Stage AGI 2019 — **Biblio** : Georges AGI : Analyse, résumés de cours et exos ; DANTZER Maths pour l'AGI : analyse et probas chez Vuibert (1)

LE CORPS $\mathbb{R}$ DES NOMBRES RÉELS.

Ns n'en ferons pas la construction (donc ns admettons son existence) ms ns allons étudier des p^tés qui le caractérisent.

I $\mathbb{R}$ est un corps commutatif totalement ordonné.

1) Bref rappel sur les corps.

On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ de 2 opérations, l'addition $+$ et la multiplication $\times$ de sorte que $(\mathbb{R}, +, \times)$ a une structure de corps, ce qui signifie qu'il a les trois p^tés suivantes.

<u>p^té 1</u> : $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif.

(i) associativité $\quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad (x+y)+z = x+(y+z)$

(ii) élém^t neutre noté $0 \in \mathbb{R}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R} \quad x+0 = 0+x = x$

(iii) symétrique $\quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists (-x) \in \mathbb{R} \quad x+(-x) = (-x)+x = 0$ (opposé)

on montre qu'il est unique d'où $-(-x) = x$

$x+y = 0 \Rightarrow (-x)+x+y = -x$
$\Rightarrow y = -x$

(iv) commutativité $\quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x+y = y+x$

<u>p^té 2</u> : $(\mathbb{R}, \times)$ satisfait les 3 assertions suivantes

(i) associativité $\quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$

(ii) élément neutre noté $1 \in \mathbb{R}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R} \quad 1 \times x = x \times 1 = x$

(iii) symétrique $\quad \forall x \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \exists x^{-1} \in \mathbb{R} \quad x \times x^{-1} = x^{-1} \times x = 1$ (inverse)

<u>p^té 3</u> La multiplication est distributive par rapport à l'addition

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad x \times (y+z) = (x \times y) + (x \times z)$ et $(x+y) \times z = (x \times z) + (y \times z)$

On dit qu'un corps est commutatif si la multiplication l'est : c'est le cas pour $(\mathbb{R}, \times)$ si bien que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif

<u>Exo 1</u> : Montrer l'unicité de l'opposé et du symétrique. En déduire $-(-x) = x$ et $(x^{-1})^{-1} = x$

<u>Sol.</u> : Soient y et z deux inverses de x. $\quad (y \times x) \times z = 1 \times z = z = y \times (x \times z) = y \times 1 = y$

<u>Remarques</u> sur l'assertion (iii) de la Pré 2

a) Pourquoi suppose-t-on $x \neq 0$?

$\forall y \in \mathbb{R}$ $\quad (0+0)\times y = 0\times y$ donc $(0\times y) + (0\times y) = 0\times y$ donc

$$-(0\times y) + (0\times y) + (0\times y) = -(0\times y) + (0\times y)$$
$$0 + (0\times y) = 0$$
$$0\times y = 0$$

et donc 0 ne peut avoir d'inverse

(il est sous-entendu ds ce raisonnement que $0 \neq 1$, ce qui se vérifie par l'absurde : si $0 = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad 0\times x = 1\times x = x$ abs. car $\mathbb{R} \neq \{0\}$)
$0 = x$

b) Si l'on ôte cette assertion, on obtient la définition d'un anneau.

<u>Exo</u> résolu : $(-1)\times x = -x$

<u>Exo</u> 2. Vérifier que $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un corps commutatif.

<u>Exo</u> 3 : On note $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{ a + b\sqrt{2}, (a,b) \in \mathbb{Q}^2 \}$

Mq $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est stable par $+$ et $\times$, puis que $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \times)$ est un corps commutatif. (on dit que c'est un sous-corps comm. de $\mathbb{R}$)

<u>Indic.</u> $(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

<u>Rm</u> : Si p premier, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$ corps comm.

2) Relation d'ordre

On dit que $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre $\leq$ car les 3 cond. suivantes sont satisfaites

(i) réflexivité $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \leq x$

(ii) transitivité $\quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \quad x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

(iii) antisymétrie $\quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow x = y$

<u>Ex.</u> : Soit E un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties.
Alors l'inclusion $\subseteq$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$
(on rappelle que $A \subseteq B$ signifie $\forall x \in E, \ x \in A \Rightarrow x \in B$)

On dit que la relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est totale car :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x \leq y$ ou $y \leq x$

Contre-ex. : $E = \{1, 2\}$ $\quad A = \{1\}$ $\quad B = \{2\}$ $\quad A \not\subset B$ et $B \not\subset A$

Rm :
On dit encore que $(\mathbb{R}, \leq)$ est un ensemble "totalemt ordonné."

On dit que $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ est un "corps commutatif totalemt ordonné" car il possède les trois ptés suivantes.

pté 1 : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps comm. et $(\mathbb{R}, \leq)$ est un ens. totalemt ordonné

pté 2 : L'ordre $\leq$ est compatible avec l'addition :

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

pté 3 : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x \geq 0$ et $y \geq 0 \Rightarrow x \times y \geq 0$

Exo 4 (« règle des signes ») On se place sur $(\mathbb{R}, +, \times, \geq)$

Montrer que :
- $x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0$ $\qquad (-x) + x \geq (-x) + 0$
- $x \leq 0$ et $y \leq 0 \Rightarrow x \times y \geq 0$ $\qquad (-x) \times (-y) = x \times y$
- $x \leq 0$ et $y \geq 0 \Rightarrow x \times y \leq 0$ $\qquad (-x) \times y = -(x y) \geq 0$
- $x^2 := x \times x \geq 0$
- $1 \geq 0$

Exo 5 Donner deux exs de corps commutatifs totalemt ordonnés différents de $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$.

