10 Solutions des exercices

10.1 Suites

Exercice 1.1.

1. On a vu que $1/p$ est périodique de période divisant 5 si et seulement si p divise $10^5 - 1$; la période est exactement 5 si de plus p ne divise pas $10 - 1$. Si p est premier, il doit donc diviser 11 111. Inversement, puisque 9 et 11 111 sont premiers entre eux, tout diviseur premier de 11 111 convient.
2. a) D'après ce qui précède, l'ordre de 10 dans le groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est 5.

   b) L'ordre 10 dans le groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ divise l'ordre de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, donc 5 divise $p-1$. Comme p est impair, il est de la forme $10k+1$.
3. On vérifie immédiatement que 11 ne divise pas 11 111 ; le nombre 21 n'est pas premier ; 31 ne convient pas non plus... mais 41 convient. On trouve $11\,111 = 41 \times 271$.
   NB Comme tout diviseur de 271 divise 11 111 et est donc $\geqslant 41 > \sqrt{271}$, on en déduit que 271 est premier.

Exercice 1.2.

1. On $pN = 10^{p-1} - 1$. Son développement décimal est donc $99\ldots9$ ($p-1$ chiffres).
   On a $\dfrac{1}{p} = \dfrac{N}{10^{p-1}-1}$. Or $\dfrac{1}{10^{p-1}-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} 10^{-k(p-1)}$. Donc le développement décimal du nombre rationnel $\dfrac{1}{p}$ est
   $$\frac{1}{p} = 0, a_1a_2\ldots a_{p-1}a_1a_2\ldots a_{p-1}a_1a_2\ldots a_{p-1}\ldots$$
2. a) La classe de k dans le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un élément de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Or, puisque la classe de 10 est un générateur de ce groupe, on en déduit que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est l'ensemble des classes de 10^ℓ où $0 \leqslant \ell \leqslant p-2$.

   b) Le développement décimal de $10^\ell N$ est $a_1\ldots a_{p-1}00\ldots0$ (avec ℓ zéros à la fin). Il vient $A = a_1\ldots a_\ell$ et $R = a_{\ell+1}\ldots a_{p-1}0\ldots0$.

   c) On a $k \equiv 10^\ell \quad [p]$, donc $kN \equiv 10^\ell N \quad [pN]$. Or $pN = 10^{p-1} - 1$, donc $10^\ell N = 10^{p-1}A + R \equiv A + R \quad [pN]$. Les nombres kN et $A+R$ sont tous deux compris strictement entre 0 et $pN = 10^{p-1} - 1$ et congrus modulo pN : ils sont égaux. Le développement décimal en est $a_{\ell+1}\ldots a_{p-1}a_1\ldots a_\ell$.
3. a) Le développement décimal du nombre 1/17 admet la période 16 et n'est visiblement pas périodique de période 8 : sa période, qui est l'ordre de (la classe de) 10 dans $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^*$ est bien 16.

   b) D'après la discussion ci-dessus, pour $1 \leqslant k \leqslant 16$, on obtient le développement décimal de $k \times 0588235294117647$ par permutation circulaire à partir de 0588235294117647. En les classant par ordre croissant, on trouve
   $2 \times 0588235294117647 = 1176470588235294$, $3 \times 0588235294117647 = 1764705882352941$
   $4 \times 0588235294117647 = 2352941176470588$, $5 \times 0588235294117647 = 2941176470588235$
   $6 \times 0588235294117647 = 3529411764705882$, $7 \times 0588235294117647 = 4117647058823529$
   $8 \times 0588235294117647 = 4705882352941176$, $9 \times 0588235294117647 = 5294117647058823$
   $10 \times 0588235294117647 = 5882352941176470$, $11 \times 0588235294117647 = 6470588235294117$
   $12 \times 0588235294117647 = 7058823529411764$, $13 \times 0588235294117647 = 7647058823529411$
   $14 \times 0588235294117647 = 8235294117647058$, $15 \times 0588235294117647 = 8823529411764705$
   $16 \times 0588235294117647 = 9411764705882352$.

Exercice 1.3.

1. Quitte à réordonner les s_i, on peut supposer que la suite s_i est croissante. On a $\sum_{k=0}^{n} s_{k+1} - s_k = s_{n+1} - s_0 \leqslant 1 - 0$. Il existe donc k tel que $s_{k+1} - s_k \leqslant \frac{1}{n+1}$.
2. Pour $i = 1, \ldots, n$, posons $s_i = t_i - t_0 - E(t_i - t_0)$ où E désigne la partie entière ; posons aussi $s_{n+1} = 1$. Par (a), il existe i, j avec $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n+1$ tels que $|s_i - s_j| \leqslant \frac{1}{n+1}$. Si $j \neq n+1$, on trouve $|(t_i - t_j) - p| \leqslant \frac{1}{n+1}$, où p est un entier ($p = E(t_i - t_0) - E(t_j - t_0)$). Si $j = n+1$, on trouve $|t_0 - t_i - p| \leqslant \frac{1}{n+1}$ avec $p = E(t_i - t_0) + 1$. Remarquons que dans ce cas $i \neq 0$ puisque $1 > \frac{1}{n+1}$.
3. Posons $t_i = ix$; il existe i, j avec $0 \leqslant i < j \leqslant n$ tels que $\delta(t_i - t_j) \leqslant \frac{1}{n+1}$. On pose alors $k = j - i$; on trouve $\delta(kx) \leqslant \frac{1}{n+1}$.
4. Soit $t \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par 1.c), il existe $q_n \leqslant n$ tel que $1 \leqslant q_n \leqslant n$ et $\delta(q_n t) \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{q_n+1}$. Soit p_n l'entier le plus proche de $q_n t$. On a donc $|t - p_n/q_n| \leqslant \frac{1}{(n+1)q_n} < q_n^{-2}$. Enfin, puisque $|t - p_n/q_n| \leqslant \frac{1}{n+1}$, on a $t = \lim p_n/q_n$.

Exercice 1.4.

1. Cette série converge extrêmement vite et on peut utiliser plusieurs méthodes. Par exemple, la règle de Cauchy : $(10^{-k!})^{1/k} = 10^{-(k-1)!} \to 0$.
2. Pour $n, k \in \mathbb{N}$, on a $(n+k+1)! - (n+1)! \geqslant k$, donc
$$0 < S - a_n = \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-(n+k+1)!} \leqslant 10^{-n+1} \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-k} < 2.10^{-(n+1)!}$$
En particulier, puisque $a_0 = 0$, il vient $0 < S < 2.10^{-1} < 1$.
3. a) Le nombre a_n est rationnel et s'écrit sous la forme $a_n = \frac{p_n}{q_n}$ où $q_n = 10^{n!}$. Le polynôme P s'écrit $P = \sum_{k=0}^{p} b_k X^k$, donc $q_n^p P(a_n) = \sum_{k=0}^{p} b_k p_k^k q_k^{p-k}$. C'est un entier.
   b) Posons $M = 2\sup\{|P'(t)|;\ t \in [0,1]\}$. Par le théorème des accroissements finis, On a $|P(S) - P(a_n)| \leqslant \frac{M}{2}|S - a_n| \leqslant M.10^{-(n+1)!}$.
   c) Puisque P a un nombre fini de racines, seulement un nombre fini de a_n peuvent être racines de P. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$ on ait $P(a_n) \neq 0$. Dans ce cas, $10^{p.n!}P(a_n)$ est un nombre entier non nul, donc $|10^{p.n!}P(a_n)| \geqslant 1$. Donc, pour $n \geqslant n_0$, on a $|10^{pn!}P(S)| \geqslant |10^{pn!}P(a_n)| - M.10^{pn!-(n+1)!} \geqslant 1 - M.10^{-(n+1-p)n!}$. Or, $\lim_{n\to\infty} M.10^{-(n+1-p)n!} = 0$, donc, pour n assez grand $M.10^{-(n+1-p)n!} < 1$. On en déduit que $P(S) \neq 0$.
4. On a démontré que, pour tout $P \in \mathbb{Z}[X]$ non nul, on a $P(S) \neq 0$, donc S est transcendant.

Exercice 1.5. Comme pour l'exercice précédent, $q_n^d P\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ est entier et non nul, donc $\left|q_n^d P\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right| \geqslant 1$. Or $\left|q_n^d P\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right| = \left|q_n^d\left[P\left(\frac{p_n}{q_n}\right) - P(x)\right]\right| \leqslant M q_n^d \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right|$, où M est le maximum de $|P'|$ sur le plus petit segment contenant tous les $\frac{p_n}{q_n}$.

Pour exhiber des nombres transcendants, on peut écrire $S = \sum 10^{-n!} a_n$ où a_n est une suite bornée de nombres entiers non nuls, on peut par exemple remplacer 10 par n'importe quel entier $\geqslant 2$ et $n!$ par n'importe quelle suite b_n de nombres entiers croissant suffisamment vite (avec $\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} \to \infty$).

Exercice 1.6.

1. On a $u_n = a^{10^n}$.
2. Si $|a| < 1$, la suite (u_n) converge (très vite) vers 0. Si $|a| > 1$, la suite $(|u_n|)$ tend très rapidement vers $+\infty$.
3. a) On a $\theta_n = \langle 10^n \theta \rangle$ où $\langle x \rangle = x - E(x)$ est la *partie fractionnaire* d'un nombre réel x (ici $E(x)$ désigne sa partie entière).

   b) La suite est constante pour $\theta = k/9$ avec $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant 8$.

   c) Si $u_k = u_\ell$, avec $k < \ell$ il vient $a^{10^\ell - 10^k} = 1$, donc a est une racine de l'unité ; inversement, si a est une racine de 1 alors θ est rationnel, donc son développement décimal est périodique (à partir d'un certain rang), donc la suite u_k prend un nombre fini de valeurs.

   d) Supposons que (u_n) tend vers ℓ. Remarquons que
   - $\ell^{10} = \ell$ (par continuité de $z \mapsto z^{10}$) ;
   - pour $b = e^{2i\pi t}$ avec $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t| \leqslant 1/11$, on a $|1 - b^{10}| \geqslant |1 - b|$.

   En particulier, si pour $n \geqslant n_0$ on a $|u_n - \ell| \leqslant |1 - e^{\frac{2i\pi}{11}}| (= 2 \sin \frac{\pi}{11})$, alors la suite $|u_n - \ell|$ est croissante à partir de n_0, et ne peut tendre vers 0 que si $u_{n_0} = \ell$; on en déduit que $a^{10^{n_0}}$ est une racine neuvième de 1, donc a est une racine de 1 dont l'ordre divise 9×10^{n_0}.
   La réciproque est claire.

   NB. C'est un fait général. Si (X, d) est un espace métrique, $f : X \to X$ est une application et x_0 est un point fixe *répulsif* de f, *i.e.* si $d(f(x), x_0) \geqslant d(x, x_0)$ pour tout point x dans un voisinage de x_0, une suite $(f^n(x))$ ne peut converger vers x_0 que s'il existe n tel que $f^n(x) = x_0$.

   e) Considérons le nombre $\theta = 0,123456789101112131415161718192021222324....$ On a donc une suite d'entiers $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, strictement croissante, telle que $p_0 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 1$ le développement décimal de n est lu dans θ de la place $p_{n-1} + 1$ à p_n. On a donc
   - $p_n = p_{n-1} + k_n$ où k_n est le nombre de chiffres du développement décimal de n ;
   - $n = E(10^{p_n} \theta) - 10^{k_n} E(10^{p_{n-1}} \theta)$.

   En particulier, le développement décimal de $\langle 10^{p_{n-1}} \theta \rangle$ commence par n. Soit $x \in [0, 1[$. Pour $k \in \mathbb{N}$ posons $m(k) = E(10^k x)$. Alors (si $x \geqslant 1/10$) on a $x = \lim \langle 10^{p_{m(k)-1}} \theta \rangle$, donc $e^{2i\pi x} = \lim u_{p_{m(k)-1}}$.
   Si $x < 1/10$, on pose $y = \frac{1+x}{10}$, on construit une suite extraite $(u_{\ell(k)})$ qui converge vers $e^{2i\pi y}$; alors $(u_{\ell(k)+1})$ converge vers $(e^{2i\pi y})^{10} = e^{2i\pi x}$.

Exercice 1.7.

1. Soit $x \in [0, 1[$. Écrivons son développement décimal propre $x = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ où les a_n ne sont pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang. Alors $10x = a_1, a_2 \ldots a_n \ldots$ et $f(x) = 0, a_2 \ldots a_n \ldots$; ces développements décimaux sont clairement propres (puisque les a_n ne sont pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang). En d'autres termes, f décale le développement décimal de x et oublie le premier terme de ce développement.
2. Soit $x = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ comme ci-dessus. Par unicité du développement décimal propre, on a $f(x) = x$ si et seulement si $a_k = a_{k+1}$ pour tout k, *i.e.* si la suite (a_k) est constante égale à $a \in \{0, \ldots, 8\}$ (9 est interdit puisque le développement décimal est supposé propre). Les points fixes de f sont donc les $a/9$ avec a entier entre 0 et 8.

3. La suite stationne si et seulement si, pour un $m \in \mathbb{N}$, $u_m = f^m(u_0)$ est un point fixe de f ; or $u_m = 10^m x - E(10^m u_0)$. On doit donc avoir $10^m u_0 = A + a/9 = B/9$ avec $A, a, B \in \mathbb{N}$; on en déduit immédiatement que (u_n) est stationnaire si et seulement si $u_0 = \dfrac{B}{9 \times 10^m}$ avec $B, m \in \mathbb{N}$ (et $B < 9 \times 10^m$).
4. Pour $x \in [0, 1[$, posons $g(x) = \exp(2i\pi x)$ et $v_n = g(u_n)$. On a $v_{n+1} = v_n^{10}$ et, puisque g est continue, si u_n converge vers ℓ, alors $g(u_n)$ converge vers $g(\ell)$. Or $z \mapsto z^{10}$ étant continue, on doit avoir $g(\ell)^{10} = g(\ell)$, ce qui impose (puisque $g(\ell) \neq 0$) que $g(\ell)$ est racine 9-ième de 1, donc $\ell = \dfrac{k}{9}$ avec $k \in \{0, \dots, 9\}$. Remarquons que pour $x \in [0, 1[$, si $|x - \ell| < 0,01$, alors $x \in \left[\dfrac{k}{10}, \dfrac{k+1}{10}\right[$. Donc, si pour $|u_n - \ell| < 0,01$, la n-ième décimale de u_0 est k. On en déduit que (u_n) converge si et seulement si la suite est stationnaire.
5. La suite est périodique si et seulement s'il existe n tel que $u_n = u_0$, ce qui est vrai si et seulement si u_0 est rationnel et dans son écriture en fraction irréductible $u_0 = p/q$ le dénominateur q n'est pas divisible par 2 ou par 5 ; la suite devient périodique à partir d'un certain rang si et seulement si u_0 est rationnel.
6. Prenons $u_0 = 0,1234567891011121314\dots$. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ d'écriture décimale $k = b_1 \dots b_s$, il existe donc $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que le développement décimal de $u_{\varphi(k)}$ soit $0, b_1 \dots b_s \dots$ Démontrons que $\{u_n ;\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, 1]$. Soit $\alpha \in [0, 1]$ et $\alpha = 0, a_1 a_2 \dots a_m \dots$ un développement décimal de α. Pour $m \in \mathbb{N}$, posons $k_m = 10^m + \sum_{k=1}^{m} a_k 10^{m-k}$. Le développement décimal de $u_{\varphi(k_m)}$ est $0, 1a_1 a_2 \dots a_m \dots$, donc celui de $u_{\varphi(k_m)+1}$ est $0, a_1 a_2 \dots a_m \dots$. On en déduit que $|u_{\varphi(k_m)+1} - \alpha| \leqslant 10^{-m}$, donc la suite $(u_{\varphi(k_m)+1})$ converge vers α.

Remarques

a) Le fait de considérer le nombre $10^m + \sum_{k=1}^{m} a_k 10^{m-k}$ et non $\sum_{k=1}^{m} a_k 10^{m-k}$ n'est vraiment utile que si $a_1 = 0$, *i.e.* pour $\alpha < 0,1$.

b) On parle d'*un* développement décimal de α afin de pouvoir traiter en même temps le cas $\alpha = 1$.

Exercice 1.8. Puisque φ est injective, on a $\lim_{n \to \infty} \varphi(n) = +\infty$. En effet, soit $M \in \mathbb{N}$; puisque φ est injective, l'ensemble $\varphi^{-1}\{0, \dots, M\}$ est fini : il a au plus $M+1$ éléments ; posons $N = \max\left(\varphi^{-1}\{0, \dots, M\}\right)$. Si $n > N$, il vient $n \notin \varphi^{-1}\{0, \dots, M\}$, donc $\varphi(k) > M$.
Par le théorème de composition de limites, il vient $\lim_{n \to \infty} u_{\varphi(n)} = \lim_{n \to \infty} u_n$.

Exercice 1.9. Soit $\varepsilon > 0$. Comme (u_n) a pour limite ℓ, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Posons $S = \sum_{k=1}^{N} (u_k - \ell)(v_k - v_{k-1})$. Pour $n \geqslant N$ on a donc

$$\begin{aligned} |w_n - \ell| &\leqslant \frac{|S|}{v_n} + \frac{1}{v_n} \sum_{k=N+1}^{n} |u_k - \ell|(v_k - v_{k-1}) \\ &\leqslant \frac{|S|}{v_n} + \left(\frac{v_n - v_N}{v_n}\right) \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{|S|}{v_n} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Puisque $\dfrac{S}{v_n}$ tend vers 0, il existe $N' \in \mathbb{N}$, que l'on peut supposer $\geqslant N$ tel que pour tout $n \geqslant N'$ on ait $\dfrac{|S|}{v_n} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, donc $|w_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Exercice 1.10. Par récurrence sur k, on démontre que, pour tout, $m, k \in \mathbb{N}^*$ on a $u_{kn} \leqslant k u_n$.
Posons $\ell = \inf \left\{ \dfrac{u_n}{n},\ n \in \mathbb{N} \right\}$ $(\in \mathbb{R} \cup \{-\infty\})$. Soit $M > \ell$; puisque M ne minore pas la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{u_N}{N} < M$. Posons $a = \dfrac{u_N}{N}$.
Soit $n \geqslant N$. Effectuons la division euclidienne de n par N : on a $n = kN + r$. On a donc $u_n \leqslant k u_N + r u_1 = na + r(u_1 - a) \leqslant na + N|u_1 - a|$. Pour n assez grand, on a $N|u_1 - a| < n(M - a)$, donc $\ell \leqslant \dfrac{u_n}{n} < M$.

Exercice 1.11.

Démontrons par récurrence sur n que, pour tout n, on a $0 < b_n < a_n$.
- C'est vrai par hypothèse pour $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$, et supposons que $0 < b_n < a_n$, on a $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} > 0$, et

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n - 2\sqrt{a_n b_n} + b_n}{2} = \frac{\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2}{2} > 0.$$

Puisque $0 < b_n < a_n$, $a_n - a_{n+1} = \dfrac{a_n - b_n}{2} < 0$ et $b_n^2 < a_n b_n$; prenant les racines carrées, il vient $b_n < b_{n+1}$; donc la suite (b_n) est croissante et la suite (a_n) décroissante. Enfin

$$\frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{a_n - b_n} = \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}}{2\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}\right)} < \frac{1}{2},$$

d'où l'on déduit que $(a_n - b_n)$ converge au moins géométriquement vers 0.
Remarquons que $\dfrac{a_{n+1} - b_{n+1}}{(a_n - b_n)^2} = \dfrac{1}{2\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}\right)^2}$ a une limite non nulle donc la convergence de $a_n - b_n$ vers 0 est quadratique.

Exercice 1.12.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ deux valeurs d'adhérence de la suite (u_n) et $c \in \mathbb{R}$ tels que $a < c < b$. On veut démontrer que c est valeur d'adhérence de la suite (u_n), en d'autres termes que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n_0 \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant n_0$ tel que $|u_n - c| < \varepsilon$.
   Fixons donc $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. Puisque $u_{n+1} - u_n \to 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$, que l'on peut supposer $\geqslant n_0$ tel que, pour $n \geqslant n_1$ on ait $|u_{n+1} - u_n| < 2\varepsilon$.
   - Si $c - \varepsilon < u_{n_1} < c + \varepsilon$, on prendra $n = n_1$.
   - Si $u_{n_1} \leqslant c - \varepsilon$, posons $A = \{k \geqslant n_1,\ u_n > c - \varepsilon\}$; puisque b est valeur d'adhérence de la suite (u_n), il existe $n_2 \geqslant n$ tel que $|u_{n_2} - b| < \varepsilon$, donc $u_{n_2} > b - \varepsilon > c - \varepsilon$, donc $A \neq \emptyset$. Comme A est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle possède un plus petit élément ; posons $n = \inf A$. Or $n_1 \notin A$, donc $n - 1 \geqslant n_1$ et puisque $n - 1 \notin A$, il vient $u_{n-1} \leqslant c - \varepsilon$. De plus $|u_{n-1} - u_n| < 2\varepsilon$. On a donc $c - \varepsilon < u_n < u_{n-1} + 2\varepsilon \leqslant c + \varepsilon$.
   - Si $u_{n_1} \geqslant c + \varepsilon$, on posera $A = \{k \geqslant n_1,\ u_n < c + \varepsilon\}$ qui n'est pas vide puisque a est valeur d'adhérence de (u_n) et $n = \inf A$.
2. On note F l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n). C'est une partie fermée non vide de X.
   Soient F_1, F_2 deux parties fermées de F disjointes et non vides. On doit démontrer que $F \neq F_1 \cup F_2$.
   Comme F_1 et F_2 sont compacts, la fonction distance atteint son minimum sur $F_1 \times F_2$: il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $y_1 \in F_1$ et tout $y_2 \in F_2$ on ait $d(y_1, y_2) \geqslant k$.
   Posons $K = \{y \in X;\ d(y, F_1 \cup F_2) \geqslant k/3\}$ et démontrons que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N};\ u_n \in K\}$ est infini - donc la suite (u_n) possède des valeurs dans le compact K, ce qui prouvera que $K \cap F \neq \emptyset$.
   Il existe n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, on ait $d(u_n, u_{n+1}) < k/3$.
   Soit $m \in \mathbb{N}$ et démontrons qu'il existe $n \geqslant m$ tel que $u_n \in K$. On peut supposer que $m \geqslant n_0$.

- Si $u_m \in K$, on posera $m = n$.
- Sinon, $d(u_m, F_1 \cup F_2) = \inf\{d(x, u_m);\ x \in F_1 \cup F_2\} < k/3$. Quitte à échanger les rôles de F_1 et F_2, on peut supposer que c'est un point de F_1 qui réalise ce minimum. Posons $A = \{n \in \mathbb{N};\ n \geqslant m,\ d(u_n, F_2) \leqslant 2k/3\}$. Puisque F_2 possède des points d'adhérence de la suite (u_n), l'ensemble A n'est pas vide. Notons n son plus petit élément. Remarquons que puisque $d(F_1, F_2) = k$, il vient $d(u_n, F_1) \geqslant k/3$. En particulier $m \neq n$. Puisque $n-1 \notin A$, on a $d(u_{n-1}, F_2) > 2k/3$. Comme $d(u_{n-1}, u_n) < k/3$, il vient $d(u_n, F_2) \geqslant k/3$. Cela prouve que $u_n \in K$.

3. Considérons la suite $u_n = (n^{1/3} \cos n^{1/3}, \sin n^{1/3}) = (x_n, y_n)$.

   Fixons $x \in \mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $g(t) = t \cos t$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on a $g(k\pi) = (-1)^k k\pi$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $|x| \leqslant k\pi$, il existe $t_{x,k} \in [k\pi, (k+1)\pi[$ tel que $g(t_{x,k}) = x$. Notons n_k la partie entière de $t_{x,k}^3$. Comme la dérivée de la fonction $F : t \mapsto t^{1/3} \cos t^{1/3}$ tend vers 0 quand $t \to \infty$, et que $|x - x_{n_k}| = |F(t_{x,k}^3) - F(n_k)| \leqslant |t_{x,k}^3 - n_k| \sup\{|F'(t)|,\ t \in [n_k, t_{x,k}^3]\}$, la suite (x_{n_k}) tend vers x. De même, $y_{n_k} - \sin t_{x,k} \to 0$.

