Similitudes dans un exemple de système dynamique. Interprétation et application probabilistes

Samy Abbes — UFR de mathématiques

Université Paris Diderot

14 novembre 2012

Plan de cet exposé

Définitions générales

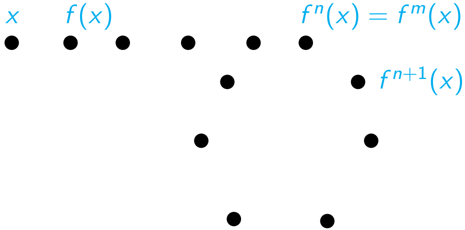
Soit X un ensemble et $f : X \to X$ une application.

- **L'orbite** d'un point $x \in X$ est l'ensemble

$$O(x) = \{x, f(x), f \circ f(x), \ldots, f^n(x), \ldots\} = \{f^n(x) \mid n \geq 0\}.$$

  On s'intéresse au *comportement asymptotique* de l'action des itérées de f sur un point x de départ.

- On dit que x a une **orbite périodique** s'il existe deux entiers $n \neq m$ tels que $f^n(x) = f^m(x)$.



Rappel : l'écriture décimale des nombres

Définition

On dit que $x \in [0, 1[$ admet l'écriture décimale $x = 0, a_1\, a_2\, a_3 \cdots$ si $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ et

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}\,.$$

Définition

On dit que $x \in [0,1[$ admet l'écriture décimale $x = 0, a_1\, a_2\, a_3 \cdots$ si $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ et

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}\,.$$

Exemple

$$x = 0,011 \qquad\qquad x = \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$$

$$x = 0,09999\cdots \qquad\qquad x = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{9}{10^i} = \frac{1}{10} = 0,1$$

Dans le deuxième exemple, x admet les *deux* écritures décimales $x = 0,0999\cdots$ et $x = 0,1$.

Rappel : l'écriture décimale des nombres

Définition

On dit que $x \in [0, 1[$ admet l'écriture décimale $x = 0, a_1\, a_2\, a_3 \cdots$ si $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ et

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{10^i} .$$

Théorème

Tout nombre $x \in [0, 1[$ admet une unique écriture décimale $x = 0, a_1\, a_2\, a_3 \cdots$ avec la propriété que les a_i ne sont pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang.

Quitte à prendre les "bonnes" écritures décimales, on a donc **bijection** entre les réels de $[0, 1[$ et les suites infinies de chiffres entre 0 et 9.

Une transformation de $X = [0,1[$

On considère l'ensemble $X = [0,1[$ et la transformation $f : X \to X$ définie par

$$f(x) = 10x \mod 1\,.$$

On considère l'ensemble $X = [0,1[$ et la transformation $f : X \to X$ définie par

$$f(x) = 10x \mod 1\,.$$

Exemples

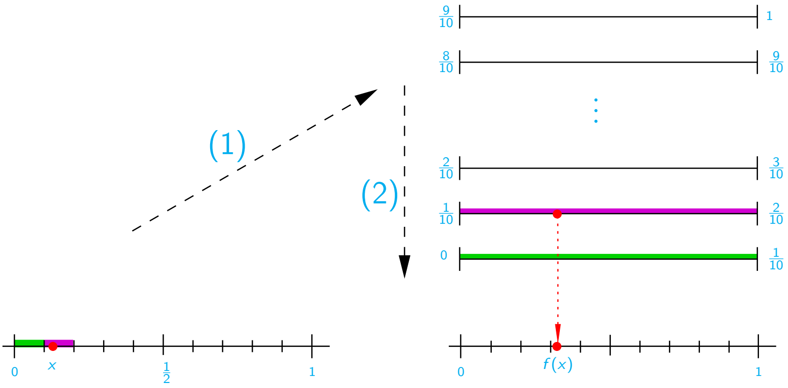
$$x = \frac{1}{5} \xrightarrow{f} 2 \mod 1 = 0 \mod 1 \xrightarrow{f} 0 \mod 1$$

$$x = \frac{1}{11} \xrightarrow{f} \frac{10}{11} \xrightarrow{f} \frac{100}{11} \mod 1 = \frac{9 \times 11 + 1}{11} \mod 1 = \frac{1}{11} \mod 1 = x$$

On considère l'ensemble $X = [0,1[$ et la transformation $f : X \to X$ définie par

$$f(x) = 10x \mod 1\,.$$

Représentation graphique : (1) dilatation (2) repliage



Proposition

Un point $x \in [0, 1[$ a une orbite périodique si et seulement si x est rationnel.