$(\mathbb{Q}, +, \times, \leq)$ $\qquad (\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \times, \leq)$

(à isomorphisme près)

Il y a donc divers exs de c.c.t.o. mais $\mathbb{R}$ est le seul qui possède la pté de la borne supérieure, objet de la section suivante.

II Propriété de la borne supérieure.

Dans ~~tte~~ cette section, A désigne une partie de $\mathbb{R}$.

Définitions

On dit que $x \in \mathbb{R}$ est un "majorant" (resp. un "minorant") de la partie A si

$\forall y \in A, \quad y \leq x \qquad$ (resp. $\forall y \in A, \quad y \geq x$)

Si, en outre, $x \in A$, on dit que x est le plus grand élément (resp. le + petit élément) de A.

Rm : le + gd élément car si $x_1 \in A$ et $x_2 \in A$ sont + gds éléments de A, alors $x_1 \leq x_2$ et $x_2 \leq x_1$, d'où $x_1 = x_2$. Idem avec + petit élément.

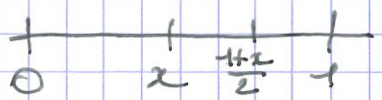
Notation : Si x est le + gd (resp. le + petit) élément de A, ns noterons $x = \max A$ (resp. $x = \min A$).

Déf. La partie A est dite "majorée" (resp. "minorée") s'il existe $x \in \mathbb{R}$ t.q x est un majorant (resp. minorant) de A.

La partie A est dite "bornée" si elle est à la fois majorée et minorée.

Ex. : $A = [0, 1[$
- 0 est le + petit élément de A : $\min A = 0$
- $1, 2, 10$ sont des majorants de A
- A est une partie bornée

Prouvons que A n'admet pas de + grand élément en raisonnant par l'absurde. Si $x \in A$ est le + gd élément de A, on a $0 \leq x < 1$, ce qui implique $0 \leq x < \frac{1+x}{2} < 1$. Comme $\begin{cases} \frac{1+x}{2} \in A \\ x < \frac{1+x}{2} \end{cases}$, contradiction.



Tjs sur cet ex., ns constatons que 1 joue un rôle particulier parmi les majorants de A : c'est le + petit d'entre eux

Déf : Si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, on appelle celui-ci la "borne supérieure" de A, notée $\sup A$.

Si l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément, on appelle celui-ci la "borne inférieure" de A, notée $\inf A$.

la borne sup (resp. inf) car, $\bar{c}$ vu ci-dessus, il y a unicité.

<u>Exs</u> : • $A = [0,1[$ $\quad 1 = \sup A$

$0 = \inf A = \min A$

• $A = \mathbb{R}_+$ $\quad 0 = \inf A = \min A$ $\quad$ A n'a pas de borne sup dans $\mathbb{R}$

• $A = \mathbb{Z}$ $\quad$ A n'a ni borne sup ni borne inf dans $\mathbb{R}$

<u>Exo 6</u> : Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. Établir l'équivalence suivante :

$$x = \max A \iff \begin{cases} x = \sup A \\ x \in A \end{cases}$$

Écrire l'énoncé analogue avec min et inf.

<u>Thm</u> (p^té de la borne sup)

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

" minorée " inférieure

Ns admettrons ce résultat dont la preuve ns demanderait de construire $\mathbb{R}$ mais retenons qu'il est fondamental car il caractérise $\mathbb{R}$ parmi les c.c.t.o.

<u>Exo 7</u> : $A = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ $\quad$ Mq A admet une borne inf. que l'on explicitera

<u>Prop.</u> (Caractérisa° borne sup) : Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ / M majorant de A
$M = \sup A \iff \{ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A \quad M - \varepsilon < x (\leq M)$

<u>Exo 8</u> : Montrer que $(\mathbb{Q}, +, \times, \leq)$ ne possède pas la p^té de la borne supérieure en considérant $A = \{ x \in \mathbb{Q}, x^2 \leq 2 \}$

<u>Indic.</u> : Si $b \in \mathbb{Q}$ est un majorant de A, poser $c = \frac{b}{2} + \frac{1}{b}$ puis

• mq $c^2 - 2 \geq 0$ et en déduire que c est un majorant de A

• mq $\frac{2}{c} \in A$ $\left(\Rightarrow \frac{2}{c} \leq b \Rightarrow 2 \leq bc \Rightarrow 2 \leq \frac{b^2}{2} + 1 \Rightarrow 2 \leq b^2 \right)$

puis que $b^2 \geq 2$. En admettant que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, en déduire $c < b$

$\left(c < b \iff \frac{b}{2} + \frac{1}{b} < b \iff \frac{1}{b} < \frac{b}{2} \iff b^2 > 2 \right.$, ce qui est vrai car $\left. b^2 \neq 2 \right)$

puis conclure (l'ens des majorants de A ne peut avoir de + petit élém^t)

15/05/19