   Enfin, toujours en considérant cette dérivée, il vient $\|u_{n+1} - u_n\| \to 0$.

   Comme la suite $n_k^{1/3} \cos n_k^{1/3}$ est bornée, on a $\cos n_k^{1/3} \to 0$. On en déduit que $y_{n_k}^2 \to 1$. Or $\sin t_{x,k}$ est du signe de $(-1)^k$. On en déduit que $(u_{n_{2k}}) \to (x, 1)$ et $(u_{n_{2k+1}}) \to (x, -1)$.

   Par ailleurs si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une suite strictement croissante telle que $u_{\varphi(n)}$ converge vers $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on trouve que $\varphi(n)^{1/3} \to \infty$, puis $\cos \varphi(n)^{1/3} \to 0$ et enfin $\sin^2 \varphi(n)^{1/3} \to 1$, donc $y = \pm 1$. On en déduit que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est $\mathbb{R} \times \{-1, 1\}$ et n'est donc pas connexe.

10.2 Approximation

Exercice 2.1. Par récurrence sur n, on a $u_n > 0$. Par ailleurs,

$$\frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} = \frac{u_n^2 - 2\sqrt{2}u_n + 2}{2u_n} = \frac{u_n}{2} - \sqrt{2} + \frac{1}{u_n} = u_{n+1} - \sqrt{2}.$$

On en déduit que pour tout n on a $u_n > \sqrt{2}$, donc $u_n^2 > 2$, donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{u_n}{2} < 0$. La suite u_n est donc décroissante, minorée par $\sqrt{2}$ donc convergente. Enfin, sa limite ℓ est positive et vérifie $\ell = \dfrac{\ell}{2} - \dfrac{1}{\ell}$, donc $\ell = \sqrt{2}$.

Puisque $u_n \geqslant \sqrt{2}$, il vient $u_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant \dfrac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}}$. Posons $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$; on a donc $v_{n+1} \leqslant v_n^2$. Il vient, $v_n \leqslant v_1^{2^{n-1}}$ (pour $n \geqslant 1$). Or $v_1 = \dfrac{1,5 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} < 0,031$. Donc $u_n - \sqrt{2} \leqslant 2\sqrt{2}.(0,031)^{2^{n-1}}$. Pour avoir 100 décimales exactes, on doit avoir $u_n - \sqrt{2} < 10^{-100}$. Il suffit donc d'avoir $2^{n-1}\log_{10}(0,031) > 100 + \log_{10}(2\sqrt{2})$. Donc $n = 8$ convient (à noter que le nombre de décimales exactes double à chaque itération).

Exercice 2.2. On a $\ln u_n = n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = n\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o(n^{-2})\right) = 1 - \dfrac{1}{2n} + o(n^{-1})$, donc $u_n = e\left(1 - \dfrac{1}{2n}\right) + o(n^{-1})$. En d'autres termes $e - u_n \sim \dfrac{e}{2n}$.

La suite (v_n) est croissante et la suite (w_n) définie par $w_n = v_n + \dfrac{1}{n \cdot n!}$; on a $v_{n+1} \leqslant e \leqslant w_n$, donc $\dfrac{1}{(n+1)!} \leqslant e - v_n \leqslant \dfrac{1}{n \cdot n!}$, ce qui prouve que $e - v_n \sim \dfrac{1}{(n+1)!}$.

Bien sûr, la suite (v_n) converge bien plus vite que la suite (u_n).

Pour « accélérer » (u_n), commençons par remarquer que le calcul de u_{2^n} n'utilise pas 2^n opérations mais juste n : en effet, pour élever un nombre à la puissance 2^n, on procède à n élévations au carré ! ([6])

La vitesse de convergence est maintenant géométrique d'ordre $\dfrac{1}{2}$ et on peut donc utiliser la méthode de Richardson-Romberg.

Remarquons que l'on a'accélère aussi la convergence en remplaçant u_N par $\left(1 + \dfrac{1}{N} + \dfrac{1}{2N^2}\right)^N$ (on pourra prendre encore $N = 2^n$).

En continuant cette idée, on finit par mélanger les deux suites en posant $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!N^k}\right)^N$.

Exercice 2.3.

1. La longueur du côté opposé d'un triangle isocèle dont les deux côtés égaux sont de longueur 1 et d'angle au sommet α vaut $2\sin(\alpha/2)$ et son aire vaut $\dfrac{\sin\alpha}{2}$. On en déduit que $a_n = \dfrac{n\sin(2\pi/n)}{2}$ et $b_n = n \sin \pi/n$.

   Remarquons que $b_n = a_{2n}$.

6. Et donc, pour élever un nombre à la puissance N, il faut en gros $\log_2 N$ opérations. Cette idée est très importante en algorithmique. Elle est par exemple à la base du code RSA.

2. On a $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$ et $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, donc pour $\alpha \in [0, \pi/2]$, il vient $\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{\cos 2\alpha + 1}{2}}$ et $\sin\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{2\cos\alpha}\cdot$ On a donc $c_{2n} = \sqrt{\dfrac{c_n + 1}{2}}$, $a_{2n} = \dfrac{a_n}{c_n}$ et $b_{2n} = \dfrac{b_n}{c_{2n}}$
On a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pi$. On définit alors des suites (u_n) et (v_n) vérifiant les propriétés de récurrence $v_{n+1} = \sqrt{\dfrac{v_n + 1}{2}}$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{v_{n+1}}$; on peut commencer par $u_0 = b_6 = 3$ et $v_0 = c_6 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ on aura $u_n = b_{6.2^n}$ qui conduit aux approximations d'Archimède ; prenant $u_0 = b_2 = 2$ et $v_0 = c_2 = 0$, on trouve la formule de Viète

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots$$

NB. Notons que l'on a $\alpha - \sin\alpha \sim \alpha^3/6$, d'où une estimation de l'erreur : la convergence est géométrique d'ordre 1/4 (et une accélération de la convergence en utilisant la méthode de Richardson-Romberg).
On peut encadrer π en utilisant l'encadrement $\sin\alpha < \alpha < \tan\alpha$, qui va donner $b_n < \pi < \dfrac{b_n}{c_n}\cdot$

Exercice 2.4.

1. Pour $x \in [0, 1[$, on a $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-x^2)^k$, d'où par intégration

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}\cdot$$

Pour $x \in [0, 1]$, cette dernière série est alternée donc convergente. Notons $f(x)$ sa somme. Pour $x \in [0, 1[$, on a donc $f(x) = \arctan x$. Or, encore par le théorème spécial des séries alternées, on a, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \right| \leqslant \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \leqslant \frac{1}{2n+3}\cdot$$

En d'autres termes, la convergence de la série est uniforme sur $[0, 1]$ (on vient de démontrer dans notre cas le *critère d'Abel uniforme*).
On en déduit que f est limite uniforme d'une suite de fonctions continues : elle est continue sur tout l'intervalle $[0, 1]$. On a donc $f(1) = \lim\limits_{t\to 1^-} f(t) = \lim\limits_{t\to 1^-} \arctan t = \arctan 1 = \pi/4$.

2. Posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. La majoration de l'erreur pour une série alternée donne $\left|\dfrac{\pi}{4} - S_n\right| \leqslant \dfrac{1}{2n+3}\cdot$ On veut donc $\dfrac{4}{2n+3} \leqslant 10^{-6}$, on dot prendre n ne de l'ordre de 2.10^6 (deux millions de termes)...

NB. En regroupant les termes 2 par 2, on peut écrire $S_{2m-1} = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{m-1} \frac{2}{(4\ell+1)(4\ell+3)}$. On trouve un équivalent de l'erreur $\pi - 4S_{2m-1} \sim \dfrac{1}{2m-1}\cdot$ Donc un million de termes suffisait... On peut aussi accélérer la convergence approchant π par $4S_{2m-1} + \dfrac{1}{2m}$ - et dans ce cas un millier de termes fera l'affaire...

3. Rappelons la formule $\tan(u+v) = \dfrac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}\cdot$

   Posons $a = \arctan \dfrac{1}{5}$ et $b = \arctan \dfrac{1}{239}$; remarquons que $0 < b < a < \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}\cdot$

   On a $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a} = \dfrac{5}{12}\cdot$

   Enfin, on a $\tan 4a = \dfrac{2\tan 2a}{1-\tan^2 2a} = \dfrac{120}{119} = \dfrac{1+\frac{1}{239}}{1-\frac{1}{239}} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}+b\right)$; puisque $4a$ et $\dfrac{\pi}{4}+b$ sont tous deux dans l'intervalle $]0,\pi[$ et ont même image par « tan », ils sont égaux.

4. On approche $\arctan \dfrac{1}{5} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{5^{2k+1}(2k+1)}$ et $\arctan \dfrac{1}{239} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{239^{2k+1}(2k+1)}\cdot$ Il vient

$$16\sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{5^{2k+1}(2k+1)} - \frac{4}{239} + \frac{4}{3\times 239^3} > \pi > 16\sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{5^{2k+1}(2k+1)} - \frac{4}{239} - \frac{16}{11\times 5^{11}}\cdot$$

   Or $11\times 5^{11} > \dfrac{16\times 10^8}{3}$ et $3\times 239^3 > 4\times 10^7$, donc $S - 3\times 10^{-8} < \pi < S + 10^{-7}$ où l'on a posé $S = 16\displaystyle\sum_{k=0}^{4} \dfrac{(-1)^k}{5^{2k+1}(2k+1)} + \dfrac{4}{239} \simeq 3,1415925847.$

   Avec six termes, on a obtenu une approximation meilleure qu'avec notre million de termes plus haut...

5. Posons $a = \mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{57}$, $b = \mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{239}$, $c = \mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{682}$ et $d = \mathrm{Arctan}\,\dfrac{1}{12943}$. On vérifie que $\tan(44a + 7b - 12c + d) = 1$ (l'aide d'un ordinateur peut s'avérer indispensable...), et, comme ci dessus, que $0 \leqslant 44a + 7b - 12c + d \leqslant \pi$, donc $44a + 7b - 12c + d = \pi/4$.

   La convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} \dfrac{(-1)^k}{57^{2k+1}(2k+1)}$ vers $\arctan \dfrac{1}{57}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{57^2}\cdots$

Exercice 2.5.

1. Puisque $f(x) \leqslant x$, la suite u_n est décroissante, minorée par 0. Elle converge. Sa limite satisfait $f(\ell) = \ell$, donc $\ell = 0$.
2. On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{f(u_n)}{u_n} \to 1$. La convergence est lente.
3. On a $f(x)^{1-p} - x^{1-p} = x^{1-p}\Big((1-ax^{p-1}+o(x^{p-1}))^{1-p}-1\Big) = x^{1-p}\Big((1-a(1-p)x^{p-1}+o(x^{p-1}))-1\Big) \to a(p-1)$.
4. On en déduit que $u_{n+1}^{1-p} - u_n^{1-p} \to a(p-1)$, donc (en utilisant Cesaro) $\dfrac{u_n^{1-p}}{n} \to a(p-1)$. Enfin $u_n \sim (na(p-1))^{-\frac{1}{p-1}}$.

10.3 Topologie

Exercice 3.1.

1. Soit $s > 0$ tel que $f(s) = 0$. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on a $f(ns) \leqslant nf(s)$, donc $f(ns) = 0$. Comme f est croissante, $f = 0$.
2. Pour $x, y, z \in X$, on a $f(d(x,y)) = 0 \iff d(x,y) = 0 \iff x = y$; $f(d(x,y)) = f(d(y,x))$; enfin
$$\begin{aligned} f(d(x,z)) &\leqslant f(d(x,y) + d(y,z)) && \text{puisque } f \text{ est croissante} \\ &\leqslant f(d(x,y)) + f(d(y,z)) \end{aligned}$$
3. Ces applications sont toutes croissantes
   - Supposons que $f(0) = 0$ et $f(s) = 1$ pour $s > 0$. On a $0 = f(0+0) \leqslant f(0) + f(0) = 0$. Si s et t ne sont pas tous deux nuls, on a $f(s) + f(t) \geqslant 1 = f(s+t)$.
   - Soit $u \in [0,1]$ tel que $s = (s+t)u$. On a alors $t = (s+t)(1-u)$. Pour $\alpha \in]0,1[$, on a $u \leqslant u^\alpha$ et $(1-u) \leqslant (1-u)^\alpha$, donc $(s+t)^\alpha = (u + (1-u))(s+t)^\alpha \leqslant (u^\alpha + (1-u)^\alpha)(s+t)^\alpha = s^\alpha + t^\alpha$.
   - Supposons que $f(s) = \min(s,1)$. Si $s,t \in [0,1]$, on a bien $\min(s+t,1)$. Si l'un des deux est > 1, alors $1 = \min(s+t,1) \leqslant \min(s,1) + \min(t,1)$.
   - Pour $s,t \in \mathbb{R}_+$, on a $\dfrac{s}{s+t+1} \leqslant \dfrac{s}{s+1}$ et $\dfrac{t}{s+t+1} \leqslant \dfrac{t}{t+1}$, donc $\dfrac{s+t}{s+t+1} \leqslant \dfrac{s}{s+1} + \dfrac{t}{t+1}$.
4. Fixons s et posons $h(t) = g(t) + g(s) - g(s+t)$. L'application h est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $h'(t) = g'(t) - g'(t+s) \leqslant 0$. Comme $h(0) = 0$, on a $h(t) \leqslant 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 3.2.

1. Posons $b = \sup F$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b - 2^{-n}$ ne majore pas F (puisque b est le plus petits des majorants de F). Il existe donc $x_n \in F$ avec $b - 2^{-n} < x_n$. Comme $x_n \in F$ et b majore F, il vient $b - 2^{-n} < x_n \leqslant b$. On en déduit que la suite (x_n) converge vers b et, puisque F est fermé, il vient $b \in F$.
2. Remarquons que a et b vérifient ces propriétés, puisque $]a,x] \cap F = \emptyset$ et $a \in F$ ou $a = -\infty$, on a $a = \sup F \cap]-\infty, x]$ (rappelons que $\sup \emptyset = -\infty$). De même $b = \inf F \cap [x, +\infty[$.

   Posons $a = \sup F \cap]-\infty, x]$. Puisque $F \cap]-\infty, x]$ est majoré (par x) et fermé, il vient $a = -\infty$ (si $F \cap]-\infty, x] = \emptyset$), ou $a \in F \cap]-\infty, x]$ (par la question 1.). En particulier, puisque $x \notin F$, il vient $a < x$.

   De même, posons $b = \inf F \cap [x, +\infty[$. On a encore $b \in F$ ou $b = +\infty$ et $b > x$.

   Pour $y \in]a,b[$, on a $y \notin F \cap]-\infty, x]$, puisque $y > a$ et $a = \sup F \cap]-\infty, x]$; de même $y \notin F \cap [x, +\infty[$ puisque $y < b = \inf F \cap [x, +\infty[$. Donc $y \notin F$.
3. Si $F = \emptyset$, on posera $g(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   Supposons donc $F \neq \emptyset$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus F$, et soient a, b définis comme dans la question 2. Si x majore F, on a $b = +\infty$. On posera $g(x) = f(a)$; remarquons qu'alors $a = \sup F$. De même, si x minore F, on posera $g(x) = f(\inf F)$. Enfin, si x ne majore ni ne minore F, on pose $a = \sup F \cap]-\infty, x]$ et $b = \inf F \cap [x, +\infty[$. On considérons alors l'application affine $\ell : \mathbb{R} \to E$ telle que $\ell(a) = f(a)$ et $\ell(b) = f(b)$. On pose $g(x) = \ell(x)$; autrement dit $g(x) = \dfrac{b-x}{b-a} f(a) + \dfrac{x-a}{b-a} f(b)$. Remarquons que si I est un intervalle tel que $\mathring{I}$ soit non vide et contenu dans $\mathbb{R} \setminus F$, les éléments $a = \sup F \cap]-\infty, x]$ et $b = \inf F \cap [x, +\infty[$, ne dépendent pas de $x \in I$ de sorte que la fonction g définie ci-dessus est bien affine sur I.
4. Remarquons que toute fonction affine $t \mapsto t\xi + \eta$ est lipschitzienne (de rapport $N(\xi)$ donc continue sur $\mathbb{R}$.

   Si $x \notin F$, la fonction g affine au voisinage de x est continue en x.

   Si $x \in F$, distinguons deux cas :

- ou bien il existe $\alpha > 0$ tel que $]x-\alpha, x[\subset \mathbb{R} \setminus F$, dans ce cas g est affine sur $[x-\alpha, x]$ donc est continue à gauche en x ;
- sinon, soit $\varepsilon > 0$; il existe $\alpha > 0$ tel que pour $y \in F$, tel que $|y-x| < \alpha$ on ait $N(f(x)) - f(y)) < \varepsilon$; dans $]x-\alpha, x[\cap F$ il existe un élément x'. Pour tout $y \in [x', x]$, $g(y)$ est dans l'enveloppe convexe de $\{f(z);\ z \in [x', x] \cap F\}$ elle-même contenue dans la boule ouverte de centre $f(x)$ et de rayon ε. Cela prouve que dans ce cas aussi g est continue à gauche en x.

On démontre de même que g est continue à droite en x.

Exercice 3.3. On peut supposer que $X \neq U$, sinon il n'y a rien à démontrer.

L'application $f : x \mapsto d(x, X \setminus U)$ est continue (elle est lipschitzienne de rapport 1). Comme $X \setminus U$ est fermé, on a $f(x) = 0 \iff x \in X \setminus U$ (en général, on $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$). La fonction f atteint son minimum en un point a du compact K. Posons $r = f(a)$. Comme $a \in U$, on a donc $r > 0$.

Soit $x \in X$; si $x \in X \setminus U$ alors pour tout $y \in K$, on a $d(x, y) \geqslant d(y, X \setminus U) \geqslant f(a) = r$, donc $d(x, K) \geqslant r$. Par contraposée, $d(x, K) < r \Rightarrow x \in U$.

Exercice 3.4.

1. $A + B$ est l'image par l'application continue $(x, y) \mapsto x + y$ du compact $A \times B$.
2. Soit $z \in \overline{A + B}$. Il existe une suite (z_n) dans $A + B$ qui converge vers z. Par définition, il existe $x_n \in A$ et $y_n \in B$ tels que $z_n = x_n + y_n$. Comme A est compacte, il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite $(x_{\varphi(n)})$ converge vers un point $a \in A$. La suite $(z_{\varphi(n)})$, extraite de la suite (z_n) converge vers z. Il s'ensuit que la suite $(z_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)})$, c'est-à-dire la suite $(y_{\varphi(n)})$ converge vers $z - a \in E$. Comme B est fermé, il vient $z - a \in B$, donc $z \in A + B$.
   NB. Les ensembles $A = \{n + 2^{-n};\ n \in \mathbb{N}^*\}$ et $\mathbb{Z}$ sont fermés dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2^{-n} \in A + \mathbb{Z}$ et $0 \notin A + \mathbb{Z}$, donc $A + \mathbb{Z}$ n'est pas fermé.

Exercice 3.5. Notez que cela résulte de l'exercice 3.3...

L'ensemble $C = X \times X \setminus U$ est fermé dans $X \times X$; il est compact. S'il n'est pas vide, la fonction continue $(x, y) \mapsto d(x, y)$ y atteint sa borne inférieure r. Pour tout $(x, y) \in C$, on a $x \neq y$, donc $d(x, y) \neq 0$. Il vient $r > 0$. Pour $(x, y) \in X \times X$, on a $(x, y) \in C \Rightarrow d(x, y) \geqslant r$; donc $d(x, y) < r \Rightarrow (x, y) \in U$.

Exercice 3.6. Soit (x_n) une suite de points de X convergeant vers un point $x \in X$. Nous devons démontrer que la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$. Pour cela, puisque Y est compact, il suffit de démontrer que toute suite extraite convergente de la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$. Soit donc $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante, telle que la suite $(f(x_{\varphi(n)}))$ converge vers un point y de Y. Alors la suite $(x_{\varphi(n)}, f(x_{\varphi(n)}))$ converge vers (x, y). Comme G est fermé, il vient $(x, y) \in G$ donc $y = f(x)$.

NB. Ce résultat ne se généralise pas au cas où Y n'est pas supposé compact. Par exemple, le graphe de l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(0) = 0$ et $f(x) = 1/x$ pour $x \neq 0$ est fermé : c'est l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 1\} \cup \{(0, 0)\}$.

Exercice 3.7.

1. a) Si X n'est pas précompact, il existe $r > 0$ tel que X ne soit pas réunion finie de boules de rayon r. On construit alors par récurrence une suite (x_n) telle que $x_n \notin \bigcup\limits_{k<n} B(x_k, r)$. On aura donc $d(x_m, x_n) \geqslant r$ pour $n \neq m$.
   b) Aucune suite extraite de la suite (x_n) ne pourra être de Cauchy et *a fortiori* convergente. Donc un espace non précompact n'est pas compact.

2. Soient X un espace métrique précompact et complet et (x_n) une suite dans X. On construit par récurrence une site A_k de parties infinies de $\mathbb{N}$ telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on ait $A_{k+1} \subset A_k$ et, pour $(m,n) \in A_k^2$, $kd(x_m, x_n) < 1$.

   On pose $A_0 = \mathbb{N}$, et supposant A_k construit, on trouve un nombre fini de boules de rayon $\dfrac{1}{2k+2}$ dont la réunion recouvre X. Comme A_k est infini, l'une au moins de ces boules, notons-la B, est telle que $A_{k+1} = \{m \in A_k;\ x_m \in B\}$ soit infini. Remarquons que si $m, n \in A_{k+1}$, les points x_m et x_n sont contenus dans la boule B, donc $d(x_m, x_n) < \dfrac{1}{k+.}\cdot$

   On peut alors construire une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\varphi(k) \in A_k$. Pour $m, n \in \mathbb{N}$, si $m > k$ et $n > k$, on a $\varphi(m) \in A_m \subset A_{k+1}$ et $\varphi(n) \in A_n \subset A_{k+1}$, donc $d(x_m, x_n) < \dfrac{1}{k+1}\cdot$ La suite extraite $x_{\varphi(m)}$ est de Cauchy donc elle converge. Cela prouve que X est compact.

Exercice 3.8.

1. Pour tout $x \in X$, l'application $y \mapsto d(x,y)$ est 1-lipschitzienne (d'après l'inégalité triangulaire). Il s'ensuit que la suite $(d(x,x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc convergente. L'application g est limite de la suite de fonctions 1-lipschitziennes $x \mapsto d(x,x_n)$: elle est 1-lipschitzienne (en effet pour tout $(x,y) \in X^2$, on a $|g(x) - g(y)| = \lim |d(x,x_n) - d(y,x_n)| \leqslant d(x,y)$), donc continue ([7]). Puisque la suite (x_n) n'est pas convergente, la fonction g ne s'annule pas. (En effet $g(y) = 0 \iff d(y,x_n) \to 0 \iff (x_n) \to y$). La fonction $1/g$ est donc bien définie et continue.

   Puisque la suite (x_n) est de Cauchy, on a $\lim g(x_n) = 0$ (en effet $g(x_n) \leqslant \sup\{d(x_p, x_q);\ p,q \geqslant n\}$ et ce sup tend vers 0), donc $g(x_n)^{-1} \to \infty$: la fonction $1/g$ n'est pas bornée.
2. Notons U_n la boule ouverte de centre x_n et de rayon $r/2$ et $V = \{x \in X;\ \inf d(x,x_n) > r/3\}$. La fonction $x \mapsto \inf d(x,x_n) = d(x, \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\})$ est 1-lipschitzienne donc continue. Ces parties forment donc un recouvrement ouvert de X. Il suffit de démontrer que f est continue sur chacun de ces ouverts. Sur V, la fonction f est nulle, donc elle y est continue. Sur U_n, on a $f(x) = \max\Big(0, n\big(\dfrac{r}{3} - d(x_n, x)\big)\Big)$; elle y est continue. Puisque $f(x_n) = \dfrac{nr}{3}$, la fonction f n'est pas bornée.
3. L'image d'un compact par une application continue est compacte donc fermée, d'où (i)⇒(ii).

   Si $f : X \to \mathbb{R}$ est une application continue non bornée, la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{1 + f(x)^2}$ est continue, ne s'annule pas, mais $0 \in \overline{g(X)}$, donc (ii)⇒(iii).

