(t)R(t)$ pour tout t, de sorte que (E) devient $R(t)Y'(t) = B(t)$, soit $Y'(t) = R(t)^{-1}B(t)$.

Dans le cas de l'équation différentielle linéaire du second ordre (équation $(E2)$), on suppose donc avoir trouvé deux solutions indépendantes x_1 et x_2 de l'équation $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$. La méthode de la variation des constantes consiste donc à chercher la solution sous la forme $x(t) = u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t)$ où

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) & x_2'(t) \\ x_1(t) & x_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il arrive que l'on ne dispose que d'une solution « évidente » de l'équation $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$. Si cette solution y ne s'annule pas sur I, on va chercher une solution de $(E2)$ sous la forme $x = yz$. L'équation devient $z''(t)y(t) + z'(t)(2y'(t) + a(t)y(t)) + z(t)(y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t)) = c(t)$, soit $z''(t)y(t) + z'(t)(2y'(t) + a(t)y(t)) = c(t)$ qui est une équation du premier ordre en z'.

9.1.3 Systèmes à coefficients constants

On a vu que pour résoudre (E), « il suffit » de résoudre (H). Il y a deux cas où l'on peut résoudre (H) :

a) lorsque $n = 1$; dans ce cas, on a à résoudre $x' = a(t)x$; sachant qu'une solution non nulle ne s'annule pas sur I, on cherche une solution non nulle en écrivant $\dfrac{x'}{x} = a(t)$, puis $\ln|x(t)| = f(t) + c$ où f est un primitive de a et enfin, $x(t) = k\exp(f(t))$.

b) Lorsque la matrice A est constante. C'est ce cas que nous étudions maintenant.

Lorsque A est diagonale, triangulaire. Lorsque $A = \mathrm{diag}(a_i)$ est diagonale, la résolution du système $X' = AX + B$ s'écrit $x_i' = a_i x_i + b_i(t)$ pour tout i.

Lorsque la matrice A est triangulaire supérieure, on résout les équations en cascade : la dernière équation s'écrit $x_n' = a_{n,n}x_n + b_n(t)$; pour $k < n$, la k-ième équation s'écrit $x_k' = a_{k,k}x_k + z_k(t)$ où $z_k(t) = b_k(t) + \displaystyle\sum_{j=k+1}^{n} a_{k,j}x_j(t)$ a déjà été décrit.

Changement de base. Soit P une matrice inversible telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale - ou triangulaire. Écrivons $X = PY$. L'équation $X' = AX$ devient $Y' = DY$, que l'on sait résoudre.

Exponentielle de matrices. Soit E un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie ; munissons E d'une norme quelconque (elles sont toutes équivalentes !) et $\mathcal{L}(E)$ de la norme $|||\ |||$ associée. Comme $|||g \circ f||| \leqslant |||g||| |||f|||$ et que l'espace vectoriel normé de dimension finie $\mathcal{L}(E)$ est complet, pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ la série de terme général $\dfrac{f^n}{n!}$ converge. On note $\exp(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^n}{n!}$ sa somme.

Fixons $f \in \mathcal{L}(E)$. En dérivant sous le signe somme, on trouve que l'application $\varphi : t \mapsto \exp(tf)$ est dérivable et que l'on a $\varphi'(t) = f \circ \varphi(t) = \varphi(t) \circ f$.

En termes de matrices, si on pose $R(t) = \exp(tA)$, l'application $t \mapsto R(t)$ est dérivable et l'on a $R'(t) = AR(t)$. En particulier,

a) pour tout $Y \in \mathbb{C}^n$, l'application $t \mapsto \exp(tA)Y$ est solution de l'équation différentielle $X' = AX$ (sur tout $\mathbb{R}$) ;

b) si $B : I \to \mathbb{C}^n$ est une application continue, la solution au problème de Cauchy $X' = AX + B(t)$ et $X(t_0) = X_0$ est donnée par $X(t) = \exp((t - t_0)A) \cdot X_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \exp((t - s)A) \cdot B(s)\, ds$.

9.2 Notions sur les équations différentielles non linéaires

9.2.1 Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application continue. On considère l'équation différentielle $X' = f(t, X)$. Une solution de cette équation est donc donnée par un intervalle J et une application $X : J \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que, pour $t \in J$, on ait $(t, X(t)) \in U$ et $X'(t) = f(t, X(t))$.

