Agrégation interne 1997 - 2ème épreuve de mathématiques

Préliminaires

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel $\geqslant 2$.

Si k est un entier naturel et f une fonction de classe C^k, c'est à dire une fonction k-fois continûment dérivable, définie sur $[0,1]$ à valeurs réelles, on posera,

$$M_k(f) = \sup\{|f^{(k)}(t)|;\ t \in [0,1]\} \quad \text{et} \quad m_k(f) = \left(\int_0^1 f^{(k)}(t)^2\,dt\right)^{1/2}$$

Dans les parties I, II et III on fixera une fonction f à valeurs réelles de classe C^n sur $[0,1]$ telle que :

(i) $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0$, pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$,

(ii) $m_0(f) = 1$.

et il s'agira de montrer qu'une telle fonction vérifie

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n} \big(M_k(f)\big)^{-\frac{1}{k}} \leqslant \pi e.$$

Pour alléger les notations, on posera $M_k = M_k(f)$ et $m_k = m_k(f)$.

I. Quelques inégalités

On rappelle que, pour des fonctions g, h à valeurs réelles, continues sur un segment $[a,b]$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit $\displaystyle\left(\int_a^b g(t)h(t)\,dt\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b g(t)^2\,dt\right)\left(\int_a^b h(t)^2\,dt\right)$.

1. Etablir que, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $m_k \leqslant M_k$ et, en écrivant $f^{(k)}$ à l'aide de $f^{(k+1)}$, que, pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $M_k \leqslant m_{k+1}$.
2. a) A l'aide d'une intégration par parties, prouver que, pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $m_k^2 \leqslant m_{k-1}.m_{k+1}$.

   b) On pose $\mu_0 = 1$ et, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $\mu_k = m_k^{1/k}$. Démontrer, à l'aide d'une récurrence, que la suite μ_k est croissante.

II. Deux fonctions auxiliaires

A. La fonction $\tilde{F}$

Dans toute la suite du problème, on désigne par F la fonction définie dans le plan complexe par

$$F(z) = F(x+iy) = \int_0^1 e^{-tz} f(t)^2\,dt = \int_0^1 e^{-(x+iy)t} f(t)^2\,dt$$

et par $\tilde{F}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\tilde{F}(x,y) = F(x+iy)$.

1. a) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) \geqslant 0$ on a $|F(z)| \leqslant 1$ et que pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, $F(x) \geqslant e^{-x}$.

b) En développant l'exponentielle en série, justifier que F est développable en série entière au voisinage de 0. Préciser le rayon de convergence de ce développement.

2. A partir de l'expression intégrale de $\tilde{F}$, montrer que $\tilde{F}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, et vérifie les relations $\dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial y} = i\dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial y^2} = -\dfrac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^2}$.

3. Montrer que, pour tout entier k, tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, et, pour tout complexe $z \neq 0$, on a

$$F(z) = \frac{1}{z^k}\int_0^1 e^{-tz}\,(f^2)^{(k)}(t)\,dt.$$

4. On suppose que $z \neq 0$ et $\operatorname{Re} z = x \geqslant 0$. Démontrer que pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$ on a,

$$|F(z)| \leqslant \frac{1}{|z|^k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} m_j m_{k-j} \leqslant \left(\frac{2\mu_k}{|z|}\right)^k,$$

où $\dbinom{k}{j}$ désigne le coefficient du binôme $\dbinom{k}{j} = \dfrac{k!}{j!(k-j)!}$.

B. La fonction v

5. Pour $b > 0$, on définit la fonction h_b dans le demi-plan $x > 0$ par $h_b(x,y) = \dfrac{\pi}{2} + \operatorname{Arctan}\Big(\dfrac{y-b}{x}\Big)$.

   a) Prouver que h_b, se prolonge continûment au demi-plan $x \geqslant 0$ privé du point $(0,b)$ et expliciter ce prolongement que l'on notera encore h_b *(on pourra interpréter $h_b(x,y)$ comme l'argument d'un nombre complexe ou la mesure d'un angle).*

   b) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{h_b(x,0)}{x} = \frac{1}{b}$.