   On peut construire une application continue et non bornée de X dans $\mathbb{R}$ si X n'est pas complet - par (a), ou s'il n'est pas précompact par (b). D'où (iii)⇒(i).

Exercice 3.9. Pour $y \in Y$, posons $g(y) = \sup\{f(x,y); x \in X\}$.

Pour tout $y \in Y$, l'application continue $x \mapsto f(x,y)$ atteint son maximum sur le compact X : il existe un point $x \in X$ tel que $f(x,y) = g(y)$.

Soit (y_n) une suite de points de Y convergeant vers un point $y \in Y$. Soient $x \in X$ et (x_n) une suite de points de X tels que $f(x,y) = g(y)$ et $f(x_n, y_n) = g(y_n)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue, on a $\lim f(x, y_n) = f(x,y)$; donc il existe n_0, tel que pour $n \geqslant n_0$, on ait $g(y_n) \geqslant f(x,y_n) > f(x,y) - \varepsilon = g(y) - \varepsilon$.

Supposons que l'ensemble $Z = \{n \in \mathbb{N};\ g(y_n) \geqslant g(y) + \varepsilon\}$ ne soit pas majoré. De la suite $(x_n)_{n\in Z}$ dans le compact X, on peut extraire une suite convergente. Il existe donc une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to Z$ telle que la suite $(x_{\varphi(n)})$ soit convergente vers un point $z \in X$. On a alors

7. On peut aussi démontrer que la suite de fonctions $x \mapsto d(x,x_n)$ converge *uniformément* vers g.

$g(y) \geqslant f(z,y) = \lim f(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)})$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \geqslant g(x) + \varepsilon$, et on arrive à une contradiction.

L'ensemble Z étant majoré, il existe n_1 que l'on peut supposer $\geqslant n_0$ qui le majore. Pour $n > n_1$, on a $g(y) + \varepsilon > g(y_n) > g(y) - \varepsilon$. On en déduit que $g(y_n)$ tend vers $g(y)$, donc g est continue.

Exercice 3.10. Si Y est discret, toute partie de Y est fermée, donc toute application à valeurs dans Y est fermée !

Supposons que X soit compact et soit F une partie fermée de $X \times Y$. Soit y_n une suite de points de $p(F)$ (où $p : X \times Y \to Y$ est la projection) qui converge vers un point $y \in Y$. On doit démontrer que $y \in p(F)$. Puisque $y_n \in p(F)$, il existe $x_n \in X$ tel que $(x_n, y_n) \in F$. Comme X est compact, il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite $(x_{\varphi(n)})$ soit convergente vers un point $x \in X$. Alors la suite $(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)})$ converge vers (x,y) ; puisque F est fermé, il vient $(x,y) \in F$, donc $y \in p(F)$.

Si X n'est pas compact et Y n'est pas discret, il existe
- une suite (x_n) de points de X dont aucune suite extraite ne converge ;
- une suite (y_n) de points de Y convergeant vers un point $y \in Y$ telle que, pour tout n, on ait $y_n \neq y$.

Posons $F = \{(x_n, y_n);\ n \in \mathbb{N}\}$. Si F n'était pas fermée, il existerait une suite (z_k) de points de F convergeant vers un point z qui n'est pas dans F ; alors il existerait une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $z_k = (x_{\varphi(k)}, y_{\varphi(k)})$; comme la limite de la suite z_k n'étant pas un point de cette suite, chaque valeur de la suite serait prise au plus un nombre fini de fois, donc on aurait $\lim \varphi(k) = +\infty$. Quitte à extraire une sous-suite, on pourrait alors supposer que φ est strictement croissante. Or la suite $(x_{\varphi(k)})$ ne peut pas converger par hypothèse. Il en résulte que F est fermé

Or $p(F) = \{(y_n);\ n \in \mathbb{N}\}$ qui n'est pas fermé puisque $y \notin p(F)$, donc p n'est pas fermée.

Exercice 3.11.
- L'application constante définie par $\alpha(t) = x$ pour tout $t \in [0,1]$ est continue, donc $x\,R\,x$: on en déduit que R est *réflexive.*
- Soit $\alpha : [0,1] \to X$ une application continue telle que $\alpha(0) = x$ et $\alpha(1) = y$; posons $\beta(t) = \alpha(1-t)$; c'est une application continue et l'on a $\beta(0) = y$ et $\beta(1) = x$. On en déduit que R est *symétrique.*
- Soient $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ des applications continues telle que $\alpha(0) = x$ et $\alpha(1) = y = \beta(0)$ et $\beta(1) = z$. Notons $\gamma : [0,1] \to X$ l'application définie par $\gamma(t) = \alpha(2t)$ si $0 \leqslant t \leqslant 1/2$ et $\gamma(t) = \beta(2t-1)$ si $1/2 \leqslant t \leqslant 1$. Cette application est continue en tout point de $[0, 1/2[$ et de $]1/2, 1]$; elle est continue à gauche et à droite en $1/2$; elle est donc continue. On en déduit que R est *transitive.*

Pour $x \in X$, notons A_x la classe de x pour la relation d'équivalence R ($A_x = \{y \in X;\ x\,R\,y\}$).

Si $B \subset X$ est une partie connexe par arcs contenant x, pour tout $y \in B$, il existe une application continue $\alpha : [0,1] \to B$ telle que $\alpha(0) = x$ et $\alpha(1) = y$ (car B est connexe par arcs). L'application α est une application continue de $[0,1]$ dans X, donc $y \in A_x$. Il vient $B \subset A_x$.

Il reste à démontrer que A_x est connexe par arcs. Pour $y, z \in A_x$, il existe une application continue $\alpha : [0,1] \to X$ telle que $\alpha(0) = y$ et $\alpha(1) = z$; remarquons que pour tout $s \in [0,1]$, on a $\alpha(s)\,R\,y$: l'application $\beta_s : t \mapsto \alpha(st)$ est continue et joint y à $\alpha(s)$. Par transitivité, il vient $\alpha(s) \in A_x$. Alors α est un chemin tracé dans A_x qui joint y à z. Cela prouve que A_x est connexe par arcs.

Exercice 3.12.

1. L'ensemble A est convexe, donc connexe.
2. D'après le théorème des accroissements finis, pour tout $(x,y) \in A$, il existe $z \in I$ tel que $g(x,y) = f'(z)$. Il vient $g(A) \subset f'(I)$. Enfin, pour tout $x \in I$, on a $f'(x) = \lim\limits_{y \to x^+} g(x,y)$, donc $f'(I) \subset \overline{g(A)}$.
3. Puisque g est continue et A est connexe, $g(A)$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$: c'est un intervalle. L'ensemble $f'(I)$ qui est coincé entre $g(A)$ est son adhérence est un intervalle avec les mêmes extrémités.

Donnons deux autres démonstrations du théorème de Darboux. Il s'agit de démontrer que si $a < b$ sont tels que $[a, b] \subset U$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ entre $f'(a)$ et $f'(b)$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $f'(x) = \xi$.

1. Posons $g(a) = f'(a)$ et pour $x \in]a, b]$, posons $g(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Posons aussi $h(b) = f'(b)$ et pour $x \in [a, b[$, posons $h(x) = \dfrac{f(b) - f(x)}{b - x}$. Les fonctions g et h sont continues parce que f l'est et par définition de f'. Donc $g([a, b])$ et $h([a, b])$ sont des intervalles. Or $g(b) = h(a)$, donc $J = g([a, b]) \cup h([a, b])$ est un intervalle. Comme $f'(a) \in J$ et $f'(b) \in J$, il vient $\xi \in J$. Par ailleurs, d'après le théorème des accroissements finis, pour tout $x \in]a, b]$, il existe $y \in]a, x[$ tel que $g(x) = f'(y)$ et pour tout $x \in [a, b[$, il existe $y \in]x, b[$ tel que $g(x) = f'(y)$. En d'autres termes $J \subset f'([a, b[$.
2. Quitte à échanger f en $-f$, on peut supposer que $f'(a) < \xi < f'(b)$. Posons $g(x) = f(x) - \xi x$. Comme $g'(a) < 0$, pour $x \in]a, b[$ assez proche de a, on a $g(x) < g(a)$; de même, comme $g'(b) > 0$, pour $x \in]a, b[$ assez proche de b, on a $g(x) < g(b)$. On en déduit que le minimum de g sur $[a, b]$ - qui est atteint d'après la compacité de $[a, b]$ - est atteint en un point x distinct de a et de b. Il vient $g'(x) = 0$, donc $f'(x) = \xi$.

Exercice 3.13. Notons I l'ensemble des composantes connexes de U.

Soit A une composant connexe de U ; pour tout $x \in A$, puisque U est ouvert, il contient une boule ouverte B centrée en U. L'ensemble B est convexe donc connexe et contient x ; il est donc contenu dans la composante connexe A de x dans U. Cela prouve que A est ouvert.

Comme $\mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$, on a $\mathbb{Q} \cap A \neq \emptyset$. Posons $D = U \cap \mathbb{Q}^n$; c'est un ensemble dénombrable ; l'application qui à $x \in D$ associe sa composante connexe est surjective de D sur I donc I est dénombrable.

Exercice 3.14. Si X satisfait (ii),
- de tout recouvrement ouvert de X on peut extraire un recouvrement fini, donc X est compact ;
- si U_1 et U_2 sont deux parties ouvertes non vides distinctes de X et telles que $U_1 \cup U_2 = X$, alors en appliquant (ii) à $I = \{1, 2\}$, on trouve une suite finie $i_1, \dots, i_n$ d'éléments de $\{1, 2\}$, avec $\bigcup U_{i_k} = X$, donc la suite n'est pas constante : il existe k tel que $i_k \neq i_{k+1}$, d'où $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. On en déduit que X n'admet pas de partition en deux ouverts : il est connexe.

Supposons inversement que X soit connexe et compact, et soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X. Puisque X est compact, il existe une partie finie J de I telle que $\displaystyle\bigcup_{i \in J} U_i = X$. On raisonne par récurrence sur le nombre d'éléments de J.

- Si J possède un seul élément i, alors $X = U_i$. Prendre dans ce cas $n = 1$ ([8]).
- Supposons donc que J possède $m \geqslant 2$ éléments et que pour tout recouvrement $(V_k)_{k \in K}$ avec K possédant $m - 1$ éléments il existe un nombre entier $n \in \mathbb{N}$ et des éléments $k_1, \dots, k_n$ de K tels que $\displaystyle\bigcup_{\ell=1}^{n} U_{k_\ell} = X$ et tels que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant \ell < n$, on ait $U_{k_\ell} \cap U_{k_{\ell+1}} \neq \emptyset$.

  S'il existe $i \in J$ tel que $U_i = \emptyset$, on peut remplacer J par $K = J \setminus \{i\}$ et appliquer l'hypothèse de récurrence.

  Sinon, soit $i \in J$ tel que $U_i \neq \emptyset$. Si $U_i = X$, on peut prendre prendre $n = 1$ et $i_1 = i$. Supposons donc $U_i \neq X$. On a $X = U_i \cup \displaystyle\bigcup_{j \neq i} U_j$, et X étant connexe, ces deux ouverts ne sont pas disjoints, donc il existe $i' \in J$ avec $i' \neq i$ tel que $U_i \cap U_{i'} \neq \emptyset$. Soit alors un élément $k \notin J$ et posons $K = (J \setminus \{i, i'\}) \cup \{k\}$ et $U_k = U_i \cup U_{i'}$. Par hypothèse de récurrence, il existe n et une suite finie $(i_1, \dots, i_n) \in K^n$ vérifiant les conclusions de (ii).

  On construit alors une suite finie $(j_1, \dots, j_N)$ de la façon suivante : chaque fois que dans la liste $(i_1, \dots, i_n)$ apparaît k, on le remplace par i, par i', par i, i' ou par i', i selon que le prédécesseur et le

8. Si $X = \emptyset$, prendre $n = 0$.

successeur (qui rencontrent tous deux U_k) rencontrent respectivement tous les deux U_i, tous les deux $U_{i'}$, le premier U_i le second $U_{i'}$, ou le premier $U_{i'}$ le second U_i. Si l'on n'a pas $\bigcup_{\ell=1}^{N} U_{j_\ell} = X$ c'est que dans la suite ainsi formée apparaît U_i mais pas $U_{i'}$ (ou le contraire) ; dans ce cas, on remplace un i dans cette nouvelle suite par i, i', i.

Exercice 3.15.

1. Si $x = y$, on a $\overline{B}(x,r) \subset \overline{B}(x,s)$, donc $r \leqslant s$ ([9]). Si $x \neq y$, posons $z = x + \dfrac{r}{N(x-y)}(x-y)$. On a $N(z-x) = r$, donc $z \in \overline{B}(x,r)$; de plus $z - y = \Big(1 + \dfrac{r}{N(x-y)}\Big)(x-y)$, donc $N(z-y) = N(x-y) + r$. Puisque $z \in \overline{B}(y,s)$, il vient $N(y-x) + r \leqslant s$.
2. Écrivons $B_n = \overline{B}(x_n, r_n)$. On déduit de (a), que, pour $n \leqslant m$, on a $N(x_n - x_m) \leqslant r_n - r_m$; la suite r_n est décroissante et minorée par 0, donc convergente, l'inégalité $N(x_n - x_m) \leqslant r_n - r_m$ implique donc que la suite (x_n) est de Cauchy. Puisque E est complet, elle est convergente ; notons x sa limite. Pour $m \geqslant n$, on a $x_m \in B_m \subset B_n$; donc la suite $(x_k)_{k \geqslant n}$ étant dans B_n, qui est fermé, sa limite x est dans B_n ; cela prouve que $\bigcap B_n \neq \emptyset$.

Exercice 3.16.

1. Si $x \in f(A_R)$, il existe $y \in A_R$ tel que $y = f(x)$. On a alors $d(y, f(y) = d(f(x), f(y)) \leqslant kd(x,y) = kd(x, f(x)) \leqslant kR$, donc $y \in A_{kR}$.
   On en déduit que si $A_R \neq \emptyset$, alors $A_k R \neq \emptyset$. Puisque $X \neq \emptyset$, il existe $x_0 \in X$. Posons $R_0 = d(x_0, f(x_0))$; on a $x_0 \in A_{R_0}$. Donc $A_{R_0} \neq \emptyset$; on en déduit par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A_{k^n R_0} \neq \emptyset$. Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$; comme $k^n R_0 \to 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $k^n R_0 \leqslant R$, donc A_r contient $A_{k^n R_0}$ et n'est pas vide.
   L'application $\varphi : x \mapsto d(x, f(x))$ est continue de X dans $\mathbb{R}$ (elle est lipschitzienne de rapport $1 + k$), donc A_R qui est égal à $\varphi^{-1}([0, R])$ est fermé.
2. Si $x, y \in A_R$, on a $d(x,y) \leqslant d(x, f(x)) + d(f(x), f(y)) + d(f(y), y) \leqslant 2R + d(f(x) + f(y))$; or $d(f(x) + f(y)) \leqslant kd(x,y)$, donc $(1-k)d(x,y) \leqslant 2R$; donc $\dfrac{2R}{1-k}$ majore $\{d(x,y);\ (x,y) \in A_R^2\}$ et est donc plus on a bien $\dfrac{2R}{1-k} \geqslant \sup\{d(x,y);\ (x,y) \in A_R^2\} = \delta(A_R)$.
3. Par définition, on a $A_0 = \{x \in X;\ x = f(x)\} = \{x \in X; \forall n \in \mathbb{N}^*,\ d(x, f(x)) \leqslant 1/n\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{1/n}$.
   Comme X est complet, une intersection d'une suite décroissante de parties fermées non vides dont le diamètre tend vers 0 n'est pas vide, donc $A_0 \neq \emptyset$. En d'autres termes f possède un point fixe.

Exercice 3.17.

1. Soient $(x_0, y_0) \in X \times Y$ et $\varepsilon > 0$. Par la continuité de l'application $x \mapsto f(x, y_0)$, il existe un voisinage V de x_0 tel que, pour $x \in V$ on ait $d(f(x_0,y_0), f(x,y_0)) < \varepsilon/2$. Or, pour tout $x \in X$, l'application $y \mapsto f(x,y)$ étant contractante, on a, pour $x \in V$, $d(f(x_0,y_0), f(x,y)) \leqslant d(f(x_0,y_0), f(x,y_0)) + d(f(x,y_0), f(x,y)) < \varepsilon/2 + d(y_0, y)$. On en déduit que si $d(y_0, y) < \varepsilon/2$, et $x \in V$, on a $d(f(x_0,y_0), f(x,y)) < \varepsilon$.
2. L'application $\varphi_x : y \mapsto f(x,y)$ possède un unique point fixe - d'après le théorème du point fixe.

9. On doit ici supposer que E n'est pas réduit à l'élément nul.

3. Soient $x_0 \in X$ et $\varepsilon > 0$; posons $y_0 = g(x_0)$. Soit V un voisinage de x_0 et $k < 1$ tels que pour $x \in V$ et $y, z \in Y$ on ait $d\big(f(x,y), f(x,y)\big) \leqslant k\, d(y,z)$. On a $f(x_0, y_0) = y_0$. Par continuité de $x \mapsto f(x, y_0)$, il existe un voisinage W de x_0 tel que pour $x \in W$ on ait $d\big(f(x,y_0), y_0\big) \leqslant \varepsilon(1-k)$. Pour $x \in V \cap W$, on a $d\big(f(x,y_0), f(x,g(x))\big) \leqslant kd(y_0, g(x))$. Or $f(x,g(x)) = g(x)$. Il vient

$$d\big(y_0, g(x)\big) \leqslant d\big(y_0, f(x,y_0)\big) + d\big(f(x,y_0), g(x)\big) \leqslant kd\big(y_0, g(x)\big) + \varepsilon(1-k),$$

donc $d\big(y_0, g(x)\big) < \varepsilon$.

10.4 Espaces vectoriels normés

Exercice 4.1. Si $\lambda \in \ell(B)$, il existe $x \in B$ tel que $\ell(x) = \lambda$. Alors $\mu x \in B$, donc $\lambda\mu \in \ell(B)$. Si ℓ n'est pas continue, alors $\ell(B)$ n'est pas borné ; donc pour tout $z \in \mathbb{C}$ il existe $\lambda \in \ell(B)$ tel que $|z| < \lambda$; posant $\mu = z/\lambda$, il vient $z \in \ell(B)$, soit $\ell(B) = \mathbb{C}$. Il existe $x \in U$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x + rB = B(x, r) \subset U$; il vient $\ell(U) \supset \{\ell(x) + rz;\ z \in \ell(B)\} = \mathbb{C}$.

Exercice 4.2.

1. Soit $x \in E$. Pour tout $\varepsilon > 0 \in \mathbb{N}$, il vient $(p(x)+\varepsilon)^{-1}x \in B_p(0,1) \subset \overline{B}_q(0,1)$, donc $q(x) \leqslant p(x)+\varepsilon$. Comme cela est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, il vient $q(x) \leqslant p(x)$.
2. Résulte immédiatement de 1.

Exercice 4.3.

1. Soient $f, g \in C^1([0,1];\mathbb{C})$. Il est clair que pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $p(\lambda f) = |\lambda| p(f)$ et $q(\lambda f) = |\lambda| q(f)$; on a $\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$, $\|f'+g'\|_\infty \leqslant \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty$ et $|f'(0)+g'(0)| \leqslant |f'(0)| + |g'(0)|$ d'où les inégalités triangulaires pour p et q. Enfin $q \leqslant p$ et si $q(f) = 0$, alors $f' = 0$ donc f est constante et comme $f(0) = 0$, f est nulle, donc p et q sont des normes. Enfin, pour $t \in [0,1]$, on a $f(t) = f(0) + \displaystyle\int_0^t f'(s)\,ds$, donc $|f(t)| \leqslant q(f)$. Il vient $\|f\|_\infty \leqslant q(f)$, donc $p(f) \leqslant 2q(f)$, ce qui prouve que p et q sont équivalentes.
2. Pour $f_n = \sin nx$, on a $\|f_n\|_\infty \leqslant 1$ et $\|f_n'\|_\infty = n$, donc $p(f) \geqslant n$. On en déduit que p et $f \mapsto \|f\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.
3. Si (f_n) est de Cauchy pour la norme q, alors, comme p et q sont équivalentes, (f_n) est de Cauchy pour la norme p. On en déduit que (f_n) et (f_n') sont de Cauchy pour la norme $\|\ \|_\infty$. Elle convergent unformément vers des fonctions g et h respectivement. Par le théorème de dérivation d'une limite (p. 39), il vient $g' = h$.

Exercice 4.4. Soient (E, N) un un espace vectoriel normé, x un point de E et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

Puisque l'application $y \mapsto N(y - x)$ est continue, la boule $\overline{B}(x,r)$ est une partie fermée de E, donc $\overline{B}(x,r)$ contient l'adhérence de $B(x,r)$. Soit $y \in \overline{B}(x,r)$; pour $n \in \mathbb{N}$, posons $y_n = x + \dfrac{n}{n+1}(y-x)$. On a $y_n - x = \dfrac{n}{n+1}(y-x)$, donc $N(y_n - x) = \dfrac{n}{n+1}N(y-x) \leqslant \dfrac{nr}{n+1} < r$, donc $y_n \in B(x,r)$; de plus $\dfrac{n}{n+1}$ tend vers 1. Par la prop. 4.1, $\dfrac{n}{n+1}(y-x)$ tend vers $y - x$, donc y_n tend vers y. Il en résulte que y est adhérent à $B(x,r)$. Cela montre que $\overline{B}(x,r) \subset \overline{B(x,r)}$.

Comme la boule $B(x,r)$ est ouverte, elle est contenue dans l'intérieur de $\overline{B}(x,r)$. Soit y un point intérieur à $\overline{B}(x,r)$; pour $n \in \mathbb{N}$, posons $y_n = x + \dfrac{n+2}{n+1}(y-x)$. Comme ci-dessus, la suite (y_n) converge vers y. Donc, pour n assez grand, $y_n \in \overline{B}(x,r)$. On en déduit que $y \in B(x,r)$, puisque $N(y-x) = \dfrac{n+1}{n+2}N(y_n - x) < r$.

Exercice 4.5. Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.

Puisque $0 \in F$, il vient $0 \in \overline{F}$.

Soient $x, y \in \overline{F}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe des suites (x_n) et (y_n) dans F convergeant respectivement vers x et y. Alors, par continuité des opérations, la suite $(\lambda x_n + y_n)$ d'éléments de F converge vers $\lambda x + y$, donc $\lambda x + y \in \overline{F}$.

Exercice 4.6. Si f est continue, alors $\ker f = f^{-1}\big(\{0\}\big)$ est fermé.

Supposons $\ker f$ fermé. Soit E_1 un sous-espace vectoriel de E, supplémentaire de $\ker f$ dans E. Pour $x \in E_1$, posons $N(x) = \inf\{p(x-y); y \in \ker f\}$. Vérifions que N est une norme.

- Si $N(x) = 0$, alors la distance de x à $\ker f$ est nulle donc, comme $\ker f$ est fermé, on a $x \in \ker f$. Or $x \in E_1$, donc $x = 0$, car $E_1 \cap \ker f = \{0\}$.
- Soient $x \in E_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $y \in \ker f$, on a $N(\lambda x) \leqslant p(\lambda x - \lambda y) = |\lambda| p(x-y)$. Prenant l'« inf » sur y, on obtient $N(\lambda x) \leqslant |\lambda| N(x)$.
- Soient $x, x' \in E_1$. Pour tout $y, y' \in \ker f$, on a

$$N(x+x') \leqslant p(x+x'-y-y') \leqslant p(x-y) + p(x'-y')\,.$$

  Prenant l'« inf » sur y et y', on obtient $N(x+x') \leqslant N(x) + N(x')$.

Il s'ensuit que N est une norme sur E_1.

Comme la restriction de f à E_1 est injective, $q \circ f$ est aussi une norme sur E_1.

Or E_1 est de dimension finie, puisque la restriction de f est une application linéaire bijective de E_1 sur $\operatorname{Im} f$. On en déduit que N est équivalente à $q \circ f$, donc il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $q \circ f \leqslant kN$.