Remarquons qu'une équation du second ordre $X'' = f(t, X, X')$ (ainsi que les équations différentielles de tout ordre) se ramène à une équation du premier ordre $Z' = g(t, Z)$ en posant $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et en posant $g\left(t, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} Y \\ f(t, X, Y) \end{pmatrix}$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz local. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1. Soit $(t_0, X_0) \in U$.*

Existence. *Il existe un intervalle ouvert $J \subset \mathbb{R}$ contenant t_0 et une solution $X : J \to \mathbb{R}^n$ de l'équation différentielle $X' = f(t, X)$ telle que $X(t_0) = X_0$.*

Unicité. *Soient I et J des intervalles ouverts contenant t_0 et $X : I \to \mathbb{R}^n$ et $Y : J \to \mathbb{R}^n$ deux solutions de l'équation différentielle $X' = f(t, X)$ et telles que $X(t_0) = Y(t_0)$. Alors X et Y coïncident sur $I \cap J$.*

Théorème : Solutions maximales. *Sous les hypothèse du théorème ci-dessus, il existe une solution (I, X) qui prolonge toute solution du problème de Cauchy. L'intervalle I est ouvert.*

9.2.2 Quelques exemples de résolution « explicite » d'équations différentielles

Équations à variables séparables. Ce sont les équations de la forme $x' = f(t)g(x)$. Une telle équation admet les solutions constantes $x = c$ où c est telle que $g(c) = 0$. Pour trouver les autres solutions, on écrit $\dfrac{x'}{g(x)} = f(t)$, puis prenant une primitive G de $1/g$ sur un intervalle où g ne s'annule pas et une primitive F de f, on écrit $G(x(t)) = F(t) + c$, puis $x(t) = G^{-1}(F(t) + c)$.

Équations homogènes. Il s'agit d'équations qui se ramènent à $x' = g(x/t)$. Pour résoudre cette équation, on pose $y = x/t$ (*changement de fonction*). On a donc $x = ty$ et $x' = ty' + y$. L'équation devient $ty' = g(y) - y$ qui est une équation différentielle à variables séparables.

Équations de Bernoulli. Ce sont les équations de la forme $y' = a(t)y + b(t)y^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ (définie pour $y > 0$). Pour résoudre cette équation, on effectue le *changement de fonction* $z = y^{1-\alpha}$. Remarquons que $\frac{z'}{z} = (1-\alpha)\frac{y'}{y}$ de sorte que l'équation devient $\frac{z'}{z} = (1-\alpha)a(t) + (1-\alpha)y^{1-\alpha}$, soit $z' = (1-\alpha)a(t)z + (1-\alpha)b(t)$, qui est une équation linéaire.

Équation d'Euler. Il s'agit d'équations différentielles linéaires de la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k t^k x^{(k)} = 0$ ou (avec second menbre) $\sum_{k=0}^{n} a_k t^k x^{(k)} = b(t)$. A l'aide du *changement de variable* $t = \pm e^u$, en posant donc $y(u) = x(e^u)$, on se ramène à une équation à coefficients constants que l'on sait résoudre.
On a $y'(u) = e^u x'(e^u)$ et $y''(u) = e^u x'(e^u) + e^{2u}x''(e^u)$, $y'''(u) = e^u x'(e^u) + 3e^{2u}x''(e^u) + e^{3u}x'''(e^u)$, *etc.* , de sorte que l'équation $a_3t^3x''' + a_2t^2x'' + a_1tx' + a_0x = 0$ devient l'équation à coefficients constants $a^3z''' + (a_2 - 3a_3)z'' + (a_1 - a_2 + 2a_3)z' + a_0z = 0$.

9.2.3 Un exemple « qualitatif » : Lois de Kepler

On étudie le mouvement des planètes. On assimile le soleil à un point fixe que l'on place à l'origine O de notre espace euclidien E. Une planète assimilée à un point de l'espace se trouve en position $M(t) \in E$ au temps t. On note $M'(t), M''(t) \in \overrightarrow{E}$ sa vitesse et son accélération au temps t.