6. Soient $b_1 \dots, b_n$ des nombres réels tels que $0 < b_1 \leqslant b_2 \leqslant \dots \leqslant b_n$. On considère la fonction v définie sur le domaine D, constitué du demi-espace $x \geqslant 0$ privé de tous les points $(0, b_k)$ et $(0, -b_k)$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ par

$$v(x,y) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\Big(h_{b_k}(x,y) + h_{b_k}(x,-y)\Big).$$

   a) Vérifier que sur D, on a $0 \leqslant v(x,y) \leqslant n$.

   b) Calculer $v(0,y)$ pour $y \in \mathbb{R}$, tel que $|y| \notin \{b_1, \dots, b_n\}$.

C. Inégalités reliant $\tilde{F}$ et v

Dans toute la suite du problème, on choisit b_k (pour $k \in \{1,\dots,n\}$) en posant $b_k = 2e\mu_k$ (avec les notations de la partie I).

7. a) Soit $y \in \mathbb{R}$, tel que $|y| \notin \{b_1,\dots,b_n\}$. Déduire de la question II.4 l'inégalité $e^{v(0,y)}|\tilde{F}(0,y)| \leqslant 1$.

   b) En déduire que, pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que, pour $(x,y) \in D$, si $(x^2 + (y-y_0)^2)^{1/2} < r$, on a $e^{v(x,y)}|\tilde{F}(x,y)| < e^{\varepsilon}$.

   (Si $|y_0| = b_k$, on posera $v_k(x,y) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{j=1}^{k}\Big(h_{b_j}(x,y) + h_{b_j}(x,-y)\Big)$ et on remarquera que $v_k \leqslant k$).

III. L'opérateur Δ de Laplace

Pour une fonction H de classe C^2 définie sur une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$, on note $\Delta H = \dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 H}{\partial y^2}\cdot$ Si $\Delta H = 0$, on dit que H est *harmonique.*

A. Deux fonctions harmoniques

1. Prouver que $\Delta v = 0$ sur $\mathring{D} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
2. Posons $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0,\ \tilde{F}(x, y) \neq 0\}$, où $\tilde{F}$ est la fonction introduite dans la partie II.A. On note u la fonction définie sur W par

$$u(x, y) = \ln|\tilde{F}(x, y)| = \frac{1}{2}\ln\left(\tilde{F}(x, y)\overline{\tilde{F}(x, y)}\right),$$

où ln désigne la fonction usuelle logarithme népérien. Montrer que $\Delta u = 0$ sur W.

B. Positivité du laplacien et maximum

3. Soit U une partie ouverte non vide de $\mathbb{R}^2$ et soit G une fonction réelle de classe C^2 sur U telle que, pour tout $(x, y) \in U$ on ait $\Delta G(x, y) > 0$. Montrer que G ne peut avoir de maximum local sur U.
4. Soit V une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ et G une fonction réelle de classe C^2 sur V telle que $\Delta G \geqslant 0$ sur V. On suppose que l'ensemble $K = \{(x, y) \in V;\ G(x, y) \geqslant 0\}$ est compact. En appliquant la question précédente à l'ensemble $U = \{(x, y) \in V;\ G(x, y) > 0\}$ et à une fonction G_ε définie sur V par $G_\varepsilon(x, y) = G(x, y) + \varepsilon(x^2 + y^2)$, montrer que $G \leqslant 0$ sur V.

C. Démonstration de l'inégalité (*)

5. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $K_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0,\ e^{v(x,y)}|\tilde{F}(x, y)| \geqslant e^\varepsilon\}$. Soit $(x_\ell, y_\ell)_{\ell \geqslant 1}$ une suite d'éléments de K_ε convergeant vers $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Prouver que $x_0 > 0$, puis que $(x_0, y_0) \in K_\varepsilon$. Vérifier que K_ε est borné et déduire de 4 que $u + v - \varepsilon \leqslant 0$ sur W.
6. Déduire de 5 que $u + v \leqslant 0$ sur W et que, pour $x > 0$, on a $-x + v(x, 0) \leqslant 0$. Conclure que $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k} \leqslant 1$ et en déduire l'inégalité $(*)$.