Soit $x \in E$. Écrivons $x = y+z$ avec $y \in \ker f$ et $z \in E_1$. Par définition de N, on a $N(z) \leqslant p(y+z) = p(x)$. De plus, on a $f(x) = f(z)$, donc il vient $q\big(f(x)\big) = q\big(f(z)\big) \leqslant kN(z) \leqslant kp(x)$. Cela montre que f est continue et que l'on a $\|f\| \leqslant k$.

Exercice 4.7.

1. Posons $B = \{z \in F;\ \|x-z\| \leqslant \|x\|\}$. C'est une partie fermée de F, non vide puisque $0 \in B$; pour $z \in B$, on a $\|z\| \leqslant \|x-z\| + \|x\| \leqslant 2\|x\|$, donc B est bornée. Puisque F est de dimension finie, on en déduit que B est compact. L'application continue $z \mapsto \|x-z\|$ y atteint son minimum en un point $y \in B$. Pour $z \in F$, on a alors $\|x-y\| \leqslant \|x-z\|$ si $z \in B$ par définition du minimum et $\|x-y\| \leqslant \|x\| < \|x-z\|$ si $z \notin B$ (par définition de B). Donc $d(x,F) = \|x-y\|$.
   Soient alors $y \in F$ et $x_0 \in E \setminus F$. Il existe $y_0 \in F$ tel que $\|x_0 - y_0\| = d(x,F)$. On pose alors $\alpha = \dfrac{\|x_0 - y_0\|}{\lambda}$ et $x = y + \alpha(x_0 - y_0)$. On a $\|x-y\| = \alpha\|x_0-y_0\| = \lambda$; pour $z \in F$, posant $u = y_0 + \alpha^{-1}(z-y) \in F$ on a $x - z = \alpha(x_0 - u)$, donc $\|x-z\| = \alpha\|x_0-u\| \geqslant \lambda$. On a bien $d(x,F) = \|x-y\| = \lambda$.
2. a) On construit la suite x_n par récurrence. Posons $x_0 = 0$ et, supposant x_n construit dans F_n, puisque $F_n \subset F_{n+1}$ et $F_n \neq F_{n+1}$, il existe d'après la question 1, $x_{n+1} \in F_{n+1}$ tel que $d(x_{n+1}, F_n) = \|x_{n+1} - x_n\| = 3^{-n}$.

   b) Pour $p, q \in \mathbb{N}$, $p < q$, on a $x_q - x_p = \displaystyle\sum_{n=p}^{q-1} x_{n+1} - x_n$, donc $\|x_p - x_q\| \leqslant \displaystyle\sum_{n=p}^{q-1} 3^{-n} \leqslant \frac{3^{1-p}}{2}$. Il en résulte que la suite (x_n) est de Cauchy. Elle converge ; notons x sa limite.

   Pour $q > n$, on a, par le calcul ci-dessus, $\|x_q - x_{n+1}\| \leqslant \dfrac{3^{-n}}{2}$, donc, à la limite, $\|x - x_{n+1}\| \leqslant \dfrac{3^{-n}}{2}$. Pour $z \in F_n$, on a $3^{-n} \geqslant \|x_{n+1} - z\| \geqslant \|x_{n+1} - x\| + \|x - z\|$, donc $\|x-z\| \geqslant \dfrac{3^{-n}}{2}$. Prenant l'inf, il vient $d(x, F_n) \geqslant \dfrac{3^{-n}}{2}\cdot$

   c) On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \notin F_n$, soit $x \notin \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$.
3. Un espace vectoriel ayant une base dénombrable $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est réunion des sous-espaces de dimension finie F_n engendrés par $(e_k)_{k\leqslant n}$.

4. On construit grâce au lemme page 24 une suite (x_n) avec $x_n \in F_n$ pour tout n et telle que $\|x_{n+1} - x_n\| = 4^{-n}$ et $d(x_{n+1}, F_n) \geqslant 2^{-2n-1}$. Cette suite est de Cauchy comme ci-dessus et sa limite x satisfait pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x - x_{n+1}\| \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} 4^{-k} = \frac{4^{-n}}{3} < d(x_{n+1}, F_n)$, donc $x \notin F_n$

Exercice 4.8.

1. Prenant $y = 0$, on trouve $f(x+0) + f(x-0) = 2f(x) + 2f(0)$, donc $f(0) = 0$; prenant $x = 0$, on a alors $f(0+y) + f(0-y) = 2f(0) + 2f(y)$, d'où $f(-y) = f(y)$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $f(nx+x) + f(nx-x) = 2f(nx) + 2f(x)$. Démontrons alors par récurrence sur n la propriété : $P(n)$: on a $f(nx) = n^2 f(x)$.
   - $P(1)$ est clair et $P(0)$ résulte de 1.
   - Soit alors $n \geqslant 1$ et supposons que $P(k)$ soit vrai pour tout $k \leqslant n$. On a alors
   $$\begin{aligned} f((n+1)x) &= 2f(nx) + 2f(x) - f((n-1)x) \\ &= (2n^2 + 2 - (n-1)^2) f(x) \qquad \text{d'après } P(n) \text{ et } P(n-1) \\ &= (n+1)^2 f(x). \end{aligned}$$

   Pour n négatif, on a alors $f(nx) = f((-n)x) = n^2 f(x)$.

   Enfin, soit $k \in \mathbb{Q}$. Écrivons $k = p/q$ avec p, q entiers $(q \neq 0)$, et posons $y = \dfrac{1}{q}x$, donc $x = qy$ et $kx = py$. On a $f(x) = q^2 f(y)$ et $f(kx) = q^2 f(y)$, donc $f(kx) = k^2 f(x)$.
3. Ajoutons les égalités
   $$\begin{aligned} f(x+y+z) &= 2f(x+y) + 2f(z) - f(x+y-z), \\ f(x+y+z) &= 2f(x+z) + 2f(y) - f(x-y+z), \\ 2f(x) + 2f(y-z) &= f(x+y-z) + f(x-y+z), \\ 4f(y) + 4f(z) &= 2f(y+z) + 2f(y-z). \end{aligned}$$

   On trouve $2f(x+y+z) + 2f(x) + 2f(y-z) + 4f(y) + 4f(z) = 2f(x+y) + 2f(z) + 2f(x+z) + 2f(y) + 2f(y+z) + 2f(y-z)$, d'où le résultat.
4. Posons $\varphi(x, y) = f(x+y) - f(x) - f(y)$. On a clairement $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$. Fixons $z \in E$. Pour $x, y \in E$, on a
   $$\begin{aligned} \varphi(x+y, z) = f(x+y+z) - f(x+y) - f(z) &= f(x+z) + f(y+z) - f(x) - f(y) - 2f(z) \\ &= \varphi(x, z) + \varphi(y, z). \end{aligned}$$

   On en déduit, que $\varphi(x, z) + \varphi(-x, z) = 0$ et, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\varphi(nx, z) = n\varphi(x, z)$. Il vient $\varphi(nx, z) = n\varphi(x, z)$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

   Enfin, soit $k \in \mathbb{Q}$. Écrivons $k = p/q$ avec p, q entiers $(q \neq 0)$, et posons $y = \dfrac{1}{q}x$, donc $x = qy$ et $kx = py$. On a $\varphi(x, z) = p\varphi(y, z)$ et $\varphi(kx, z) = q\varphi(y, z)$, donc $\varphi(kx, z) = k\varphi(x, z)$.
5. Pour $y \in E$, l'application $x \mapsto \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$ est $\mathbb{Q}$-linéaire et continue donc $\mathbb{R}$-linéaire.

Exercice 4.9.

1. a) Pour $z \in C$, on a alors
   $\|z - x\|^2 = \|(z-y) + (y-x)\|^2 = \|z-y\|^2 + 2\Re\big(\langle z - y | y - x\rangle\big) + \|y - x\|^2 \geqslant \|y - x\|^2$.

   b) Notons $d = \inf\{\|x - y\| ; y \in C\}$ la distance de x à C. Soient $y, z \in C$. Posons $b = x - \dfrac{1}{2}(y+z)$ et $c = \dfrac{1}{2}(y - z)$; alors on a $\|b\| \geqslant d$ car $\dfrac{1}{2}(y+z) \in C$; comme $x - y = b - c$ et $x - z = b + c$, on a, par l'identité de la médiane :
   $$\|x-y\|^2 + \|x-z\|^2 = 2\big(\|b\|^2 + \|c\|^2\big) \geqslant 2d^2 + \frac{1}{2}\|y - z\|^2 .$$

On en déduit
$$\|y-z\|^2 \leqslant 2\big(\|x-y\|^2-d^2\big)+2(\|x-z\|^2-d^2)\,.$$
Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $C_n=\{y\in C;\, \|x-y\|^2\leqslant d^2+1/n\}$. C'est une partie fermée non vide de C. D'après l'inégalité précédente, le diamètre de C_n est inférieur ou égal à $2/\sqrt{n}$, donc tend vers 0. Comme C est complet, l'intersection des C_n qui est égale à $\{y\in C;\, \|x-y\|=d\}$, contient un et un seul point $p_C(x)$.

c) Posons $p_C(x)=y_0$. Soit $y\in C$. Pour $t\in[0,1]$, on a $y_0+t(y-y_0)\in C$, donc $\|y_0+t(y-y_0)-x\|\geqslant d$. Posons $\varphi(t)=\|y_0+t(y-y_0)-x\|^2=\|y_0-x\|^2+2t\Re(\langle y_0-x|y-y_0\rangle)+t^2\|y-y_0\|^2$. Puisqu'on a $d^2=\varphi(0)\leqslant\varphi(t)$ pour tout $t\in[0,1]$, la dérivée de φ en 0 est positive ou nulle, autrement dit $\Re(\langle y_0-x|y-y_0\rangle)\geqslant 0$.

Il résulte de (a) et (c) que, pour $u\in C$, on a
$$u=p_C(x)\iff \forall z\in C,\ \ \Re\big(\langle x-u|z-u\rangle\big)\leqslant 0.$$

2. a) Soient $u,z\in C$; écrivons $u=\sum_{i=1}^n s_ie_i$ et $z=\sum_{i=1}^n t_ie_i$, avec $s_i,t_i\in\mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{i=1}^n s_i=\sum_{i=1}^n t_i=1$. Remarquons que, pour tout i, on a $\langle x-y|e_i\rangle=\dfrac{1-a}{n}$; il vient
$$\langle x-y|u-z\rangle=\frac{1-a}{n}\sum_{i=1}^n(s_i-t_i)=0.$$
Il vient $\langle x-u|u-z\rangle=\langle y-u|u-z\rangle$. Par la caractérisation donnée en 1, on a
$$u=p_C(x)\iff u=p_C(y).$$

b) Pour $t\in\mathbb{R}_+$, posons $\varphi(t)=\sum_{j=1}^n\sup\{b_j-t,0\}$. Notons b le plus grand parmi les b_j. On a $\varphi(0)\geqslant\sum_{j=1}^n b_j=1$, $\varphi(b)=0$ et φ est continue (affine par morceaux - elle est affine entre deux valeurs consécutives des b_j), décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et strictement décroissante sur $]-\infty,b]$. Elle prend donc la valeur 1 en un seul point $c\in[0,b]$.

c) Posons $u=\sum_{j=1}^n\sup\{b_j-c,0\}e_j$. Par définition de c on a $u\in C$. On a $y-u=\sum_{j=1}^n\inf\{b_j,c\}e_j$. Il vient
$$\langle y-u|u\rangle=\sum_{j=1}^n\sup\{b_j-c,0\}\inf\{b_j,c\}.$$
Or, si $\sup\{b_j-c,0\}\neq 0$, alors $\inf\{b_j,c\}=c$; donc
$$\langle y-u|u\rangle=\sum_{j=1}^n\sup\{b_j-c,0\}c=c.$$

Soit $z=\sum_{i=1}^n t_ie_i$ un élément de C (avec $t_i\in\mathbb{R}_+$ de somme 1), on a
$$\langle y-u|z\rangle=\sum_{i=1}^n t_i\inf\{b_j,c\}\leqslant c\sum_{i=1}^n t_i=c,$$
donc $\langle y-u|u-z\rangle\geqslant 0$.

Exercice 4.10. Notons F_n le sous-espace engendré par $(e_k)_{k<n}$. On a $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, d'où l'on déduit $d(x, F) = \inf\{d(x, F_n);\ n \in \mathbb{N}\}$.

Or le projeté de x sur F_n est $y_n = \sum_{k=0}^{n-1} \langle e_i|x\rangle e_i$ donc $d(x, F_n)^2 = \|x - y_n\|^2 = \|x\|^2 - \|y_n\|^2$ puisque $x - y_n$ est orthogonal à F_n donc à y_n.

Exercice 4.11.

1. La fonction f est périodique de période 2π et continue par morceaux. L'identité de Parseval donne $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)|^2$, d'où le résultat puisque $|f(t)| = e^{bt}$.
2. On a $\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(a-ik)t}\,dt$ donc $\widehat{f}(k) = 1$ si $a = ik$ et $\widehat{f}(k) = \frac{e^{2\pi(a-ik)} - 1}{2\pi(c - ik)} = \frac{e^{2\pi a} - 1}{2\pi(a - ik)}$ sinon.
3. Pour a réel non nul, il vient
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(e^{2\pi a} - 1)^2}{4\pi^2(a^2 + n^2)} = \frac{e^{4\pi a} - 1}{4\pi a}\cdot$$
Écrivant $e^{4\pi a} - 1 = (e^{2\pi a} - 1)(e^{2\pi a} + 1)$ et simplifiant on trouve le résultat escompté.
4. Posant $a = ic$, il vient $\widehat{f}(n) = \frac{e^{i\pi c}\sin \pi c}{\pi(a - n)}$, donc $1 = \frac{\sin^2 \pi c}{\pi^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(c - n)^2}\cdot$

Exercice 4.12.

1. Remarquons d'abord que la relation $P'_{k+1} = P_k$ et $\int_0^{2\pi} P_{k+1}(t)\,dt = 0$ déterminent entièrement P_{k+1}.
Si P_k vérifie $P_k(2\pi - t) = (-1)^k P_k(t)$, alors le polynôme Q défini par $Q(t) = (-1)^{k+1}P_{k+1}(t)$ vérifie $Q' = P_k$ et $\int_0^{2\pi} Q(t)\,dt = 0$, donc $Q = P_{k+1}$.
2. Par intégration par parties on trouve $\int_0^{2\pi} P_k(t)e^{-int}\,dt = \Big[P_k(t)\frac{e^{-int}}{-in}\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} P'_k(t)\frac{e^{-int}}{-in}\,dt$. Il vient $(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} P_1(t)e^{-int}\,dt = (in)^{-1}$, puis, par récurrence, $(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} P_k(t)e^{-int}\,dt = (in)^{-k}$.
3. D'après 1., il vient $(-1)^{2k+1}P_{2k+1}(\pi) = P_{2k+1}(\pi)$, donc $P_{2k+1}(\pi) = 0$.
D'après l'identité de Parseval, on a $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_k(t)^2\,dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{P_k}(n)|^2$. Or $\widehat{P_k}(0) = 0$ et $|\widehat{P_k}(n)|^2 = n^{-2k}$ pour $n \neq 0$.
D'après le théorème de Dirichlet $P_{2k}(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{P_{2k}}(n) = \sum_{n\neq 0}(in)^{-2k} = (-1)^k.2\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2k}$.
On a $P_2(t) = -\frac{(t-\pi)^2}{2} + c$; or $\int_0^{2\pi}(-\frac{(t-\pi)^2}{2} + c)dt = 2\pi c - \Big[\frac{(t-\pi)^3}{6}\Big]_0^{2\pi} = 2\pi c - \frac{\pi^3}{3}\cdot$ Il vient $P_2(t) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{(t-\pi)^2}{2}\cdot$

4. On en déduit $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2} = -\frac{P_2(0)}{2} = \frac{\pi^2}{6}$ et

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-4} &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} P_2(t)^2\,dt = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\frac{\pi^4}{36} - \frac{\pi^2(t-\pi)^2}{6} + \frac{(t-\pi)^4}{4}\Big)dt \\ &= \frac{\pi^4}{72} - \Big[\frac{\pi}{4}\frac{(t-\pi)^3}{18}\Big]_0^{2\pi} + \Big[\frac{1}{4\pi}\frac{(t-\pi)^5}{20}\Big]_0^{2\pi} \\ &= \frac{\pi^4}{72} - \frac{\pi^4}{36} + \frac{\pi^4}{40} = \frac{\pi^4}{90}.\end{aligned}$$

Exercice 4.13. On a $h_{n+1} = (X-\alpha_n)h_n - \beta_n h_{n-1}$ et $\langle h_{n+1}|h_{n-1}\rangle = \langle h_{n+1}|h_n\rangle = 0$, d'où l'on déduit $\langle Xh_n - \beta_n h_{n-1}|h_{n-1}\rangle = 0$. De plus $\langle Xh_n|h_{n-1}\rangle = \displaystyle\int_a^b t h_n(t)h_{n-1}(t)dt = \langle h_n|Xh_{n-1}\rangle$. Enfin $h_n - Xh_{n-1}$ est de degré $< n$ donc est orthogonal à h_n soit $\|h_n\|^2 = \langle h_n|Xh_{n-1}\rangle$.

Exercice 4.14. D'après le changement de variable $t \mapsto -t$, on en déduit que le polynôme $h_n(-X)$ est orthogonal aux polynômes de degré $< n$, donc est proportionnel à h_n. On en déduit que $h_n(-X) = (-1)^n h_n$. La deuxième assertion s'en déduit immédiatement !

Exercice 4.15. On démontre par récurrence sur n que la dérivée n-ième de $t \mapsto (1-t^2)^{a+n}$ est de la forme $(1-t^2)^a Q_n$ où Q_n est un polynôme de degré n. D'après le lemme p. 28, on a donc

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^a Q_n(t)\, t^k dt = 0$$

pour tout $k < n$.

Exercice 4.16. La base $(h_0, \dots, h_{n-1})$ est orthogonale ; la matrice du produit scalaire dans cette base est donc diagonale $D = \operatorname{diag}(\|h_0\|^2, \dots, \|h_{n-1}\|^2)$. On a $\langle X^j|X^k\rangle = \displaystyle\int_I t^{j+k}\varphi(t)\,dt = a_{j+k}$, donc la matrice du produit scalaire dans la base $(1, X, \dots, X^{n-1})$ est

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & \dots & a_{2n-2} \end{pmatrix}.$$

Comme les polynômes h_k sont unitaires de degré k, la matrice de passage P de la base $(1, X, \dots, X^{n-1})$ à la base $(h_0, \dots, h_{n-1})$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. Donc son déterminant vaut 1. On a $D = {}^tPAP$, donc $\det A = \det D$.

Exercice 4.17.

1. Par la diagonalisation de T_n (26), ce polynôme caractéristique est $(-1)^n h_n$.
2. On a $T_n X^k = X^{k+1}$ pour $k < n-1$ et $T_n X^{n-1} = X^n - h_n$ (puisque le projeté orthogonal de h_n dans E_n est nulle). En d'autres termes, la matrice de T_n dans la base $(1, X, \dots, X^{n-1})$ est la matrice compagnon du polynôme h_n. On a $Xh_k = h_{k+1} + \alpha_k h_k + \beta_k h_{k-1}$, donc la matrice de T_n dans la base $(h_0, \dots, h_{n-1})$ est

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_1 & \beta_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{n-2} & \beta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}.$$

3. est maintenant clair !!

Exercice 4.18.

10.5 Séries

Exercice 5.1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$ on ait $(1-\varepsilon)u_n \leqslant v_n \leqslant (1+\varepsilon)u_n$.

1. On suppose que les séries sont convergentes ; notons $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $R'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ les restes des séries. Pour $n \geqslant n_0$, on a $(1-\varepsilon)R_n \leqslant R'_n \leqslant (1+\varepsilon)R_n$.
2. On suppose que les séries sont divergentes. Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S'_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ les sommes partielles des séries. Pour $n \geqslant n_0$, on a
$$S'_n - (1-2\varepsilon)S_n = S'_{n_0} - (1-\varepsilon)S_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} v_k - (1-\varepsilon)u_k + \varepsilon S_n \geqslant S'_{n_0} - (1-\varepsilon)S_{n_0} + \varepsilon S_n$$
qui tend vers $+\infty$. De même $(1+2\varepsilon)S_n - S'_n \to +\infty$. On en déduit qu'il existe n_1 tel que, pour $n \geqslant n_1$ on ait $(1-2\varepsilon)S_n \leqslant S'_n \leqslant (1+2\varepsilon)S_n$.
3. Soit u_n une suite convergente de nombres réels. Quitte à lui ajouter une suite constante, on peut supposer que $u_n > 0$ pour tout n et que sa limite ℓ est aussi strictement positive. Posons $v_n = \ell$. Par la question 2, $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim (n+1)\ell$, soit $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \to \ell$.

Exercice 5.2. Puisque f est décroissante, on a $f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)dt \leqslant f(n)$, soit $0 \leqslant f(n) - \int_n^{n+1} f(t)dt \leqslant f(n) - f(n+1)$. Or, puisque $f(n) \to 0$, on a $\sum_{k=0}^{+\infty} f(n) - f(n+1) = f(0)$.

Exercice 5.3.

1. Posons $f(t) = \frac{1}{1+t}$. D'après l'exercice précédent, la suite $\sum_{k=0}^{n-1} f(k) - \int_0^{n-1} f(t)\,dt$ a une limite.
2. Posons $u_k = \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t} - \frac{1}{k}$. On cherche un équivalent de $1 - \sum_{k=2}^{n} u_k - \gamma$. Or $\gamma = 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} u_k$. On cherche donc un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Or
$$\ln\frac{k}{k-1} = -\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + o(k^{-2})$$
donc $u_k \sim \frac{1}{2k^2} \sim \frac{1}{2k(k-1)}$.

   On en déduit (à l'aide de l'exercice 4) que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k(k-1)} = \frac{1}{2n}$.

3. On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{2}\Big(\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)$. Donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1} &= \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\\ &= \Big(\ln(2n+1)+\gamma+\frac{1}{4n+2}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)-\frac{1}{2}\Big(\ln n+\gamma+\frac{1}{2n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)\\ &= \ln(2n)+\ln\Big(1+\frac{1}{2n}\Big)-\frac{1}{2}\ln n+\frac{\gamma}{2}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\\ &= \ln 2+\frac{1}{2}\ln n+\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{2n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big).\end{aligned}$$

4. Il vient $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{k+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=\ln 2+\frac{1}{4n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)$.

   En particulier $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}=\ln 2$.

5. On a $v_{3k}+v_{3k+1}+v_{3k+2}=\dfrac{1}{2k+1}-\dfrac{1}{4k+2}-\dfrac{1}{4k+4}=\dfrac{1}{4k+2}-\dfrac{1}{4k+4}=\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{2k+1}-\dfrac{1}{2k}\Big)$. Il vient $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}v_k=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}=\frac{\ln 2}{2}\cdot$

6. Notons (w_k) la suite ainsi obtenue. Dans les $n(p+q)$ premiers termes de cette suite, on aura np termes positifs et nq termes négatifs. Autrement dit, on a

$$\sum_{k=0}^{n(p+q)-1}w_k=\sum_{k=0}^{np-1}\frac{1}{2k+1}-\sum_{k=1}^{nq}\frac{1}{2k}=\Big(\ln 2+\frac{1}{2}\ln pn+\frac{\gamma}{2}+o(1)\Big)-\Big(\frac{1}{2}\ln qn+\frac{\gamma}{2}+o(1)\Big).$$

   Il vient $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}w_k=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}\cdot$

7. Soit $y\in\,]0,1[$. Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $p(n)=E(ny)$ et $q(n)=n-p(n)$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, comme $ny<(n+1)y<ny+1$, il vient $p(n)\leqslant p(n+1)\leqslant p(n)+1$. Ainsi les suites $p(n)$ et $q(n)$ sont croissantes et comme $q(n)\geqslant n(1-y)$, elles tendent vers l'infini.

   Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $\sigma(n)=2p(n)$ si $p(n+1)=p(n)+1$ et $\sigma(n)=2q(n)+1$ sinon, de sorte que la suite $(\sigma(k))_{0\leqslant k<n}$ comporte les $p(n)$ plus petits nombres pairs et les $q(n)$ plus petits nombres impairs.