Rappelons les lois de Kepler sur le mouvement des planètes :

Lois de Kepler. *a) Dans un référentiel immobile par rapport au soleil, la trajectoire d'une planète se trouve dans un plan ; elle est elliptique, un foyer étant le soleil.*

b) Loi des aires. *La surface balayée par le rayon vecteur $\vec{r}$ durant le mouvement est proportionnelle au temps.*

c) Le carré de la période T varie comme le cube du demi-grand axe : $\frac{a^3}{T^2} = cte = \frac{k}{4\pi^2}$ (où $k = GM_S$ est produit de la constante G d'attraction universelle par la masse M_S du soleil).

Mouvements à accélération centrale. On suppose que la seule force qui s'exerce sur notre planète est l'attraction solaire. La loi de Newton $\overrightarrow{F} = mM''$ implique alors que l'accélération est centrale *i.e.* M'' est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$.

Proposition. *On suppose qu'une particule M a une accélération centrale. (On suppose aussi qu'au temps $t = 0$, $\overrightarrow{OM}$ et M' ne sont pas colinéaires). Alors :*

a) La particule M reste dans un plan P.

b) Repérons alors M dans des coordonnées polaires ρ, θ de centre O. La fonction $L : t \mapsto \rho(t)^2\theta'(t)$ ne dépend pas de t.

Démonstration. Fixons une orientation de l'espace et posons $\overrightarrow{L(t)} = \overrightarrow{OM(t)} \wedge M'(t)$. Par la règle de Leibnitz appliquée à l'application bilinéaire $\wedge$, on trouve $\overrightarrow{L}'(t) = M'(t) \wedge M'(t) + \overrightarrow{OM(t)} \wedge M''(t) = \overrightarrow{0}$ puisque l'accélération est centrale. En particulier la particule reste dans le plan P passant par 0 et orthogonal à $\overrightarrow{L}$.

Choisissons une orientation de P (et donc de $P^\perp$).

En prenant des coordonnées polaires, on a $\overrightarrow{OM(t)} = \rho(t)\vec{u}(\theta(t))$, et $M'(t) = \rho'(t)\vec{u}(\theta(t)) + \rho(t)\theta'(t)\vec{v}(\theta(t))$ (où $\vec{v}$ est le vecteur unité de P directement orthogonal à $\vec{u}$), de sorte que $\overrightarrow{OM(t)} \wedge M'(t) = \rho(t)^2\theta'(t)\vec{w}$ (où $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est le vecteur unité positif orthogonal à P). $\square$

Loi des aires. Que représente la quantité $\rho^2\theta'$? Elle représente l'aire du parallélogramme dont trois sommets sont $O, M, M + M'$, ou le double de l'aire du triangle $O, M, M + M'$, soit la dérivée de l'aire balayée par le rayon OM.

Dorénavant, on se place dans le plan P qui est un plan euclidien orienté. On fixe l'origine en O et on choisit un repère orthonormé direct, ce qui nous donne des coordonnées polaires associées et identifie P avec $\mathbb{C}$.

On a donc $z(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$.

On suppose qu'on a une accélération en $1/\rho^2$. On a donc $z''(t) = -k\rho(t)^{-2}e^{i\theta(t)}$ (où $k = Gm$ avec G constante d'attraction universelle et m = masse du soleil).

- Posons $w = ie^{i\theta(t)} - \dfrac{L}{k}z'(t)$. On trouve $w' = 0$. On pose $e = |w|$. Quitte à changer de repère, on suppose $w = ie$. Il vient $e\cos\theta = \langle w, ie^{i\theta}\rangle = 1 - \dfrac{L\rho\theta'}{k} = 1 - \dfrac{L^2}{k\rho}$, donc $\rho = \dfrac{p}{1 - e\cos\theta}$ avec $p = \dfrac{L^2}{k}\cdot$
- Enfin, en supposant $e < 1$, on a une ellipse de grand axe $2a = \dfrac{p}{1-e} + \dfrac{p}{1+e} = \dfrac{2p}{1-e^2}$ et de demi petit axe $b = \dfrac{p}{\sqrt{1-e^2}}$. Aire : $A = \pi ab = \dfrac{\pi p^2}{(1-e^2)^{3/2}}\cdot$ Il vient

$$T = \frac{2A}{L} = \frac{2\pi L^3}{k^2(1-e^2)^{3/2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}a^{3/2}.$$