   Il vient

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{\sigma(k)}}{\sigma(k)+1} &= \sum_{k=0}^{p(n)-1}\frac{1}{2k+1}-\sum_{k=1}^{q(n)}\frac{1}{2k}\\ &= \Big(\ln 2+\frac{1}{2}\ln p(n)+\frac{\gamma}{2}+o(1)\Big)-\Big(\frac{1}{2}\ln q(n)+\frac{\gamma}{2}+o(1)\Big)\\ &= \ln(2)+\frac{1}{2}\ln\frac{p(n)}{q(n)}+o(1).\end{aligned}$$

   Or $p(n)/q(n)$ tend vers $y/(1-y)$. Il vient $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{\sigma(k)}}{\sigma(k)+1}=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{y}{1-y}\cdot$

   Or, pour $x\in\mathbb{R}$, il existe un et un seul $y\in\,]0,1[$ tel que $x=\ln 2+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{y}{1-y}$ (on trouve $y=\dfrac{1}{1+4e^{-2x}}$).

Exercice 5.4. Posons $I = \{k \in \mathbb{N};\ u_i \geqslant 0\}$ et $J = \mathbb{N} \setminus I = \{k \in \mathbb{N};\ u_i < 0\}$.

Comme la série u_n n'est pas absolument convergente, on a $\displaystyle\sum_{k \in I} u_k = +\infty$ et $\displaystyle\sum_{k \in J} u_k = -\infty$.

On construit $\sigma(n)$ par récurrence ; on procède de la manière suivante : si $x \geqslant 0$, on pose $\sigma(0) = \inf I$; sinon, $\sigma(0) = \inf J$.

Supposons $\sigma(k)$ construit pour $0 \leqslant k < n$. Si $x - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_{\sigma(k)} \geqslant 0$, on pose $\sigma(n) = \inf I \setminus \{\sigma(k);\ k < n\}$; sinon on pose $\sigma(n) = \inf J \setminus \{\sigma(k);\ k < n\}$.

Puisque $\displaystyle\sum_{k \in I} u_k = +\infty$ et $\displaystyle\sum_{k \in J} u_k = -\infty$, la quantité $R_n = x - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_{\sigma(k)}$ prend une infinité de fois des valeurs $\geqslant 0$ et des valeurs < 0. Sa valeur absolue est majorée par le dernier changement de signe : si $R_n \geqslant 0$, on a $R_n \leqslant u_{\sigma(k)}$ où $k = \sup(I \cap [0, n[)$; si $R_n < 0$, on a $|R_n| \leqslant |u_{\sigma(k)}|$ où $k = \sup(J \cap [0, n[)$; comme u_n tend vers 0, on en déduit que R_n tend vers 0, soit $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_{\sigma(k)} = x$.

Exercice 5.5.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $N = \sup\{\sigma(k);\ 0 \leqslant k \leqslant n\}$. On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} \leqslant \sum_{k=0}^{N} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. On en déduit que la série de terme général $(u_{\sigma(k)})$ converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_{\sigma(k)} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

   Appliquant cela à la suite (v_n) définie par $v_n = u_{\sigma(n)}$ et à la permutation σ^{-1}, il vient $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} v_{\sigma^{-1}(k)} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ d'où l'égalité.
2. On peut écrire $u_n = v_n - w_n$ où (v_n) et (w_n) sont des séries convergentes à termes positifs (par exemple $v_n = \max(u_n, 0)$ et $w_n = \max(-u_n, 0)$; on peut aussi prendre $v_n = |u_n|$). Les séries $(v_{\sigma(n)})$ et $(w_{\sigma(n)})$ sont convergentes, donc il en va de même pour leur différence, et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_{\sigma(n)} - \sum_{n=0}^{+\infty} w_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n - \sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

10.6 Suites et séries de fonctions

Exercice 6.1.

1. Fixons $x, y \in [a, b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant k|x - y|$. Passant à la limite quand $n \to \infty$, on en déduit que f est lipschitzienne.

   Soit $\varepsilon > 0$. Fixons $p \in \mathbb{N}$ tel que $p\varepsilon \geqslant 2k(b - a)$. Pour $j = (0, \dots p)$, posons $x_j = a + \dfrac{j}{p}(b - a)$. Il existe n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$ et tout $j \in \{0, \dots, p\}$, on ait $|f(x_j) - f_n(x_j)| < \varepsilon/2$. Soient alors $n \geqslant n_0$ et $x \in [a, b]$; il existe $j \in \{0, \dots, p\}$ tel que $|x - x_j| \leqslant \dfrac{b - a}{2p}\cdot$ Comme f et f_n sont k-lipschitziennes, $f - f_n$ est $2k$-lipschitzienne ; il vient $|(f - f_n)(x) - (f - f_n)(x_j)| \leqslant 2k|x - x_j| \leqslant \dfrac{k(b - a)}{p} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, donc $|f(x) - f_n(x)| \leqslant |(f - f_n)(x) - (f - f_n)(x_j)| + |f(x_j) - f_n(x_j)| \leqslant \varepsilon$.

2. Fixons $x, y \in]a, b[$ et $\lambda \in [0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda f_n(x) + (1 - \lambda)f_n(y)$. Passant à la limite quand $n \to \infty$, on en déduit que f est convexe.

   Soient $c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a < c < d < b$; choisissons $c', d' \in \mathbb{R}$ tels que $a < c' < c$ et $d < d' < b$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous $x, y \in [c, d]$ avec $x < y$, puisque f_n est convexe, il vient

   $$\frac{f_n(c) - f_n(c')}{c - c'} \leqslant \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x} \leqslant \frac{f_n(d') - f_n(d)}{d' - d}\cdot \tag{1}$$

   Les suites $\left(\dfrac{f_n(c) - f_n(c')}{c - c'}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{f_n(d') - f_n(d)}{d' - d}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes donc bornées. Il existe donc $k \in \mathbb{R}_+$ tel que l'on ait, pour tout $n \in \mathbb{N}$

   $$-k \leqslant \frac{f_n(c) - f_n(c')}{c - c'} \leqslant \frac{f_n(d') - f_n(d)}{d' - d} \leqslant k\cdot$$

   D'après les inégalités (1), on en déduit que les restrictions de toutes les f_n à $[c, d]$ sont k-lipschitziennes, donc la convergence est uniforme sur $[c, d]$ d'après la question précédente.

   Considérons la suite (f_n) de fonctions de $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$ données par $f_n(x) = x^n$; elles sont toutes convexes et la suite f_n converge simplement vers 0 ; la convergence n'est pas uniforme puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sup\{f_n(t);\ t \in]0, 1[\} = 1$.

Exercice 6.2. Remarquons que, pour tout $x \in X$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) - f_n(x) \geqslant 0$ et la suite $(f(x) - f_n(x))$ est décroissante, donc la suite $n \mapsto \|f - f_n\|_\infty$ est décroissante ; on veut démontrer que sa limite est nulle.

On suppose le contraire. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f - f_n\|_\infty > \varepsilon$; il existe donc $x_n \in X$ tel que $f(x_n) - f(x_n) > \varepsilon$. Par compacité, la suite x_n admet un point d'accumulation x. Comme $f_n(x) \to f(x)$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant f(x) - f_k(x) < \varepsilon/2$. Comme $f - f_k$ est continue, il existe un voisinage V de x tel que $f(y) - f_k(y) < \varepsilon$ pour $y \in V$. Comme x est un point d'accumulation de la suite x_n, il existe $n \geqslant k$ tel que $x_n \in V$. On a alors $\varepsilon < f(x_n) - f_n(x_n) \leqslant f(x_n) - f_k(x_n) < \varepsilon$, ce qui est absurde.

Exercice 6.3. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p\varepsilon > 2(f(1) - f(0))$. Puisque f est continue, il existe t_j pour $1 \leqslant j \leqslant p - 1$ tel que $f(t_j) = f(0) + \dfrac{j}{p}(f(1) - f(0))$ (théorème des valeurs intermédiaires). Posons aussi $t_0 = 0$ et $t_p = 1$.

Remarquons que pour tout $j \in \{0, \dots, p - 1\}$, on a $f(t_{j+1}) = f(t_j) + \dfrac{f(1) - f(0)}{p} < \varepsilon/2$.

Pour $0 \leqslant j \leqslant p$, puisque $f_n(t_j) \to f(t_j)$, il existe n_j tel que pour $n \geqslant n_j$ on ait $|f_n(t_j) - f(t_j)| < \varepsilon/2$. Posons $N = \max(n_j)$.

Soient $n \geqslant N$ et $t \in [0,1]$; il existe j tel que $t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}$.

Remarquons que $f(t_{j+1}) - \varepsilon/2 < f(t_j) \leqslant f(t) \leqslant f(t_{j+1}) < f(t_j) + \varepsilon/2$

On a donc $f(t) - \varepsilon < f(t_j) - \varepsilon/2 < f_n(t_j) \leqslant f_n(t) \leqslant f_n(t_{j+1}) < f(t_{j+1}) + \varepsilon/2 < f(t) + \varepsilon$.

Il vient $\|f - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Exercice 6.4.

1. a) Si $f(x) = 1$, il vient $(B_n(f))(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1$.

   b) Si $f(x) = x$, il vient

$$\begin{aligned} (B_n(f))(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j} = x \end{aligned}$$

   c) Si $f(x) = x(1-x)$, il vient

$$\begin{aligned} (B_n(f))(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k(n-k)}{n^2}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{n-1}{n} x(1-x) \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} x^j (1-x)^{n-2-j} = \frac{n-1}{n} x(1-x). \end{aligned}$$

2. Comme $ax^2 + bx + c = -ax(1-x) + (a+b)x + c$, on a $B_n(f)(x) = -a\dfrac{n-1}{n}x(1-x) + (a+b)x + c$.
   On a donc $(B_n(f) - f)(x) = \dfrac{ax(1-x)}{n}\cdot$
3. Par le théorème de Heine il existe α tel que, si $|x - y| < \alpha$, alors $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. Il suffit de poser $K = 2\|f\|_\infty \alpha^{-2}$.
4. D'après la question 3, on a $g_y \leqslant f \leqslant h_y$. Or B_n est linéaire et si φ est une fonction positive, il en va de même pour $B_n(\varphi)$. On a donc $B_n(g_y) \leqslant B_n(f) \leqslant B_n(h_y)$.
   D'après la question 2, on a $(B_n(g_y) - g_y)(z) = -\dfrac{K}{n}z(1-z)$ et $(B_n(h_y) - h_y)(z) = \dfrac{K}{n}z(1-z)$. Il vient $B_n(g_y)(y) = f(y) - \varepsilon - \dfrac{K}{n}y(1-y)$ et $B_n(h_y)(y) = f(y) + \varepsilon + \dfrac{K}{n}y(1-y)$.
   On a donc $f(y) - \varepsilon - \dfrac{K}{n}y(1-y) \leqslant B_n(f)(y) \leqslant f(y) + \varepsilon + \dfrac{K}{n}y(1-y)$.
5. Comme pour tout $y \in [0,1]$, on a $y(1-y) \leqslant 1/4$, d'après les questions précédentes, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe K tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on ait $\|f - B_n(f)\|_\infty \leqslant \varepsilon + \dfrac{K}{4n}$; pour n assez grand, on a donc $\|f - B_n(f)\|_\infty \leqslant 2\varepsilon$.

Exercice 6.5.

1. Supposons que f est périodique de période T. D'après le théorème de Heine, la restriction de f à l'intervalle $[0, T+1]$ est uniformément continue. Soit alors $\varepsilon > 0$; il existe $\alpha > 0$ que l'on peut supposer $\leqslant 1$ tel que, pour tout $s, t \in [0, T+1]$ satisfaisant $|s - t| < \alpha$, on ait $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$. Soient alors $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - y| < \alpha$. Quitte à échanger leur rôle, on peut supposer que $x \leqslant y$. Notons alors n la partie entière de x/T et posons $s = x - nT$ et $t = y - nT$. On a alors $0 \leqslant s < T$, et $s \leqslant t < s + \alpha \leqslant T + 1$. Il vient donc $|f(x) - f(y)| = |f(s) - f(t)| < \varepsilon$.

2. La question 2 demande juste de ne pas se tromper dans les calculs...
3. Utiliser l'égalité $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt\, dt = 0$ pour $k \neq 0$.
4. Puisque $F_n(t)$ et $1 - \cos t$ sont positifs, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_n}^{2\pi-\alpha_n} F_n(t)(1-\cos t)\, dt \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_n(t)(1-\cos t)\, dt = \frac{1}{2n+1};$$

or sur l'intervalle $[\alpha_n, 2\pi - \alpha_n]$, on a $1 - \cos t \geqslant (2n+1)^{-1/2}$.

5. On a $\cos k(t-s) = \cos kt \cos ks + \sin kt \sin ks$, donc $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos k(t-s) f(s) ds = a_k \cos kt + b_k \sin kt$, où $a_k = \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos ks\, f(s)\, ds$ et $b_k = \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin ks\, f(s)\, ds$. Par linéarité, f_n est un polynôme trigonométrique.
6. Par un changement de variable, on a $f_n(t) = \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} F_n(t-s) f(s)\, ds$ (pour un $a \in \mathbb{R}$ quelconque - par périodicité), donc

$$f(t) - f_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha_n}^{2\pi-\alpha_n} F_n(t-s)(f(t) - f(s))\, ds.$$

Or $\displaystyle\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha_n}^{\alpha_n} F_n(t-s)(f(t)-f(s))\, ds\right| \leqslant \varepsilon \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha_n}^{\alpha_n} F_n(t-s)\, ds \leqslant \varepsilon$ et

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_n}^{2\pi-\alpha_n} F_n(t-s)(f(t)-f(s))\, ds\right| \leqslant 2\|f\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_n}^{2\pi-\alpha_n} F_n(t-s)\, ds \leqslant 2\|f\|_\infty (2n+1)^{-1/2}.$$

7. Puisque f est uniformément continue, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe α tel que pour tout $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $|s - t| \leqslant \alpha$, on a $|f(t) - f(s)| \leqslant \varepsilon$. Remarquons que, par continuité de la fonction arccos la suite $\alpha_n = \arccos(1 - (2n+1)^{-1/2})$ converge vers $\arccos 1 = 0$.
Pour n assez grand, on aura donc $\alpha_n \leqslant \alpha$ et $2\|f\|_\infty (2n+1)^{-1/2} \leqslant \varepsilon$, donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f(t) - f_n(t)| \leqslant 2\varepsilon$, soit encore $\|f - f_n\|_\infty \leqslant 2\varepsilon$.

Exercice 6.6.

1. L'application $\mathbb{C}[X] \to C(D;\mathbb{C})$ qui à un polynôme $P = \sum a_k X^k$ associe $P(z^1) = \sum a_k z^k$ est un morphisme d'algèbres. Son image est une sous algèbre.
2. Pour $f \in C(D;\mathbb{C})$, on a $\displaystyle\left|(1/2\pi)\int_0^{2\pi} f\big(e^{it}\big)\, dt\right| \leqslant (1/2\pi)\int_0^{2\pi} \big|f\big(e^{it}\big)\big|\, dt \leqslant \|f\|_\infty$, donc φ est continue de norme $\leqslant 1$.
3. est clair !
4. Considérons $\psi : f \mapsto f(0)$; c'est une forme linéaire continue sur $C(D;\mathbb{C})$. On a $A \subset \ker(\varphi - \psi)$ qui est un sous-espace fermé, donc $\overline{A} \subset \ker(\varphi - \psi)$. Notons g l'application $\lambda \mapsto |\lambda|^2$. On a $\varphi(g) = 1$ et $\psi(g) = 0$. Cela prouve que $g \notin \overline{A}$, donc $\overline{A} \neq C(D;\mathbb{C})$.

Exercice 6.7.

1. a) Si f est en escalier, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = b$ tels que f soit constante égale à c_j sur l'intervalle $]a_j, a_{j+1}[$. Alors f est continue en tout point distinct des a_j et admet la limite à droite c_j en a_j (pour $j = 0, \ldots m-1$) et la limite à gauche c_{j-1} en a_j (pour $j = 1, \ldots m$).

b) Si f_n converge uniformément vers f et, pour tout n, f_n admet une limite à droite b_n en un point $c \in [a, b[$, alors $|b_n - b_m|$ qui est la limite à droite en c de $|f_n - f_m|$ est majoré par $\|f_n - f_m\|_\infty$. On en déduit que la suite b_n est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc convergente. Notons ℓ sa limite.

Soit alors $\varepsilon > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon/3$ et $|\ell - b_n| \leqslant \varepsilon/3$. Par définition de la limite à droite, il existe $\alpha > 0$, $\alpha \leqslant b - c$, tel que, pour $x \in]c, c + \alpha[$ on ait $|f_n(x) - b_n| \leqslant \varepsilon/3$. Alors, pour $x \in]c, c + \alpha[$, on a $|f(x) - \ell| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - b_n| + |b_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Donc f admet en c la limite ℓ.

La même démonstration vaut pour les limites à gauche ; donc (b) résulte de (a).

2. Si f est continue, elle est uniformément continue, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe α_n tel que $|x - y| \leqslant \alpha_n \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant 1/n$. Soit alors $k_n \in \mathbb{N}$ tel que $k_n\alpha_n \geqslant b - a$. Notons f_n la fonction en escalier qui est constante sur chaque intervalle $\Big[a + \dfrac{j(b-a)}{k_n}, a + \dfrac{(j+1)(b-a)}{k_n}\Big[$ (pour $j \in \{0, \ldots, k_n - 1\}$) et coïncide avec f en $a + \dfrac{j(b-a)}{k_n}$ (pour $j \in \{0, \ldots, k_n\}$). On a $\|f - f_n\|_\infty \leqslant 1/n$, donc la suite f_n converge uniformément vers f.

3. Si f est monotone, pour tout intervalle J, l'ensemble $f^{-1}(J)$ est un intervalle. Comme f est comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ elle est bornée. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les ensembles $f^{-1}([j/n, (j+1)/n[)$ (pour $j \in \mathbb{Z}$) forment une partition de $[a, b]$ en intervalles, et comme f est bornée, seuls un nombre fini d'entre eux sont non vides. La fonction f_n qui vaut j/n sur $f^{-1}([j/n, (j+1)/n[)$ est en escalier, et on a $\|f - f_n\|_\infty \leqslant 1/n$, donc la suite f_n converge uniformément vers f.

4. a) résulte immédiatement des définitions des limites à gauche et à droite.

b) Supposons le contraire. Pour tout n, il existe un intervalle I_n de longueur $(b-a)/n$ tel que la restriction de f à I_n ne soit pas approchable par une fonction en escalier à ε près. Soit x_n le milieu de I_n. Par compacité de $[a, b]$ il existe une application strictement croissante φ telle que $(x_{\varphi(n)})$ converge vers un point $x \in [a, b]$. Comme J_x est ouvert dans $[a, b]$, il existe $\alpha > 0$ tel que $[x - \alpha, x + \alpha] \cap [a, b] \subset J_x$. Pour n assez grand, on a $1/\varphi(n) \leqslant \alpha/2$ et $|x - x_{\varphi(n)}| \leqslant \alpha/2$, de sorte que $I_n \subset J_x$. Or sur J_x, la fonction θ définie par $\theta(y) = h(x)$ pour $y < x$, $\theta(x) = f(x)$ et $\theta(y) = g(x)$ pour $y > x$ est en escalier et, pour tout $y \in J_x$ on a $|\theta(y) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. On arrive ainsi à une contradiction.

c) Soit n donné par (b). Pour $j = \{0, \ldots, n-1\}$, il existe une fonction en escalier θ_j sur $[a + j(b-a)/n, a + (j+1)(b-a)/n]$ telle que l'on ait $|f(t) - \theta_j(t)| \leqslant \varepsilon$ sur cet intervalle. La fonction θ qui coïncide avec θ_j sur $[a + j(b-a)/n, a + (j+1)(b-a)/n[$ et telle que $f(b) = \theta(b)$ est en escalier et on a $\|f - \theta\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Cela étant vrai pour tout ε, la fonction f est réglée.

Exercice 6.8.

1. Soit $a > 1$. Si $\mathrm{Re}(s) \geqslant a$, on a $|n^{-s}| = n^{-\mathrm{Re}(s)} \leqslant n^{-a}$ donc la série de terme général n^{-s} converge absolument

2. On a en fait vu dans 1 que la suite de fonctions continues $s \mapsto n^{-s}$ converge normalement sur $V_a = \{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s) > a\}$. Sa somme est donc continue sur $\mathring{V}_a$, et puisque $\bigcup_{a>1} \mathring{V}_a = \{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s) > 1\}$, la fonction ζ est continue sur $\{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s) > 1\}$.

3. On a $1^s = 1$ et, pour $n \geqslant 2$, on a $\lim\limits_{\mathrm{Re}(s)\to\infty} n^{-s} = 0$, donc, par le théorème d'interversion de limites (la convergence étant normale), il vient

$$\lim_{\mathrm{Re}(s)\to\infty} \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\mathrm{Re}(s)\to\infty} n^{-s} = 1.$$

4. Posons $u_n(s) = n^{-s}$. La fonction u_n est de classe C^∞ (sur $\mathbb{R}$) et on a $u_n^{(k)}(s) = (-\ln n)^k u_n(s)$. Soit $a \in]1, +\infty[$. Pour $s \in [a, +\infty[$, on a $|u_n^{(k)}(s)| \leqslant (\ln n)^k n^{-a}$ qui est une série convergente. Donc la série de fonctions de terme général $(u_n^{(k)})$ est normalement convergente sur $[a, +\infty[$; d'après le théorème de dérivation, on en déduit par récurrence sur k que la ζ est de classe C^k sur $]a, +\infty[$. Comme cela est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $a \in]1, +\infty[$, la fonction ζ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.

   Posons aussi $v_n(s,t) = n^{-s+it}$ pour $(s,t) \in \mathbb{R}^2$. La fonction v_n est de classe C^∞ et l'on a $\dfrac{\partial^{k+\ell}}{\partial s^k \partial^t} v_n = (-\ln n)^k (-i \ln n)^\ell v_n$. La série de fonctions $\dfrac{\partial^{k+\ell}}{\partial s^k \partial^t} v_n$ est normalement convergente sur $[a, +\infty[\times \mathbb{R}$ pour tout $a > 1$, on en déduit que la fonction ζ est de classe C^∞ sur $\{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s) > 1\}$.

5. Pour $s \in \mathbb{R}$, posons $w_n(s) = n^{-s} - \displaystyle\int_n^{n+1} t^{-s}\, dt$. Pour $s \geqslant 0$ et $t \in [n, n+1]$, on a $(n+1)^{-s} \leqslant t^{-s} \leqslant n^{-s}$, de sorte que l'on a $0 \leqslant w_n(s) \leqslant n^{-s} - (n+1)^{-s}$. On en déduit que, pour $s \geqslant 0$, la série de terme général $w_n(s)$ converge. De plus, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k(s) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k^{-s} - (k+1)^{-s} = (n+1)^{-s}$, de sorte que cette série converge uniformément sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

   Donc $s \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} w_n(s)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

   Pour $s > 1$, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} w_n(s) = \zeta(s) - \int_1^{+\infty} t^{-s}\, dt = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}\cdot$

   De plus $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} w_n(1) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} 1/k - \ln(n+1) = \gamma$.

   Par continuité à droite en 1 de $\sum w_n$ il vient donc $\zeta(s) = 1/(s-1) + \gamma + o(1)$.

Exercice 6.9. Donnons-nous une série entière $f(z) = \sum a_n z^n$ de rayon de convergence R. Pour $x, y \in \mathbb{C}$ tels que $|x| + |y| < R$, on a $f(x+y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$. Posons $b_{k,\ell} = a_{k+\ell} \displaystyle\binom{k+\ell}{k} x^k y^\ell$.

Énonçons un résultat sur les suites doubles (déjà utilisée pour le produit de Cauchy).

Lemme. *a) Soit $(\alpha_{k,\ell})_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de nombres réels positifs. On a*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\sum_{\ell=0}^{+\infty} \alpha_{k,\ell} \Big) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{k,\ell} \Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \alpha_{k,n-k} \Big)$$

avec le sens que si l'une de ses sommes est finie, il en va de même pour les autres et leurs sommes sont égales.

Si ces sommes sont finies, on dit que la série double $\sum \alpha_{k,\ell}$ converge.

b) Soit $(u_{k,\ell})_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de nombres complexes. Si la série double $\sum |u_{k,\ell}|$ converge, on a l'égalité

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\sum_{\ell=0}^{+\infty} u_{k,\ell} \Big) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,\ell} \Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} u_{k,n-k} \Big)$$

avec le sens que toutes les séries impliquées sont (absolument) convergentes et les sommes sont égales.

Pour appliquer ce lemme, on remarque que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}|b_{k,n-k}| = \sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|(|x|+|y|)^n$ qui est fini par hypothèse ; en d'autres termes la série double $\sum|b_{k,\ell}|$ converge. On a donc, d'après le lemme,

$$f(x+y)=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}b_{k,n-k}\Big)=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}b_{k,\ell}\Big)=\sum_{\ell=0}^{+\infty}g_\ell(x)y^\ell$$

où l'on a posé $\displaystyle g_\ell(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+\ell}\binom{k+\ell}{k}x^k$.

En particulier, f est développable en série entière en x et ce pour tout $x\in\mathbb{C}$ avec $|x|<R$.

Démontrons à présent le lemme :

a) Pour $m,n\in\mathbb{N}$, posons $\displaystyle A_{m,n}=\sum_{k=0}^{m}\Big(\sum_{\ell=0}^{n}\alpha_{k,\ell}\Big)$.

Pour $m\in\mathbb{N}$ posons $\displaystyle B_m=\sum_{n=0}^{m}\Big(\sum_{k=0}^{n}\alpha_{k,n-k}\Big)$ et $\displaystyle A_{m,\infty}=\sum_{k=0}^{m}\Big(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\alpha_{k,\ell}\Big)$.

On a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\alpha_{k,n-k}\Big)=\sup\{B_m;m\in\mathbb{N}\}$.

Par ailleurs $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\alpha_{k,\ell}\Big)=\sup\{A_{m,\infty};m\in\mathbb{N}\}$. Or $A_{m,\infty}=\sup\{A_{m,n};\ n\in\mathbb{N}\}$. Il vient $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\alpha_{k,\ell}\Big)=\sup\{A_{m,n};\ (m,n)\in\mathbb{N}^2\}$.

Or pour tout m on a $B_m\leqslant A_{m,m}$ et pour tout $(m,n)\in\mathbb{N}^2$, on a $A_{m,n}\leqslant B_{m+n}$.

On en déduit l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\alpha_{k,\ell}\Big)=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\alpha_{k,n-k}\Big)$.

L'égalité $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_{k,\ell}\Big)=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\alpha_{k,n-k}\Big)$ s'en déduit en posant $\beta_{k,\ell}=\alpha_{\ell,k}$.

b) Si les $u_{k,\ell}$ sont réels, on pose $\alpha_{k,\ell}=\max(u_{k,\ell},0)$ et $\beta_{k,\ell}=\max(-u_{k,\ell},0)$. Puisque $\alpha_{k,\ell}\leqslant|u_{k,\ell}|$ et $\beta_{k,\ell}\leqslant|u_{k,\ell}|$, les séries doubles $\sum\alpha_{k,\ell}$ et $\sum\beta_{k,\ell}$ convergent. Puisque $\alpha_{k,\ell}-\beta_{k,\ell}=u_{k,\ell}$, il vient

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\sum_{\ell=0}^{+\infty}u_{k,\ell}\Big) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\alpha_{k,\ell}\Big)-\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\beta_{k,\ell}\Big)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\alpha_{k,n-k}\Big)-\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\beta_{k,n-k}\Big)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}u_{k,n-k}\Big).\end{aligned}$$

Si $u_{k,\ell}\in\mathbb{C}$ on raisonne de même avec la partie réelle et la partie imaginaire.

Exercice 6.10. Pour $z\in\mathbb{C}$ avec $|z|<R$, posons $\displaystyle f(z)\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$. Soit $(a,b)\in B_R$ et posons $u=a+ib$.

Commençons par démontrer que l'on a $\displaystyle\lim_{z\to u}\frac{f(z)-f(u)}{z-u}=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nu^{n-1}$ (comme affirmé dans le cours).

En effet, soit $r \in \mathbb{R}$ tel que $|u| < r < R$; posons $g_n(u) = na_n u^{n-1}$ et $g_n(z) = a_n \dfrac{z^n - u^n}{z-u} = a_n \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^k z^{n-1-k}$ pour $z \neq u$; la fonction g_n est continue sur $\mathbb{C}$. Pour $|z| \leqslant r$, on a $|g_n(z)| \leqslant n|a_n|r^{n-1}$, donc la série de fonctions de terme général (g_n) est normalement sommable sur la boule ouverte de rayon r. Sa somme est continue en u, d'où le résultat.

Pour $(x,y) \in B_R$, posons $H(x,y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x+iy)^{n-1}$. La fonction H est continue.

On en déduit que F est de classe C^1 et que, pour $(a,b) \in B_R$, on a

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+ib+t) - f(a+ib)}{t} = H(a,b)$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) = i \lim_{t\to 0} \frac{f(a+ib+it) - f(a+ib)}{it} = iH(a,b).$$

A l'aide d'une récurrence sur n, on démontre alors que F est de classe C^n et que, pour $0 \leqslant \ell \leqslant n$ on a

$$\frac{\partial^n F}{\partial x^{n-\ell}\partial y^\ell}(x,y) = i^\ell \frac{\partial^n F}{\partial x^n}(x,y) = i^\ell \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{p!}{(p-n)!} a_p (x+iy)^{p-n}.$$

Exercice 6.11.

1. a) Pour tout k, on a $\dfrac{x^{2k}}{(2k)!}F^{(2k)}(0) \geqslant 0$, donc $R_n(x) \leqslant F(x)$. D'après la formule de Taylor avec reste intégral (à l'ordre $2n+1$) on a $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}F^{(2n+2)}(t)dt$. En particulier $R_n(x) \geqslant 0$.

   b) On a $x(y-t) - y(x-t) = t(y-x) > 0$, donc $\dfrac{x-t}{y-t} < \dfrac{x}{y}\cdot$

   c) On a $x - t < \dfrac{x}{y}(y-t)$. Il vient

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}F^{(2n+2)}(t)dt \\ &\leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{2n+1} \int_0^x \frac{(y-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}F^{(2n+2)}(t)dt \\ &\leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^{2n+1} \int_0^y \frac{(y-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}F^{(2n+2)}(t)dt = \left(\frac{x}{y}\right)^{2n+1} R_n(y) \end{aligned}$$

   On en déduit l'inégalité $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\dfrac{x}{y}\right)^{2n+1} F(y)$, donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. En d'autres termes $F(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!}F^{(2k)}(0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}F^{(2k)}(0)$. Donc F est développable en série entière sur $]-a,a[$.

2. a) L'inégalité $r_{2n+1}(x) \geqslant 0$ résulte de la formule de Taylor Lagrange ou avec reste intégral ; la deuxième égalité est immédiate.

   b) On a $F^{(2n)}(0) = 2f^{(2n)}(0)$ et la série de terme général $\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}F^{(2n)}(0)$ converge.

c) Puisque $0 \leqslant r_{2n+1}(x) \leqslant R_n(x)$, il vient $\lim r_{2n+1}(x) = 0$. De plus $r_{2n-1}(x) - r_{2n}(x) = \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(0)$ tend vers 0, donc $\lim r_{2n}(x) = 0$, et enfin $\lim r_n(x) = 0$. En d'autres termes $f(x) = \dfrac{x^k}{(k)!} f^{(k)}(0)$. Donc f est développable en série entière sur $]-a, a[$.

Exercice 6.12.

1. La dernière opération que l'on effectue est un produit des k premiers termes par un produit des $n-k$ derniers, d'où la formule.
2. On a $S(x)^2 = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} b_n x^n$ où $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} = a_n$. Donc $S(x) = a_1 x + S(x)^2$. Or $a_1 = 1$.
3. Résolvons l'équation $y^2 - y + x = 0$; les solutions sont $y = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}\cdot$ Comme on a $S(0) = 0$, on est amené à poser $T(x) = \dfrac{1 - (1-4x)^{1/2}}{2}\cdot$ Rappelons que pour $|t| < 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $(1+t)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$, où $c_0 = 1$, $c_1 = \alpha$, $\ldots c_n = \dfrac{\prod_{k=0}^{n-1} \alpha - k}{n!}\cdot$ Il vient $T(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$, où

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{1}{2}\frac{(-4)^n}{n!}\frac{1}{2} \times \Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big(-\frac{3}{2}\Big)\ldots\Big(\frac{1}{2} - n + 1\Big) \\ &= \frac{4^n}{2^{n+1}}\frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-3)}{n!} = \frac{2^{n-1}}{n!}\frac{(2n-2)!}{2 \times 4 \times \ldots (2n-2)} = \frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}. \end{aligned}$$

Remarquons alors que, puisque $T(x) = T(x)^2 + x$, on a $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k}$ pour tout $k \geqslant 2$. Enfin, puisque $a_1 = b_1 = 1$, on obtient par récurrence $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6.13.

1. Cette série s'écrit $\sum a_n z^n$ où $a_n = 0$ si n n'est pas une puissance de 2 et $a_n = 1$ si n est une puissance de 2. La suite $(a_n z^n)$ est bornée si et seulement si $|z| \leqslant 1$.
2. Soit $N \in \mathbb{N}$. Il existe $t_0 \in [0, 1[$ tel que l'on ait $t_0^{2^N} = 1/2$. Pour $t_0 < t < 1$ on a $f(t) \geqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{N} t^{2^n} \geqslant \frac{N}{2}$.
3. Pour $n \geqslant m$, on a $(ut)^{2^n} = t^{2^n}$; donc $f(t) - f(ut) = \displaystyle\sum_{n=0}^{m-1} \Big(t^{2^n} - (ut)^{2^n}\Big)$. En particulier $f(t) - f(ut)$ tend vers $m - \displaystyle\sum_{n=0}^{m-1} u^{2^n}$ quand t tend vers 1. Comme $f(t) \to +\infty$ ne converge pas quand $t \to 1$, on en déduit que $|f(ut)| \to +\infty$ quand $t \to 1$.
4. Si f admettait une limite ℓ en u, il existerait un voisinage V de u telle que $|f(z) - \ell| \leqslant 1$ pour tout $z \in V$ avec $|z| < 1$, en particulier f serait bornée sur $\{z \in V;\ |z| < 1\}$. Or tout voisinage ouvert V de u contient une racine 2^m-ième v de 1 pour m assez grand donc un ensemble $\{tv;\ t_0 < t < 1\}$ pour un $t_0 < 1$. Or on a vu en 3 que f n'est pas bornée sur un tel ensemble.

Exercice 6.14.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$.
   La suite (S_n) étant convergente, elle est bornée. La suite $(S_n x^n)$ est donc (absolument) convergente, car sa valeur absolue est majorée par une série géométrique convergente.
   On a $(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n(x^n - x^{n+1}) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} S_{n-1}x^n = S_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(S_n - S_{n-1})x^n$.
   Or $S_0 = a_0$ et, pour $n \geqslant 1$, $a_n = S_n - S_{n-1}$, donc $(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n = f(x)$.
   Enfin, $(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1$, donc $f(x) - S = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(S_n - S)x^n$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $S_n \to S$, il existe N_0, tel que pour $n > N_0$ on ait $|S_n - S| < \varepsilon$. Il vient, pour $0 < x < 1$,
   $$\left|(1-x)\sum_{n=N_0+1}^{+\infty}(S_n - S)x^n\right| \leqslant \varepsilon(1-x)\sum_{n=N_0+1}^{+\infty} x^n = \varepsilon x^{N_0+1}.$$
   Il vient $|f(x) - S| \leqslant (1-x)\left|\sum_{n=0}^{N_0}(S_n - S)x^n\right| + \varepsilon x^{N_0+1}$.
3. Pour $x \in \,]0,1[$ assez proche de 1, on a $(1-x)\left|\sum_{n=0}^{N_0}(S_n - S)x^n\right| < \varepsilon$, donc $|f(x) - S| < 2\varepsilon$. Cela prouve que $f(x) \to S$
4. Sur l'ensemble T, la fonction $\dfrac{|1-z|}{1-|z|}$ est bornée. Soit $M = \sup\{\dfrac{|1-z|}{1-|z|};\ z \in T\}$.
   Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons N_0 tel que pour $n > N_0$ on ait $M|S_n - S| < \varepsilon$ pour $z \in T$, on a
   $$\left|(1-z)\sum_{n=N_0+1}^{+\infty}(S_n - S)z^n\right| \leqslant |1-z|\frac{\varepsilon}{M}\sum_{n=N_0+1}^{+\infty}|z|^n = \frac{|1-z||z|^{N_0+1}\varepsilon}{M(1-|z|)} \leqslant \varepsilon|z|^{N_0+1}.$$
   Pour $z \in T$ assez proche de 1, on a $\left|(1-z)\sum_{n=0}^{N_0}(S_n - S)z^n\right| < \varepsilon$, donc $|f(z) - S| < 2\varepsilon$.

10.7 Fonctions d'une variable réelle

Exercice 7.1. Posons $a = \lim\limits_{-\infty} f$ et $b = \lim\limits_{+\infty} f$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $x \leqslant A \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon/2$ et $x \geqslant B \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon/2$. On peut de plus supposer que $A \leqslant B$.

En particulier (prenant par exemple $\varepsilon = 1$) la fonction f est bornée sur $]-\infty, A] \cup [B, +\infty[$; elle est aussi bornée sur le segment $[A, B]$; elle est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

La fonction continue f est uniformément continue sur le segment $[A-1, B+1]$; il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, que l'on peut supposer $\leqslant 1$ tel que pour $x, y \in [A-1, B+1]$ on ait $|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - y| < \alpha$. Alors on a

- ou bien $x \leqslant A$ et $y \leqslant A$: dans ce cas $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - a| + |f(y) - a| < \varepsilon$;
- ou bien $x \geqslant B$ et $y \geqslant B$: dans ce cas $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - b| + |f(y) - b| < \varepsilon$;
- ou bien $x, y \in [A-1, B+1]$ et $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Cela prouve que f est uniformément continue.

Exercice 7.2. Soient $x, y \in [0, 1]$ avec $x \leqslant y$. Comme $[0, x] \subset [0, y]$, on a $\sup\{f(t);\ t \in [0, x]\} \leqslant \sup\{f(t);\ t \in [0, y]\}$, donc φ est croissante.

En plus détaillé... Pour tout $t \in [0, x]$, on a $t \in [0, y]$, donc $f(t) \leqslant \varphi(y) = \sup\{f(t);\ t \in [0, y]\}$. Cela prouve que $\varphi(y)$ est un majorant de $\{f(t);\ t \in [0, x]\}$ donc $\varphi(y) \geqslant \sup\{f(t);\ t \in [0, x]\} = \varphi(x)$.

Soient $x \in [0, 1]$ et $\varepsilon > 0$. Soit $t \in [0, x]$ en lequel f atteint son maximum, *i.e.* $f(t) = \varphi(x)$. Par la continuité de f en x et en t, il existe $\alpha > 0$ tel que

- pour tout $s \in [0, 1]$ avec $|s - x| < \alpha$ on ait $f(s) \leqslant f(x) + \varepsilon \leqslant \varphi(x) + \varepsilon$;
- pour tout $s \in [0, 1]$ tel que $|s - t| < \alpha$ on ait $f(s) \geqslant f(t) - \varepsilon$.

Soit alors $y \in [0, 1]$ tel que $|x - y| < \alpha$.

⋆ Pour tout $s \in [0, y]$, on a, ou bien $s \leqslant x$, donc $f(s) \leqslant \varphi(x)$, ou bien $x < s < x + \alpha$ et $f(s) \leqslant f(x) + \varepsilon \leqslant \varphi(x) + \varepsilon$. On en déduit que $\varphi(y) \leqslant \varphi(x) + \varepsilon$.

⋆ Posons $s = \inf(y, t)$. Comme $t \leqslant x < y + \alpha$, il vient $t - \alpha < y$, donc $t - \alpha < s \leqslant t$ donc $\varphi(y) \geqslant f(s) \geqslant f(t) - \varepsilon = \varphi(x) - \varepsilon$.

Exercice 7.3. Si x est rationnel, il existe une suite d'irrationnels (y_n) tels que $y_n \to x$. Alors $f(y_n) = 0$ ne converge pas vers $f(x)$, donc f n'est pas continue en x.

Si $x \notin \mathbb{Q}$, soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $1/n < \varepsilon$. Notons p la partie entière de $n!x$. L'intervalle ouvert $\left]\dfrac{p}{n!}, \dfrac{p+1}{n!}\right[$ contient x (car x étant irrationnel on a $x \neq \dfrac{p}{n!}$) et pour y dans cet intervalle $0 \leqslant f(y) < 1/n$, donc f est continue en x.

Exercice 7.4.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ donc $f(0) = 0$. Par récurrence sur n, on a $f(nx) = nf(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus $0 = f(-x + x) = f(-x) + f(x)$, donc $f(-x) = -f(x)$. Il vient $f(nx) = nf(x)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

   Soit $r = p/q$ un nombre rationnel. Appliquant ce qui précède à $y = x/q$, il vient $f(x) = qf(y)$ et $f(py) = pf(y)$, soit $f(rx) = rf(x)$.

   Posons $f(1) = \lambda$. Pour $x \in \mathbb{Q}$, on a $f(x) = \lambda x$.

   - Si f est continue, l'application $x \mapsto f(x) - \lambda x$ est nulle sur $\mathbb{Q}$ et continue donc nulle.
   - Supposons que f est monotone. Soit $x \in \mathbb{R}$; construisons des suites (y_n) et (z_n) de nombres rationnels convergeant vers x telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $y_n \leqslant x \leqslant z_n$. Alors $f(x)$ et $xf(1)$ sont compris entre $f(y_n) = \lambda y_n$ et $f(z_n) = \lambda z_n$, donc $|f(x) - xf(1)| \leqslant |\lambda|(z_n - y_n)$. Comme cela a lieu pour tout n, il vient $f(x) = \lambda x$.

2. L'application f ainsi définie est la projection sur $\mathbb{Q}$ parallèlement à E : elle est $\mathbb{Q}$-linéaire donc satisfait l'égalité du 1.

3. Posons $g(x)=f(x)-f(0)$. On a encore $g\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big)=\dfrac{g(x)+g(y)}{2}\cdot$ En particulier, $g\Big(\dfrac{2z+0}{2}\Big)=\dfrac{g(2z)+g(0)}{2}$, soit $g(2z)=2g(z)$. Enfin, prenant $z=\dfrac{x+y}{2}$, on trouve $g(x+y)=g(x)+g(y)$. Par la question 1, g est linéaire, donc f est affine.
4. Soient $x,y\in\mathbb{R}$. Démontrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ que pour tout $p\in\mathbb{N}$ tel que $0\leqslant p\leqslant 2^n$, on a $f(p2^{-n}x+(1-p2^{-n})y)\leqslant p2^{-n}f(x)+(1-p2^{-n})f(y)$.

   C'est clair pour $n=0$ et vrai par hypothèse pour $n=1$. Supposons la propriété vraie pour n et soit $p\in\mathbb{N}$ tel que $0\leqslant p\leqslant 2^{n+1}$.
   - Si $p=2k$ est pair, $p2^{-n-1}=k2^{-n}$ et l'inégalité est vraie d'après l'hypothèse de récurrence.
   - Si $p=2k+1$ est impair, posons $u=k2^{-n}x+(1-k2^{-n})y$ et $v=(k+1)2^{-n}x+(1-(k+1)2^{-n})y$; on a $p2^{-n-1}x+(1-p2^{-n-1})y=\dfrac{u+v}{2}$, or

   $$\begin{aligned} f\Big(\frac{u+v}{2}\Big) &\leqslant \frac{f(u)+f(v)}{2}\\ &\leqslant \frac{(k2^{-n})f(x)+(1-k2^{-n})f(y)+((k+1)2^{-n})f(x)+(1-(k+1)2^{-n})f(y)}{2}\end{aligned}$$

   d'après l'hypothèse de récurrence. Cela donne bien

   $$f(p2^{-n-1}x+(1-p2^{-n-1})y)\leqslant p2^{-n-1}f(x)+(1-p2^{-n-1})f(y).$$

   Par densité de l'ensemble $\{p2^{-n};\ p,n\in\mathbb{N},\ 0\leqslant p\leqslant 2^n\}$ dans $[0,1]$ on en déduit que f est convexe.

Exercice 7.5.

1. Comme x majore $\{y\in F;\ y\leqslant x\}$, on a $a(x)\leqslant x$. Remarquons que si $\{y\in F;\ y\leqslant x\}=\emptyset$, alors $a(x)=-\infty$ et que si $\{y\in F;\ y\leqslant x\}\neq\emptyset$, cet ensemble est fermé et contient donc sa borne supérieure. En particulier, si $x\notin F$, on a $a(x)<x$. De même $x\leqslant b(x)$ avec égalité si et seulement si $x\in F$.
2. Pour $x\in U$, posons $I_x=]a(x),b(x)[$. On a $x\in I_x\subset U$ et puisque $a(x)\in F\cup\{-\infty\}$ et $b(x)\in F\cup\{+\infty\}$, tout intervalle contenant x et inclus dans U est contenu dans I_x. En particulier, si $y\in I_x$, puisque $y\in I_x\subset U$, et I_y est le plus grand intervalle avec cette propriété, il vient $I_x\subset I_y$; mais alors $x\in I_y$, et par ce qui précède $I_y\subset I_x$, donc $I_x=I_y$.

   Posons $S=\{I_x;\ x\in U\}$. Comme les intervalles de la forme I_x sont tous contenus dans U, leur réunion est contenue dans U ; pour $x\in U$, on a $x\in I_x$, donc U est réunion de ces intervalles. Soient $x,y\in U$; si $I_x\cap I_y\neq\emptyset$, il existe $z\in I_x\cap I_y$; alors, par ce qui précède $I_x=I_z=I_y$. Donc deux éléments distincts de S sont des intervalles disjoints. Enfin, comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, pour tout $x\in U$, l'ensemble $I_x\cap\mathbb{Q}$ n'est pas vide, donc il existe $y\in U\cap\mathbb{Q}$ tel que $I_x=I_y$. Donc $S=\{I_y;\ y\in U\cap\mathbb{Q}\}$ est dénombrable.
3. Il s'agit de définir g sur chacun des intervalles $I\in S$. Pour $I=]a,b[\in S$, si $a,b\in\mathbb{R}$, alors $a,b\in F$ et la restriction de g à $[a,b]$ est l'unique application affine sur $[a,b]$ coïncidant avec f en les points a et b ; si $a=-\infty$ et $b\in\mathbb{R}$, on prend g constante égale à $f(b)$ sur $]a,b[$; si $a\in\mathbb{R}$ et $b=+\infty$, on prend g constante égale à $f(a)$ sur $]a,b[$; enfin $a=-\infty$ et $b=+\infty$ est exclu car $F\neq\emptyset$.

   Démontrons que la fonction g ainsi définie est continue.

   Soit $x\in\mathbb{R}$. Si $x\in U$, la fonction g est affine donc continue au voisinage de x.

   Supposons que $x\in F$ et soit $\varepsilon>0$. Comme f est continue, il existe $\alpha_0>0$ tel que pour tout $y\in F$ tel que $|y-x|<\alpha_0[$ on ait $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.
   - Si $F\cap[x,x+\alpha_0[=\emptyset$, la fonction g est affine sur cet intervalle, donc elle est continue à droite et il existe $\alpha_1>0$ tel que pour $y\in[x,x+\alpha_1[$ on ait $|g(y)-g(x)|<\varepsilon$;
   - s'il existe $z\in F\cap[x,x+\alpha_0[$, alors pour tout $u\in[x,z]$ on a $a(u),b(u)\in[x,z[$, donc $f(a(u))\in]f(x)-\varepsilon,f(x)+\varepsilon[$ et $f(b(u))\in]f(x)-\varepsilon,f(x)+\varepsilon[$. Or g est affine sur $[a(u),b(u)]$, donc $g(u)$ est compris entre $f(a(u))$ et $f(b(u))$, donc $|g(u)-g(x)|<\varepsilon$. Posons dans ce cas $\alpha_1=z-x$.