On suppose inversement que la trajectoire est une conique. On observe que les planètes parcourent des ellipses de foyer O. On a donc $\rho(t) = \dfrac{p}{1 - e\cos\theta(t)}\cdot$

On trouve $\rho'(t) = \theta'(t)\dfrac{-pe\sin(\theta(t))}{(1 - e\cos\theta(t))^2} = -\dfrac{Le}{p}\sin\theta(t)$, donc

$M'(t) = \dfrac{L}{p}(ie - \vec{v}(\theta))$, donc $z''(t) = -\dfrac{L}{p}\theta'(t)e^{i\theta} = -\dfrac{k}{\rho(t)^2}e^{i\theta}$ avec $k = \dfrac{L^2}{p}\cdot$

9.3 Exercices

9.1 Exercice. Résoudre l'équation différentielle $y'' - xy = 0$. On exprimera les solutions à l'aide de séries entières.

9.2 Exercice. Tirés de [M Ana]

1. (10.3, page 220) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + y = e^{-|t|}$.
2. (10.1.b, page 215) Résoudre l'équation dégénérée $(t+1)y' = ty$.
3. (10.2, page 219) Trouver y dérivable sur $\mathbb{R}$ telle qu'en tout point $y' - y = \displaystyle\int_0^1 y(t)dt$.

9.3 Exercice. Tirés de [Dem]

1. P. 146-148, équation à variables séparées, par exemple : $y' = \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-t^2}}\cdot$
2. P. 153, équations de Riccati, exemple : $(1-t^3)y' + t^2y + y^2 = 2t$.
3. P. 162-164, équations de Lagrange et de Clairaut : $y = a(y')t + b(y')$.
4. P. 187. Déterminer la trajectoire d'une particule de masse m et de charge électrique q se déplaçant sous l'action d'un champ magnétique $\vec{B}$ et d'un champ électrique $\vec{E}$ uniformes et indépendants du temps. En d'autres termes résoudre l'équation différentielle suivante sur la vitesse : $m\vec{V}' = q(\vec{V} \wedge \vec{B} + \vec{E})$.

9.4 Exercice. Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $q_1, q_2 : I \to \mathbb{R}$ des applications continues. On suppose que pour tout $t \in I$ on a $q_2(t) \geqslant q_1(t)$. Soient $u_i : I \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ des applications de classe C^2 telles que $u_i'' + q_iu_i = 0$. Soient $a < b \in I$. On suppose que $u_1(a) = u_1(b) = 0$ et que u_1 et u_2 ne s'annulent pas sur $]a, b[$. Quitte à remplacer u_i par $-u_i$ on peut supposer que u_1 et u_2 sont positives sur $]a, b[$. On pose $w(t) = u_1'(t)u_2(t) - u_2'(t)u_1(t)$.

1. Démontrer que w est croissante sur $[a, b]$, que $w(a) \geqslant 0$ et $w(b) \leqslant 0$.
2. En déduire que u_1 et u_2 sont proportionnelles sur $[a, b]$.

9.5 Exercice.

1. Soit κ une fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$, déterminer une courbe plane de classe C^2 dont la courbure au point d'abscisse curviligne s soit égale à $\kappa(s)$. (Indication : résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z' = i\kappa z$.) Comment sont faites toutes les courbes de courbure κ ?
2. Soit A une application continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans l'espace vectoriel des matrices 3×3 antisymétriques, démontrer pour tout $t_0 \in I$ l'existence et l'unicité d'une application Y de classe C^1 de I dans l'ensemble des matrices 3×3, telle que 1) $Y(t_0) = Id$, et 2) $Y' = AY$. Démontrer que pour tout t dans I, la matrice $Y(t)$ est orthogonale.
3. Soient κ, τ deux fonctions continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$; appliquer l'exercice précédent pour établir l'existence d'une courbe gauche de classe C^3 de courbure κ et de torsion τ.
4. Déterminer les courbes gauches de courbure et torsion constantes.