En distinguant de même deux cas selon que $F \cap]x-\alpha_0, x]$ est vide où non, on trouve $\alpha_2 > 0$ tel que pour tout $y \in]x-\alpha_2, x]$ on ait $|g(y)-g(x)| < \varepsilon$.

Prenant $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$ on a $|g(y)-g(x)| < \varepsilon$ pour tout $y \in]x-\alpha, x+\alpha[$.

Exercice 7.6. Si $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ est continue et injective, elle est (strictement) monotone, donc $f(0)$ minore (si f est croissante) ou majore (si f est décroissante) $f([0,1[)$. Alors $f([0,1[)$ est minoré ou majoré, donc est distinct de $\mathbb{R}$. Donc f n'est pas surjective.

Exercice 7.7. Quitte à permuter les x_i, on peut supposer que la suite (x_i) est croissante. Posons $t_i = \operatorname{Arctan} x_i$. On a $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} t_{i+1} - t_i = t_7 - t_1 < \pi/2 - (-\pi/2)$. Il existe donc $i \in \{1, \ldots, 6\}$ tel que $t_{i+1} - t_i < \pi/6$. On a alors $0 \leqslant \tan(t_{i+1} - t_i) = \dfrac{x_{i+1} - x_i}{1 + x_{i+1} x_i} < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Exercice 7.8. Notons $n (\geqslant 1)$ le degré de P.

1. Notons $t_1 < \ldots < t_n$ les racines de P. Par le théorème de Rolle, P' s'annule entre t_i et t_{i+1}. On a ainsi $n-1$ racines distinctes de P'.
2. Notons $t_1 < \ldots < t_k$ les racines de P et $m_1, \ldots, m_k$ leurs multiplicités respectives. On a $n = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} m_i$. Alors P' admet $k-1$ racines $s_1, \ldots, s_{k-1}$ distinctes des t_i (comme ci-dessus) ; si $m_i \geqslant 2$ alors t_i est racine de P' de multiplicité $m_i - 1$. Donc P' est divisible par $\displaystyle\prod_{i=1}^{k-1}(X - s_i) \prod_{i=1}^{k}(X - t_i)^{m_i - 1}$.

   Or $k - 1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{k}(m_i - 1) = n - 1$ donc P' est scindé.

Exercice 7.9.

1. Pour $y \in \mathbb{R}^*$, posons $\varepsilon(y) = 2\dfrac{f(y) - f(y/2)}{y} - \ell$. On a $\displaystyle\lim_{y \to 0} \varepsilon(y) = 0$ et
$$f(x) - f(2^{-n}x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(2^{-k}x) - f(2^{-k-1}x) = \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\ell(2^{-k-1}x) + 2^{-k}x\varepsilon(2^{-k}x)\Big).$$
2. Soit $\eta > 0$. Il existe α tel que pour $0 < |y| < \alpha$ on ait $|\varepsilon(y)| < \eta$. Pour $0 < |x| < \alpha$, on a $\Big|\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k}\varepsilon(2^{-k}x)\Big| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k}|\varepsilon(2^{-k}x)| \leqslant \eta$.

   Faisant tendre n vers $+\infty$ dans 1, on trouve $f(x) - f(0) = \ell x + x\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k}\varepsilon(2^{-k}x)$, (par continuité de f) soit $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \ell + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k}\varepsilon(2^{-k}x)$. On en déduit que $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} \to \ell$, soit $f'(0) = \ell$.

Exercice 7.10.

Première démonstration. 1. L'application g (*resp.* h) est continue en tout point de $]a,b]$ (*resp.* $[a,b[$) parce que f l'est et en a (*resp.* b) par définition de la dérivée. D'après le théorème des valeurs intermédiaires $g([a,b])$ et $h([a,b])$ sont des intervalles. Comme $g(b) = f(a)$, on a $g([a,b]) \cap h([a,b]) \neq \emptyset$, donc $g([a,b]) \cup h([a,b])$ est aussi un intervalle.

2. Posons $J = g([a,b]) \cup h([a,b])$. C'est un intervalle qui contient $f'(a)$ et $f'(b)$ donc toute valeur comprise entre $f'(a)$ et $f'(b)$; par ailleurs, d'après le théorème des accroissements finis, $g([a,b]) \subset f'([a,b])$ et $h([a,b]) \subset f'([a,b])$, donc $J \subset f'([a,b])$: toute valeur comprise entre $f'(a)$ et $f'(b)$ est dans $f'([a,b])$.

Deuxième démonstration. La fonction continue g atteint son minimum en un point d du segment $[a,b]$; comme $g'(a) < 0$, pour $x \in]a,b]$ proche de a, on a $g(x) < g(a)$, donc $d \neq a$. De même, puisque $g'(b) > 0$, on a $b \neq d$, donc $d \in]a,b[$; comme g admet un extremum local en d, il vient $g'(d) = 0$, donc $f'(d) = c$.

Exercice 7.11.

1. Par convexité de f, la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ est croissante, donc admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ quand $x \to +\infty$. Alors $\dfrac{f(x)}{x} \to \ell$.
2. On en déduit que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \to \ell$, et cette fonction étant croissante, il vient $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \leqslant \ell$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $(x \neq y)$, donc, pour $x > y$, il vient $f(x) - f(y) \leqslant (x - y)\ell$, donc $x \mapsto f(x) - \ell x$ est décroissante et admet donc une limite $\in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Exercice 7.12. Notons $e^{ia_1}, \dots e^{ia_n}$ les affixes des sommets d'un polygone avec $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_n \leqslant 2\pi$. Le périmètre de ce polygone est $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |e^{ia_{k+1}} - e^{ia_k}|$ (avec la convention $a_{n+1} = a_1$). On a $|e^{ia} - e^{ib}| = 2|\sin \dfrac{a-b}{2}|$. Posons $t_k = \dfrac{a_{k+1} - a_k}{2}$ et $t_n = \dfrac{a_1 + 2\pi - a_n}{2}$. Il vient $P = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin t_k$. Remarquons que les t_k sont positifs ou nuls et que leur somme est π.

La fonction sinus étant strictement concave sur $[0, \pi]$, il vient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \sin t_k \leqslant \sin \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k}{n}$, avec égalité si et seulement si tous les t_k sont égaux, soit $P \leqslant 2n \sin \dfrac{\pi}{n}$ - périmètre du polygone convexe régulier, avec égalité si et seulement si tous les t_k sont égaux, c'est à dire pour un polygone convexe régulier.

Exercice 7.13.

1. Posons $t_i = \ln u_i$. La fonction exp étant convexe, il vient $\exp \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i t_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i \exp t_i$.
2. Écrivons $P = (p_{ij})$. Il vient $s_{ii} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_{ji}^2 \lambda_j$. Comme la matrice P est orthogonale, il vient $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_{ji}^2 = 1$, donc $s_{ii} \geqslant \displaystyle\prod_{j=1}^{n} \lambda_j^{p_{ji}^2}$. D'où $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} s_{ii} \geqslant \prod_{i,j=1}^{n} \lambda_j^{p_{ji}^2} = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j^{\sum_{i=1}^{n} p_{ji}^2}$. Or on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_{ji}^2 = 1$ et $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} \lambda_j = \det S$.
3. Posons $S = {}^t\!AA$. On a $(s_{ij}) = \langle C_i | C_j \rangle$. Il vien $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \|C_i\|^2 \geqslant \det S = (\det A)^2$.
4. Si $A \notin GL_n$ on a $\det A = 0$. L'inégalité n'en est que plus claire ! (On peut évidemment aussi invoquer la densité de GL_n dans M_n).

   NB. Géométriquement, la valeur absolue du déterminant de A est le volume du parallélépipède de côtés C_i. Ce volume est maximal, égal au produit des $\|C_i\|$ lorsque les C_i sont orthogonaux.

Exercice 7.14. On écrit $f(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{4k+2} + o(x^{14})$, et, par unicité du développement limité, $f^{(14)}(0) = -\frac{14!}{7!}\cdot$

Exercice 7.15. La formule de Taylor avec reste intégral donne

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{F^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} F^{(n+1)}(t)\,dt, \quad \text{soit} \quad F(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\,dt.$$

Exercice 7.16. Comme $f^{(n+1)}(a) \neq 0$ la fonction continue $f^{(n+1)}$ garde un signe constant au voisinage de a, donc $f^{(n)}$ est strictement monotone donc injective au voisinage de a, d'où l'unicité de θ_h. La formule de Taylor Young à l'ordre $n+1$ donne

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + ... + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + o(h^{n+1})$$

soit $\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta_h h) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + o(h^{n+1})$, ou encore

$$\frac{f^{(n)}(a+\theta_h h) - f^{(n)}(a)}{h} \to \frac{f^{(n+1)}(a)}{n+1}\cdot$$

Or $\frac{f^{(n)}(a+\theta_h h) - f^{(n)}(a)}{\theta_h h} \to f^{(n+1)}(a)$. Faisant le quotient de ces deux limites, il vient $\theta_h \to \frac{1}{n+1}\cdot$

Exercice 7.17. On a $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$. Posons $a_k = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}\cdot$ Écrivons donc $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k + R_n(x)$. Remarquons que $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\alpha - k}{k+1} \to -1$ (si $\alpha \notin \mathbb{N}$).

1. Formule de Taylor-Lagrange : $R_n(x) = a_n x^n (1+\theta x)^{\alpha-n}$, et il vient $|R_n(x)| \leqslant |a_n| \max(1, (1+x)^\alpha) \Big(\frac{|x|}{1-|x|}\Big)^n$. Notons u_n ce dernier terme. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \frac{|x|}{1-|x|}$, donc $R_n(x)$ tend vers 0 dès que $|x| < 1/2$.
   Reste intégral : $R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt = na_n \int_0^x \Big(\frac{x-t}{1-t}\Big)^{n-1} (1-t)^{\alpha-1}\,dt$. Or pour t entre 0 et x, on a $\left|\frac{x-t}{1-t}\right| \leqslant |x|$, donc $|R_n(x)| \leqslant n|a_n| \max(1, (1+x)^{\alpha-1})|x|^n$ qui tend vers 0 dès que $|x| < 1$.

2. La série entière $\sum a_k x^k$ a pour rayon de convergence 1. Posons $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$. On a $(k+1)a_{k+1} = (\alpha - k)a_k$. On trouve $(1+x)S'(x) = (1+x)\sum_{k=0}^{+\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}((k+1)a_{k+1} + ka_k)x^k = \alpha S(x)$. Posons $g(x) = (1+x)^{-\alpha} S(x)$. On trouve $g'(x) = -\alpha(1+x)^{-\alpha-1}S(x) + (1+x)^{-\alpha}S'(x) = 0$. Comme $g(0) = S(0) = 1$, il vient $g(x) = 1$ pour $x \in]-1, 1[$, donc $S(x) = (1+x)^\alpha$.

Exercice 7.18.

1. On a $f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\dfrac{h^2}{2}f''(x+\theta_1 h)$ et $f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\dfrac{h^2}{2}f''(x-\theta_2 h)$ avec $\theta_1,\theta_2\in]0,1[$. Il vient $f(x+h)-f(x-h)=2hf'(x)+\dfrac{h^2}{2}(f''(x+\theta_1 h)-f''(x-\theta_2 h))$. Enfin

$$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}+\frac{h}{4}(f''(x+\theta_1 h)-f''(x-\theta_2 h)).$$

Il vient $|f'(x)|\leqslant \dfrac{M_0}{h}+\dfrac{hM_2}{2}$.

2. Prenant $h=\sqrt{\dfrac{2M_0}{M_2}}$, il vient $|f'(x)|\leqslant\sqrt{2M_0M_2}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
3. Soient $h_1\dots,h_{n-1}$ des réels non nuls distincts. Pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout j il existe $u_j\in\mathbb{R}$ tel que :

$$f(x+h_j)-f(x)=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{h_j^k}{k!}f^{(k)}(x)+\frac{f^{(n)}(u_j)}{n!}h_j^n.$$

La matrice (de type Vandermonde) (a_{jk}) où $a_{jk}=h_j^k$ est inversible. Notons (b_{jk}) son inverse. On a $\dfrac{f^{(j)}(x)}{j!}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}b_{jk}\Big(f(x+h_k)-f(x)-\frac{f^{(n)}(u_k)}{n!}h_k^n\Big)$. On en déduit que

$$|f^{(j)}(x)|\leqslant j!\sum_{k=1}^{n-1}|b_{jk}|\Big(2M_0+\frac{M_n|h_k|^n}{n!}\Big).$$

Donc $M_k<+\infty$ pour tout $k\in\{1,\dots,n\}$.
Remarquons que, d'après 2, on a $\ln M_k\leqslant\dfrac{\ln M_{k-1}+\ln M_{k+1}+\ln 2}{2}$ Posons $x_k=\ln M_k-\dfrac{\ln 2}{2}k(n-k)$. D'après 2, on a $2x_k\leqslant x_{k+1}+x_{k-1}$, donc $x_{k+1}-x_k$ est croissante. On en déduit que $\dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1}(x_{j+1}-x_j)\leqslant\frac{1}{n-k}\sum_{j=k}^{n-1}(x_{j+1}-x_j)$, soit $x_k\leqslant\dfrac{k}{n}x_n+(1-\dfrac{k}{n})x_0$.

Exercice 7.19. Au voisinage de c, on a $\dfrac{f(x)}{f(c)}=1+\dfrac{f''(c)}{2f(c)}(x-c)^2+o(x-c)^2$, donc $\displaystyle\lim_{x\to c}\frac{\ln\left(\frac{f(x)}{f(c)}\right)}{(x-c)^2}=\frac{f''(c)}{2f(c)}$.
Soit $\varepsilon>0$. Il existe a',b' avec $a\leqslant a'<c<b'\leqslant b$ tels que, pour $x\in[a',b']$ on ait $\left|\dfrac{\ln\left(\frac{f(x)}{f(c)}\right)}{(x-c)^2}-\dfrac{f''(c)}{2f(c)}\right|<\varepsilon$ et $|g(x)-g(c)|<\varepsilon$.
Posons $\lambda=\sup\{f(t);\ t\in[a,a']\cup[b',b]\}<f(c)$, et $M=\sup\{g(t);\ t\in[a,b]\}$. On a

$$I_1=\int_a^{a'}g(x)f(x)^n\,dx+\int_{b'}^{b}g(x)f(x)^n\,dx\leqslant M(b-b'+a'-a)\lambda^n=o\Big(f(c)^n\sqrt{\frac{1}{n}}\Big).$$

Posons $u=g(c)-\varepsilon$, $u'=g(c)-\varepsilon$, $v=\varepsilon-\dfrac{f''(c)}{2f(c)}$ et $-v'=\varepsilon-\dfrac{f''(c)}{2f(c)}$. On peut supposer que ε est assez petit pour avoir $u>0$ et $v'>0$.
Pour $x\in[a',b']$, on a

$$uf(c)^ne^{-nv(x-c)^2}\leqslant f(x)^ng(x)\leqslant u'f(c)^ne^{-nv'(x-c)^2}.$$

Or, en faisant le changement de variable $t = \sqrt{nv}(x-c)$ on trouve

$$\int_{a'}^{b'} uf(c)^n e^{-nv(x-c)^2}\,dx = \frac{uf(c)^n}{\sqrt{nv}} \int_{\sqrt{nv}(a'-c)}^{\sqrt{nv}(b'-c)} e^{-t^2}\,dt$$

et $\displaystyle\int_{\sqrt{nv}(a'-c)}^{\sqrt{nv}(b'-c)} e^{-t^2}\,dt$ converge vers $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$. De même

$$\int_{a'}^{b'} u'f(c)^n e^{-nv'(x-c)^2}\,dx = \frac{u'f(c)^n}{\sqrt{nv'}} \int_{\sqrt{nv'}(a'-c)}^{\sqrt{nv'}(b'-c)} e^{-t^2}\,dt \leqslant u'f(c)^n \sqrt{\frac{\pi}{nv'}}.$$

On en déduit que, pour n assez grand, on a

$$\int_a^b f(t)^n g(t)\,dt \geqslant \int_{a'}^{b'} f(t)^n g(t)\,dt \geqslant (\sqrt{\pi} - \varepsilon)\frac{uf(c)^n}{\sqrt{nv'}}$$

et

$$\int_a^b f(t)^n g(t)\,dt \leqslant \int_{a'}^{b'} f(t)^n g(t)\,dt + \varepsilon\Big(f(c)^n \sqrt{\frac{1}{n}}\Big) \leqslant u'f(c)^n \sqrt{\frac{\pi}{nv'}} + \varepsilon\Big(f(c)^n \sqrt{\frac{1}{n}}\Big)$$

d'où le résultat.

Exercice 7.20.

1. Rappelons le théorème de prolongement de la dérivée :
   Soient I un intervalle ouvert, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. Si f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et f' admet une limite ℓ en a, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.
   L'application f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. On démontre par récurrence sur n que, pour $x \neq 0$, on a $f^{(n)}(x) = R_n(x)e^{-x^{-2}}$, où R_n est une fonction rationnelle (de la forme $\dfrac{P(x)}{x^m}$). On en déduit par récurrence, à l'aide du théorème de prolongement de la dérivée que f est de classe C^n pour tout n.
2. On pose
   - $g(x) = f(x-1)f(2-x)$. La fonction g est de classe C^∞ nulle en dehors de $[1,2]$ et strictement positive en tout point de $]1,2[$.
   - $h(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} g(t)dt = \int_x^2 g(t)\,dt$. La fonction h est de classe C^∞, nulle sur $[2,+\infty[$, strictement positve sur $]-\infty, 2[$, constante sur $]-\infty, 1]$.
   - $k(x) = \dfrac{h(|x|/2)}{h(0)}$. La fonction k convient.

10.8 Fonctions à plusieurs variables

Exercice 8.1.

1. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x$.
2. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ si et seulement si $x^2 = y$ et $y^2 = x$. Deux solutions possibles $(0,0)$ et $(1,1)$.
3. On a $r = \dfrac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(0,0) = 0 = \dfrac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(0,0) = t$ et $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -3$, donc on n'a pas d'extremum local en $(0,0)$.
   On a $r = \dfrac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(1,1) = 6 = \dfrac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(1,1) = t$ et $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = -3$. Il vient $rt - s^2 = 27 > 0$, donc on a un extremum local en $(1,1)$ qui est un minimum local puisque $r \geqslant 0$. Ce n'est pas un minimum global puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x,0) = -\infty$.

Exercice 8.2.

1. On choisit un repère orthonormé, dont on peut fixer l'origine en A, de sorte que $f_A(M) = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

   La fonction $M \mapsto AM^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ est polynomiale, donc de classe C^∞ ; elle est positive et ne s'annule qu'en A ; la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$; donc f_A est de classe C^∞ sur $E \setminus \{A\}$.

   Soit $M_0 \in E$ distinct de A. Notons $\vec{u}_0$ le vecteur $\overrightarrow{AM_0}/AM_0$. Soit $\vec{w}$ un « petit » vecteur et effectuons un développement limité à l'ordre 2 de $f_A(M_0 + \vec{w})$. Pour cela, on écrit $\vec{w} = t\vec{u}_0 + \vec{v}$ avec $t = \vec{w}.\vec{u}_0$ et $\vec{v} = \vec{w} - (\vec{w}.\vec{u}_0)\,\vec{u}_0$ orthogonal à $\vec{u}_0$. Pour $|t| < AM_0$, on a

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(AM_0 + t)^2 + \|\vec{v}\|^2} \\ &= (AM_0 + t)\sqrt{1 + \frac{\|\vec{v}\|^2}{(AM_0+t)^2}} \\ &= AM_0 + t + \frac{\|\vec{v}\|^2}{2\,AM_0} + o(\|\vec{w}\|^2). \end{aligned}$$

   On en déduit que $df_A(\vec{w}) = t = \vec{w}.\vec{u}_0$ et $d^2 f_A(\vec{w},\vec{w}) = \dfrac{\|\vec{v}\|^2}{AM_0} = \dfrac{\vec{w}.\vec{w} - t^2}{AM_0}$, donc,

$$d^2 f_A(\vec{w}_1, \vec{w}_2) = \frac{\vec{w}_1.\vec{w}_2 - (\vec{w}_1.\vec{u}_0)(\vec{w}_2.\vec{u}_0)}{AM_0}.$$

2. a) Notons $\mathcal{B} = \{M \in E;\ AM \leqslant f(A)\}$ la boule fermée de centre A et de rayon $f(A)$. C'est une partie compacte non vide de E : puisque f est continue, il existe $F \in \mathcal{B}$ tel que $f(F) \leqslant f(M)$ pour tout $M \in \mathcal{B}$. Si $M \notin \mathcal{B}$, on a $f(M) \geqslant AM > f(A) \geqslant f(F)$. On en déduit que $f(F) = \inf\{f(M);\ M \in E\}$.

   b) Soient M, N deux points distincts de E et $t \in\,]0,1[$. Posons $P = tM + (1-T)N$. On a donc $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AM} + (1-t)\overrightarrow{AN}$, donc $f_A(P) \leqslant t f_A(M) + (1-t) f_A(N)$, l'inégalité étant stricte si A, M et N ne sont pas alignés. De même, $f_B(P) \leqslant t f_B(M) + (1-t) f_B(N)$ et $f_C(P) \leqslant t f_C(M) + (1-t) f_C(N)$ et l'une au moins de ces inégalités n'est pas stricte puisque A, B et C n'étant pas alignés, ils ne peuvent être tous trois dans la droite (MN).

c) Soient F, G deux points distincts de E et notons H leur milieu. Si $f(F) = f(G)$, alors $f(H) < f(G)$ par stricte convexité, donc f ne peut pas réaliser son minimum en deux points distincts. De plus, soit $M \in E$ et notons N sont projeté orthogonal dans le plan (ABC). On a $AM^2 = AN^2 + MN^2$, donc $f_A(N) \leqslant f_A(M)$ avec égalité si $M = N$ - et il en va de même pour f_B et f_C. On en déduit que le maximum de f ne peut être atteint en dehors du plan (ABC).

3. a) Puisque f atteint son minimum en F, le gradient de la fonction f est nul en F, autrement dit $\overrightarrow{AF}/AF + \overrightarrow{BF}/BF + \overrightarrow{CF}/CF = \overrightarrow{0}$.

   b) En effet, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs d'un espace Euclidien satisfaisant $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{u}+\vec{v}\| = 1$, il vient $\vec{u}.\vec{v} = -\dfrac{1}{2}$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment un angle de $2\pi/3$.

   c) Si $F = G$, alors les coordonnées barycentriques de F dans le repère A, B, C sont $(1, 1, 1)$ mais aussi (AF, BF, CF). Par unicité, il vient $AF = BF = CF$, donc le triangle ABC est invariant par la rotations d'angle $2\pi/3$ de centre F : il est équilatéral.

   d) Puisque $\widehat{BA'C}$ est un angle de mesure $\pi/3$, les points du cercle circonscrit situés sur l'arc de cercle entre B et C et ne contenant pas A' sont les points M du demi-plan (ABC) bordé par la droite (BC) et contenant A tels que $\widehat{BMC}$ soit un angle de mesure $2\pi/3$. On en déduit que F est bien dans cet arc de cercle - et de même pour les deux autres cercles circonscrits.

   e) Par cocyclicité, on a $\widehat{A'FC} = \widehat{A'BC} = \pi/3$. On en déduit que A' est situé sur la demi-droite issue de F opposée à A.

4. Supposons par exemple que l'angle en A soit $\geqslant 2\pi/3$. On a vu que lorsque F n'est pas un des points A, B ou C, il est situé à l'intérieur du triangle A, B, C (ses coordonnées barycentriques dans le repère A, B, C sont strictement positives) et aussi $\widehat{BFC} = 2\pi/3$. Impossible. Donc F est le point parmi A, B et C en lequel la fonction f est la plus petite. C'est évidemment le point A (puisque BC est le côté le plus long du triangle).

5. Dans ce cas, le gradient en A de $f_B + f_C$ est le vecteur $\vec{w} = \dfrac{\overrightarrow{BA}}{BA} + \dfrac{\overrightarrow{CA}}{CA}$ de norme > 1. On a $f_A(A - t\vec{w}) = |t|\|\vec{w}\|$, donc la dérivée à droite en 0 de $t \mapsto f(A - t\vec{w})$ est $\|\vec{w}\| - \|\vec{w}\|^2$; elle est négative et donc f n'atteint pas son minimum en A.

Exercice 8.3.

1. On a $F(0, 0) = 0$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = -1$, donc on peut appliquer le théorème des fonctions implicites et écrire localement $F(x, y) = 0 \iff y = f(x)$: il existe des intervalles ouverts I, J et une application $f : I \to J$ de classe C^∞ tels que $0 \in I \cap J$ et, pour $(s, t) \in I \times J$ on ait l'équivalence $F(s, t) = 0 \iff t = f(s)$.
2. Pour $x \in I$, on a $F(x, f(x)) = 0$, soit $f(x) = x + \sin x f(x)$. On a $\sin x f(x) \sim_0 x f(x) = o(x)$ puisque f est continue en 0 et $f(0) = 0$. Il vient $f'(0) = 1$.
3. Il vient $f(x) = x + x f(x) + o(x f(x)) = x + x^2 + o(x^2)$ (puisque $f(x) \sim_0 x$).

Exercice 8.4.

1. La matrice Jacobienne de f, *i.e.* la matrice de df dans les bases canoniques est
$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x - 3y & -3x & 4z \end{pmatrix}.$$
2. On a $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) & \dfrac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(1,1,1) & \dfrac{\partial g}{\partial z}(1,1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ qui est inversible.

3. Il s'agit encore d'une application directe du théorème des fonctions implicites.
4. D'après le théorème des fonctions implicites, on a $\begin{pmatrix}\varphi'(1)\\ \psi'(1)\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}2 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5/7\\ 2/7\end{pmatrix}$.

Exercice 8.5.

1. On applique le théorème d'inversion locale à $\varphi : (x,y) \mapsto (x, f(x,y))$: la matrice jacobienne de φ en (x,y) est $\begin{pmatrix}1 & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\\ 0 & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}$ qui est inversible pour $(x,y) = (x_0, y_0)$. Notons $\psi : V' \to U'$ la réciproque de φ définie sur un voisinage de (x_0, z_0). Pour $(u,y) \in U'$ et $(x,z) \in V'$, on a
$$(u,y) = \psi(x,z) \iff (x,z) = \varphi(u,y) \iff x = u \text{ et } z = f(x,y)$$
donc $\psi(x,z)$ est de la forme $(x, F(x,z))$.
2. On a $\psi(x,z) = (x,y)$ et $d\psi_{(x,z)} = d\varphi^{-1}_{x,y}$. Il vient donc $\begin{pmatrix}1 & \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,z)\\ \\ 0 & \dfrac{\partial F}{\partial z}(x,z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\\ \\ 0 & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}^{-1}$; il vient $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,z) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)^{-1}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,z) = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)^{-1}$.

Exercice 8.6.

1. On a $f(A+H) = f(A) + AH + HA + H^2 = f(A) + AH + HA + o(\|H\|)$. On en déduit que f est différentiable en A et que $df_A(H) = AH + HA$.
2. L'application $A \mapsto df_A$ est linéaire, donc continue. On a $df_I(H) = 2H$, donc df_I est l'homothétie de rapport 2 : elle est bijective, et l'on peut appliquer le théorème d'inversion locale.

Exercice 8.7.

1. Puisque f est définie sur tout E (qui est convexe), il résulte immédiatement du théorème des accroissements finis que f est k-lipschitzienne.
2. a) L'application $x \mapsto f(x) + a$ est contractante ; puisque E est complet, elle admet un unique point fixe.
   b) D'après la question précédente, tout $a \in E$ admet un unique antécédent par F.
3. Soit $x \in E$. Puisque $|||df_x||| \leqslant k$, l'application linéaire $dF_x = \mathrm{Id}_E - df_x$ est inversible d'inverse $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(df_x)^n$. D'après le théorème d'inversion locale, F induit un difféomorphisme de classe C^1 entre un voisinage U de x et un voisinage V de $F(x)$; on en déduit que F^{-1} est de classe C^1 sur V. Cela étant vrai pour tout x, F est un difféomorphisme de classe C^1.

Exercice 8.8.

1. Si $F(x) = F(y)$, il vient $N(x-y) \leqslant N(Fx) - F(y)) = 0$, donc $x = y$.
2. a) On a $F(a+tx) = F(a) + tdF_a(x) + R_a(tx)$ où R_a est un reste et vérifie donc $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{N(R_a(z))}{N(z)} = 0$. On en déduit que $\dfrac{1}{t}\Big(F(a+tx) - F(a)\Big) = (dF_a)(x)$. Comme pour tout $t \neq 0$, on a $N\Big(\dfrac{1}{t}\Big(F(a+tx) - F(a)\Big)\Big) \geqslant N(x)$ il vient à la limite $N(dF_a(x)) \geqslant N(x)$ (par continuité de N).

b) On déduit de (a) que l'endomorphisme $(dF)_a$ est injectif, donc bijectif puisque on est en dimension finie

c) On a $(d(Q \circ F))_a = (dQ)_{F(a)} \circ dF_a$. Puisque $(dF)_a$ est bijective, si $(d(Q \circ F))_a = 0$, alors $(dQ)_{F(a)} = (d(Q \circ F))_a \circ ((dF)_a)^{-1} = 0$.

d) Cela résulte immédiatement du théorème d'inversion locale puisque $(dF)_a$ est bijective. Notons que $((dF)_a)^{-1}$ est continue puisque on est en dimension finie.

3. Les normes N et $\| \ \|$ étant équivalentes, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on ait $\alpha\|x\| \leqslant N(x) \leqslant \beta\|x\|$ et $\|x\| \leqslant \beta N(x)$. On en déduit que, pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\alpha\|x-y\| \leqslant N(x-y) \leqslant N(F(x)-F(y)) \leqslant \beta\|x-y\|.$$

On peut prendre $k = \dfrac{\alpha}{\beta}$.

4. a) Pour $c, h \in \mathbb{R}^n$, on a $Q(c+h) = Q(c) + 2\langle c-b|h\rangle + \|h\|^2$. Comme $\|h\|^2 = o(\|h\|)$, on en déduit que Q est différentiable en c et $(dQ)_c(h) = 2\langle c-b|h\rangle$.

b) On a $\|F(x)-b\| + \|b-F(0)\| \geqslant \|F(x)-F(0)\| \geqslant k\|x\|$. Donc, si $k\|x\| > 2\|b-F(0)\|$, on a $\|F(x)-b\| \geqslant k\|x\| - \|b-F(0)\| > \|b-F(0)\|$, donc $\varphi(x) = \|F(x)-b\|^2 > \varphi(0)$. Il suffit de poser $R = \dfrac{2\|b-F(0)\|}{k}$.

c) Comme B est compacte, la fonction continue φ y atteint son minimum en un point a. Pour $z \in \mathbb{R}^n$, on a alors
- si $z \in B$ alors $\varphi(z) \geqslant \varphi(a)$ par définition de a
- si $z \notin B$ alors $\varphi(z) > \varphi(0) \geqslant \varphi(a)$ (puisque $0 \in B$).

d) La fonction $\varphi = Q \circ F$ atteint un minimum en a, donc $(d(Q \circ F))_a = 0$; par 2.c), il vient $(dQ)_{F(a)} = 0$; en particulier $2\|F(a)-b\|^2 = (dQ)_{F(a)}(F(a)-b) = 0$ (d'après 4.a), donc $F(a) = b$.

5. On a démontré que F est bijective. Par ailleurs, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, F induit un difféomorphisme de classe C^1 d'un voisinage ouvert U de a sur un voisinage ouvert V de $F(a)$, donc F^{-1} est de classe C^1 sur V. Cela étant vrai pour tout a, F est un difféomorphisme de classe C^1.

6. a) Il résulte de 2.d), que pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, $F(\mathbb{R}^n)$ est un voisinage de $F(a)$, donc $F(\mathbb{R}^n)$ est ouvert. De plus, comme en 5, F est un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ sur $F(\mathbb{R}^n)$.

b) Puisque $(F(x_n))$ est convergente, elle est de Cauchy ; comme $N(x_m - x_n) \leqslant N(F(x_m) - F(x_n))$, on en déduit que (x_n) est aussi de Cauchy.

c) Soit $y \in \overline{F(\mathbb{R}^n)}$. Il existe une suite $(y_n) = (F(x_n))$ convergeant vers y. Par (a), la suite (x_n) est de Cauchy, donc converge vers un point $x \in E$; on a alors $F(x) = y$ puisque F est continue, donc $F(\mathbb{R}^n)$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$).

d) On a vu que l'ensemble $F(\mathbb{R}^n)$ est ouvert et fermé dans l'espace connexe $\mathbb{R}^n$; il n'est pas vide, donc $F(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. On en déduit que F est surjective (c'est donc un difféomorphisme de classe C^1).

10.9 Équations différentielles

Exercice 9.1. On cherche des solutions sous la forme $y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$. L'équation devient $\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)(k+2)a_{k+2}x^k - \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k-1}x^k = 0$. Cela implique $a_2 = 0$ et pour $k \geqslant 1$, $(k+1)(k+2)a_{k+2} = a_{k-1}$.

On en déduit que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, on a

- $a_{3\ell+2} = 0$;
- $a_{3\ell} = \dfrac{a_0}{\prod_{i=1}^{\ell} 3i(3i-1)}$
- $a_{3\ell+1} = \dfrac{a_1}{\prod_{i=1}^{\ell} 3i(3i+1)}$.

On obtient donc une base de l'espace des solutions :

$$y_1(x) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{x^{3\ell}}{\prod_{i=1}^{\ell} 3i(3i-1)} \qquad y_2(x) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{x^{3\ell+1}}{\prod_{i=1}^{\ell} 3i(3i+1)}.$$

Ce sont deux séries entières de rayon de convergence infini.

Exercice 9.2.

1. Les solutions de l'équation homogène associé sont $y(t) = a\cos t + b\sin t$. Sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-|t|}}{2}$ est solution particulière. Par contre, cette fonction n'est pas dérivable en 0. Pour raccorder, on va chercher la solution f qui vérifie $f'(0) = 0$ (et $f(0) = 1/2$) : il suffit de prendre $f(t) = \dfrac{e^{-t} + \sin t}{2}$ pour $t \geqslant 0$ et $f(t) = \dfrac{e^{t} - \sin t}{2}$ pour $t \leqslant 0$. Enfin, la solution générale est donc $t \mapsto \dfrac{e^{-|t|} + \sin|t|}{2} + a\cos t + b\sin t$.
2. Sur les intervalles $]-\infty, -1[$ et $]-1, +\infty[$, cette équation est $y' = \dfrac{t}{t+1}y$, dont une solution est $y = \exp(\int \dfrac{t}{t+1}dt)$; on trouve $y(t) = c\dfrac{e^t}{t+1}$ sur chacun de ces intervalles. La seule solution qui se raccorde est la solution nulle.
3. Une telle fonction vérifie $y' - y = c$ où c est indépendant de t : elle est de la forme $y(t) = ae^t - c$ où a et c sont des constantes. Enfin, on doit avoir $a(e-1) - c = \int_0^1 y(t)dt = c$. Les solutions sont donc de la forme $a(e^t - \dfrac{e-1}{2})$.

Exercice 9.3. Voir [Dem]... Sommairement :

1. On écrit $\dfrac{y'}{\sqrt{1-y^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, puis $\arcsin y = \arcsin t + c$, puis $y = \sin(\arcsin t + c)$ et enfin $y(t) = t\cos c + \sqrt{1-t^2}\sin c$.
2. Il y a ici une solution particulière « évidente » $y = \dfrac{1}{t}$. On cherche alors la solution sous la forme $y = z + \dfrac{1}{t}$. On trouve une équation de Bernoulli $z'(1-t^3) + (t^2 + \dfrac{2}{t})z + z^2 = 0$; posant donc $z = \dfrac{1}{u}$ on trouve une équation linéaire $(t^3-1)u + (t^2 + \dfrac{2}{t})u + 1 = 0$ que l'on peut résoudre...

3. Par dérivation de l'équation nous obtenons : $y' = a(y') + ta'(y')y'' + b'(y')y''$ qui est l'équation : $a(x)-x+x'(ta'(x)+b'(x)) = 0$ (avec $x = y'$). Notons alors z la fonction réciproque de x (supposée bijective...), et sachant que $z'(x) = 1/x'$, on obtient l'équation $(a(x) - x)z' + a'(x)z + b'(x) = 0$ qui est une équation différentielle linéaire.
4. L'application $f : X \mapsto q(\vec{V} \wedge \vec{B})$ est linéaire ; on a donc à faire à l'équation $\vec{V}' = f(\vec{V}) + q\vec{E}$; dans une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ dans laquelle $q\vec{B} = c\vec{k}$ la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & -c & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. L'équation homogène associée $\vec{V}' = f(\vec{V})$ admet les solutions

$$\vec{V}(t) = e^{tf}(\vec{V}(0)) = a\big(\cos(tc+\alpha)\vec{\imath} + \sin(tc+\alpha)\vec{\jmath}\big) + b\vec{k}$$

(où a, b, α sont des constantes). Pour trouver une solution particulière pour l'équation $\vec{V}' = f(\vec{V}) + q\vec{E}$, on écrit $\vec{E} = \vec{E}_0 + d\vec{k})$ avec $\vec{E}_0$ orthogonal à $\vec{B}$ et $d \in \mathbb{R}$; une solution particulière est $\vec{E}_1 + td\vec{k}$, où $\vec{E}_1$ est tel que $\vec{E}_1 \wedge \vec{B} = \vec{E}_0$. La solution générale de l'équation homogène est donc

$$\vec{V}(t) = e^{tf}(\vec{V}(0)) = a\big(\cos(tc+\alpha)\vec{\imath} + \sin(tc+\alpha)\vec{\jmath}\big) + \vec{E}_1 + (b+dt)\vec{k}.$$

Exercice 9.4.

1. On a $w'(t) = u_1''(t)u_2(t) - u_2''(t)u_1(t) = (q_2(t) - q_1(t))u_1(t)u_2(t) \geqslant 0$. Comme $u_1(t) > 0$ pour $t > a$ proche de a, il vient $u_1'(a) \geqslant 0$ (et comme u_1 n'est pas nulle et est solution de l'équation différentielle $u'' + q_1(t)u = 0$, u_1 et u_1' ne peuvent pas s'annuler simultanément) ; donc $w(a) \geqslant 0$. De même $u_2'(b) \leqslant 0$, donc $w(b) \leqslant 0$.
2. On en déduit que $w(t) = 0$ pour $t \in [a, b]$. Il vient $\left(\dfrac{u_1}{u_2}\right)' = 0$ sur $]a, b[$.

Exercice 9.5.

1. Notons $s \mapsto u(s)$ une courbe tracée dans $\mathbb{C}$ identifiée avec $\mathbb{R}^2$. On suppose que s est une abscisse curviligne de sorte que $|u'(s)| = 1$. Posons $z(s) = u'(s)$. La courbure $\kappa(s)$ est alors $\dfrac{z'(s)}{iz(s)}$. On note donc θ une primitive de κ ; on pose $z(s) = e^{i\theta(s)}$, puis u une primitive de z. Notons que θ et u sont uniques à une constante près ; on passe donc d'une telle courbe à une autre par une isométrie directe.
2. La première question résulte du théorème de Cauchy-Lipschitz. On a ${}^tY' =^t Y^tA = -{}^tYA$, donc $({}^tYY)' =^t Y'Y +^t YY' = 0$. Cela prouve que ${}^tYY$ est constante égale à l'identité, donc Y est orthogonale.
3. (On suppose que κ ne s'annule pas). On cherche donc un chemin $s \mapsto X(s)$ dans $\mathbb{R}^3$ de classe C^3 tel que $\|X'(s)\| = 1$; (s est une abscisse curviligne) ; on pose $X'(s) = u(s)$; notons que $0 = \langle u(s)|u(s)\rangle' = 2\langle u'(s)|u(s)\rangle$; $u'(s) = \kappa(s)v(s)$ où $v(s)$ est de norme 1 (et orthogonal à $u(s)$; enfin $\langle v'(s)|v(s)\rangle = 0$ (puisque $\|v(s)\| = 1$) et $0 = \langle v(s)|u(s)\rangle' = \langle v(s)|u'(s)\rangle + \langle v'(s)|u(s)\rangle$, donc $v'(s) = -\kappa(s)u(s) + \tau(s)w(s)$, où $w(s) = u(s) \wedge v(s)$. Enfin, dérivant les produits scalaires $\langle w|u\rangle$, $\langle w|v\rangle$ et $\langle w|w\rangle$, on trouve $w'(s) = -\tau(s)v(s)$. Notant $Y(s)$ la matrice dont les vecteurs ligne sont u, v, w, l'équation s'écrit donc : $Y'(s) = A(s)Y(s)$, où $A(s) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix}$. La question précédente nous donne l'existence d'un tel Y, puis, en intégrant u, on trouve X.
4. Ici $Y(s) = e^{sA}Y_0$. Cela dit, posons $\rho = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$, $U(s) = \dfrac{1}{\rho}\big(\kappa u(s) - \tau w(s)\big)$, $V(s) = v(s)$ et $W(s) = U(s) \wedge V(s) = \dfrac{1}{\rho}\big(\tau u(s) + \kappa w(s)\big)$; on a $V'(s) = \rho U(s)$, $U'(s) = V(s)$ et $W'(s) = 0$, de

sorte que $U(s) = \cos(\rho s)\, U + \sin(\rho s) V$, (où $U = U(0), V = V(0), W$ est une base orthonormée directe) et enfin,

$$u(s) = \frac{1}{\rho}(\kappa U(s) + \tau W(s)) = \frac{1}{\rho}\Big(\kappa\big(\cos(\rho s)\, U + \sin(\rho s) V\big) + \tau W\Big).$$

Finalement

$$X(s) = \frac{\kappa}{\rho^2}\big(\sin(\rho s)\, U - \cos(\rho s) V\big) + s\frac{\tau}{\rho} W + X_0$$

où (X_0, U, V, W) est un repère orthonomé direct. La trajectoire décrite est une *hélice circulaire.*

Exercice 9.6.

1. On a

$$J(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2\sin^2 t)^n}{(2n)!}\, dt.$$

Il s'agir, pour x fixé, d'intervertir $\displaystyle\int$ et $\sum$. On peut pour cela, invoquer la convergence normale de la série de fonctions $t \mapsto \dfrac{(-x^2\sin^2 t)^n}{(2n)!}$, la convergence dominée... Tout marche. On a donc $J(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$, où $a_n = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t\, dt$. Si on veut pousser plus loin ce calcul, on peut remarquer que l'on a : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t\, dt = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ (intégrale de Wallis).

2. On peut dériver sous le signe $\displaystyle\int$: pour cela, il suffit de dire que $f : (x,t) \mapsto \cos(x\sin t)$ et de majorer la valeur absolue de $\partial f/\partial x(x,t) = -(\sin t)\sin(x\sin t)$ puis celle de $\partial^2 f/(\partial x)^2(x,t) = -(\sin^2 t)\cos(x\sin t)$ par 1 !
On a donc $J'(x) = -\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} -(\sin t)\sin(x\sin t)\, dt$ et $J''(x) = -\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} -(\sin^2 t)\cos(x\sin t)\, dt$. Il vient

$$\begin{aligned} x(J''(x) + J(x)) + J'(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \Big[x(\cos^2 t)\cos(x\sin t) - (\sin t)\sin(x\sin t)\Big]\, dt \\ &= \frac{2}{\pi}\varphi'(t)\, dt = 0 \end{aligned}$$

où $\varphi(t) = (\cos t)\sin(x\sin t)$ qui vérifie $\varphi(0) = \varphi(\pi/2) = 0$.

3. On sait que cette équation admet sur $\mathbb{R}_+^*$ une base de solutions J, y. Il s'agit de démontrer que y ne se prolonge pas en 0. Cherchons y, au voisinage de 0, sous la forme zJ. On a $y' = zJ' + z'J$ et $y'' = zJ'' + 2z'J' + z''J$ de sorte que $xJz'' + 2xJ'z' + z'J = 0$ soit $(xJ^2z')' = 0$. Enfin $z' = \dfrac{c}{xJ^2}$, où c est une constante. Si $c \neq 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to 0} |z'(x)| = +\infty$.

4. Remarquons que J et J' ne s'annulent pas simultanément : $J(0) = 1 \neq 0$ et, dans chacun des intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ la fonction J est solution d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre : la seule solution de cette équation qui vérifie $y(t_0) = y'(t_0) = 0$ est la solution nulle. On applique alors le lemme du relèvement.

5. On a $r^2 = J^2 + J'^2$; sa dérivée en $x > 0$ est $2J'(x)(J(x) + J''(x)) = -2\dfrac{J'(x)^2}{x} \leqslant 0$; la dérivée en x de $x \mapsto x^2 r(x)^2$ est $2x(J(x)^2 + J'(x)^2) - 2xJ'(x)^2) = 2xJ'(x)^2 \geqslant 0$.

6. Dérivant $J(x)=\cos\theta(x)$ et $J'(x)=-r(x)\sin\theta(x)$, il vient $J'(x)=r'(x)\cos\theta(x)-r(x)\theta'(x)\sin\theta(x)$ et $J''(x)=-r'(x)\sin\theta(x)-r(x)\theta'(x)\cos\theta(x)$. Multipliant ces expressions par $J'=-r\sin\theta$ et $J=r\cos\theta$, on trouve $J'(x)^2-J(x)J''(x)=\theta'(x)r(x)^2$. Enfin, comme $-J''(x)=J(x)+\dfrac{J'(x)}{x}$, on a

$$\theta'(x)r(x)^2=J'(x)^2-J(x)J''(x)=J'(x)^2+J(x)^2-\frac{J(x)J'(x)}{x}=r(x)^2\Big(1+\frac{\cos\theta(x)\sin\theta(x)}{x}\Big).$$

On en déduit que $\theta'(x)\geqslant 1/2$ pour $x\geqslant 1$, donc $\lim\limits_{x\to\infty}\theta(x)=+\infty$. Donc $\theta([1,+\infty[)$ est un intervalle de la forme $[a,+\infty[$ et contient donc une infinité de valeurs $k\pi+\pi/2$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

7. Dérivant l'expression $J''(x)+\dfrac{J'(x)}{x}+J(x)=0$, on trouve $J'''(x)+\dfrac{J''(x)}{x}-\dfrac{J'(x)}{x^2}+J'(x)=0$; multipliant par x^2, on trouve l'expression voulue.

8. On utilise une récurrence ; le résultat est vrai pour $n=0$ et $n=1$. Pour passer de n à $n+1$, il faut prendre le calcul par le bon bout, mais on y arrive... Par exemple :

   a) On a $J'_{n+1}(x)=-J''_n(x)+n\dfrac{J'_n(x)}{x}-n\dfrac{J_n(x)}{x^2}\cdot$ Écrivant $-J''_n(x)=\dfrac{J'_n(x)}{x}+\Big(1-\dfrac{n^2}{x^2}\Big)J_n(x)$ (hypothèse de récurrence), il vient

$$J'_{n+1}(x)=(n+1)J'_n(x)+\Big(1-\frac{n(n+1)}{x^2}\Big)J_n(x)=J_n(x)-(n+1)\frac{J_{n+1}(x)}{x}\cdot$$

   On a donc $J_n(x)=J'_{n+1}(x)+(n+1)\dfrac{J_{n+1}(x)}{x}\cdot$

   b) Dérivant l'expression obtenue en (a), on trouve :

$$J'_n(x)=J''_{n+1}(x)+(n+1)\frac{J'_{n+1}(x)}{x}-(n+1)\frac{J_{n+1}(x)}{x^2}\cdot \tag{1}$$

   Or, par définition de J_{n+1}, on a

$$\begin{aligned} J'_n(x) &= -J_{n+1}(x)+n\frac{J_n(x)}{x} &(2)\\ &= -J_{n+1}(x)+\frac{n}{x}\Big(J'_{n+1}(x)+(n+1)\frac{J_{n+1}(x)}{x}\Big). &(3)\end{aligned}$$

   En écrivant l'égalité des membres de droite des équations (1) et (3), on trouve

$$J''_{n+1}(x)+\frac{J'_{n+1}(x)}{x}+\Big(1-\frac{(n+1)^2}{x^2}\Big)J_{n+1}(x)=0.$$