9.6 Exercice. *Fonctions de Bessel.* Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$J(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(x \sin t)\, dt.$$

1. Démontrer que J est analytique sur $\mathbb{R}$ et donner son développement en série entière au voisinage de 0.
2. Démontrer que J est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, qui est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle
$$xy'' + y' + xy = 0.$$
3. Démontrer que J est l'unique (à multiple scalaire près) solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $xy'' + y' + xy = 0$.
4. Démontrer qu'il existe des fonctions r et θ de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $J(x) = r(x)\cos\theta(x)$ et $J'(x) = -r(x)\sin\theta(x)$.
5. Démontrer que la fonction $x \mapsto r(x)^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et que $x \mapsto x\, r(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
6. Démontrer que l'on a $\theta'(x) = 1 + \dfrac{\cos\theta(x)\sin\theta(x)}{x}\cdot$ En déduire que J s'annule une infinité de fois.
7. Démontrer que J' est solution de l'équation différentielle $x^2y'' + xy' + (x^2-1)y = 0$.

8. On définit par récurrence la suite J_n de fonctions de Bessel en posant

$$J_0 = J \quad \text{et} \quad J_{n+1}(x) = \frac{nJ_n(x)}{x} - J_n'(x).$$

Démontrer que J_n est analytique et satisfait l'équation différentielle $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$.

Les fonctions de Bessel interviennent dans les ondes électromagnétiques dans un guide cylindrique (antenne), les modes de vibration d'une fine membrane circulaire ou annulaire, l'étude d'instruments optiques, le pendule de Bessel...

Index

La bibliographie qui suit est basée sur les conseils de nos anciens stagiaires. Elle n'est pas exhaustive.

Références

[ArFr] J.M. Arnaudiès, H. Fraysse, *Cours de Mathématiques* (Editions Dunod)

[AC] Auliac, Caby, *Analyse pour le CAPES et l'agrégation Interne* (Ellipses).

[C F L] A. Chambert-Loir, S. Fermigier, V. Maillot, *Exercices de mathématiques pour l'agrégation.* Analyse 1. Masson.

[Com] J. Combes, *Suites et séries de fonctions* (puf).

[Dan] J-F. Dantzer, *J.-F. Dantzer, Mathématiques pour l'agrégation interne, Analyse & probabilités, cours & exercices corrigés*, Vuibert 2007.

[DeB] J. de Biasi : *Mathématiques pour le CAPES et l'Agrégation Interne*, Coll. Jacques Moisan, Ellipses, 2ème édition, 1998.

[Del] J-P Delahaye : *Le fascinant nombre* π

[Dem] J-P. Demailly *Analyse numérique et équations différentielles,* Coll. Grenoble Sciences, 1991

[Die] J. Dieudonné *Calcul infinitésimal,* Hermann, Méthodes, 1968.

[E L] P. Eymard, J-P Lafon *Autour du nombre* π. Hermann

[F G] S. Francinou et H. Gianella : *Oraux X-ENS* (2 tomes analyse et 2 tomes algèbre).

[Gou] X. Gourdon *Les maths en tête. Analyse.* Ellipses (1994).

[LeSc] E. Leichtnam, X. Schauer, *Exercices corrigés de mathématiques posés aux oraux XENS.* Analyse 1. Ellipses.

[L-F A] J. Lelong-Ferrand, J.M. Arnaudiès, *Cours de Mathématiques.* Dunod

[L M] F Liret D. Martinais, *Analyse 1ère et 2e année - Cours et exercices avec solutions* Dunod

[Mar] J-P Marco *Analyse pour la licence.* Dunod.

[Moi] Moisan, *Mathématiques supérieures analyse - Topologie et séries - Suites et séries de fonctions* (ellipses).

[M T] J-.N. Miallet, A. Tissier, *Analyse à une variable réelle.* Bréal.

[M Ana] J-M. Monier *Analyse MPSI,* Dunod, 2003.

[M Exos] J-M. Monier *Analyse, Exercices.* Dunod, 1990.

[Per] D. Perrin, *Mathématiques d'école : Nombres, mesures et géométrie.* Cassini.

[RDO] E. Ramis, C. Dechamps, J. Odoux *Cours de Mathématiques Spéciales,* Masson, 1989

Volume 3, Topologie et Eléments d'Analyse,

Volume 4, Séries et Equations Différentielles,

Volume 5, Applications de l'Analyse à la Géométrie.

[Rouvière] F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.* Cassini.

[Sk] G. Skandalis, *Topologie et analyse.* Dunod.