Proposition

Un point $x \in [0, 1[$ a une orbite périodique si et seulement si x est rationnel.

Preuve de : x rationnel $\quad\Rightarrow\quad O(x)$ périodique.

Lemme

Si $x = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}$ alors $f(x) = \frac{p'}{q}$ avec $p' = 10p \mod q$.

Conséquence : si x est rationnel, les $f^n(x)$ sont parmi un nombre fini de valeurs $(0, \frac{1}{q}, \dots, \frac{q-1}{q})$, il existera donc deux entiers $n \neq m$ tels que $f^n(x) = f^m(x)$. L'orbite de x est **périodique**.

Proposition

Un point $x \in [0,1[$ a une orbite périodique si et seulement si x est rationnel.

Preuve de : $O(x)$ périodique $\Rightarrow$ x rationnel.

Si $O(x)$ est périodique il existe $n \neq m$ tels que $10^n x = 10^m x \mod 1$, donc pour un certain $k \in \mathbb{Z}$:

$$10^n x = 10^m x + k$$

d'ou : $x = \frac{k}{10^n - 10^m}$ car $n \neq m$, et donc x est rationnel. $\square$

La transformation f et l'écriture décimale

Exemple

$$x = 0,1234 \xrightarrow{f} 1,234 \mod 1 = 0,234 \mod 1.$$

La transformation f **décale** d'un rang vers la gauche l'écriture décimale.
La transformation f^n **décale** de n rangs vers la gauche l'écriture décimale.

$$x = 0, a_1\, a_2\, a_3 \cdots \quad \xrightarrow{f} \quad f(x) = 0, a_2\, a_3\, a_4 \cdots$$

$$\begin{tikzcd}
{[0,1[} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & {[0,1[} \arrow[d] \\
\{0,1,\ldots,9\}^{\mathbb{N}} \arrow[r, "\text{décalage}"'] & \{0,1,\ldots,9\}^{\mathbb{N}}
\end{tikzcd}$$

Théorème

Il existe $x \in [0,1[$ tel que l'orbite $O(x)$ est **partout dense** dans $[0,1[$.

C'est-à-dire : pour tout point $y \in [0,1[$ il existe des points $x' \in O(x)$ arbitrairement proches de y.

Distance entre deux points de $[0,1[$

Si x et y ont leurs écritures décimales qui **commencent** par les mêmes k chiffres $a_1\, a_2 \cdots a_k$ alors $|x-y| < 10^{-k}$.

Exemple : pour $x = 0,127$ et $y = 0,124$ on a $|x-y| < \dfrac{1}{100}$.

Théorème

Il existe $x \in [0,1[$ tel que l'orbite $O(x)$ est **partout dense** dans $[0,1[$.

Preuve du théorème : On considère le nombre x avec l'écriture décimale suivante :

$$x = 0,1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \quad 10\,11\,12 \cdots 99 \quad 100\,101 \cdots 999 \quad \cdots$$

L'écriture décimale de x contient tous les nombres entiers. Alors *ce point x a une orbite partout dense dans $[0,1[$.*

Soit $y \in [0,1[$ quelconque, il suffit de montrer que pour tout entier $k \geq 0$ il existe un élément $f^n(x)$ tel que $|y - f^n(x)| < 10^{-k}$. On considère les k premiers chiffres de l'écriture de y : $y = 0, b_1\, b_2 \cdots b_k \cdots$. En décalant l'écriture de x suffisemment, on trouve que $f^n(x)$ commence par la même écriture $0, b_1\, b_2 \cdots b_k$ et donc $|y - f^n(x)| < 10^{-k}$. □

On va donner une interprétation probabiliste des éléments précédents avec la correspondance suivante :

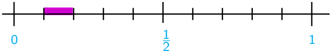
$$
\begin{aligned}
X = [0,1[&\leftrightarrow \text{l'espace des issues possibles} \\
x \in X &\leftrightarrow \text{une issue aléatoire particulière} \\
x = 0, a_1\, a_2\, a_3 \cdots &\leftrightarrow \text{un tirage répété de chiffres } a_i \text{ parmi } \{0, 1, \ldots, 9\}
\end{aligned}
$$

On aboutit à identifier $X = [0,1[$ avec un modèle de tirage aléatoire d'une infinité de chiffres parmi $\{0, 1, \ldots, 9\}$.

Question : *Cette identification correspond-elle à notre intuition ?*

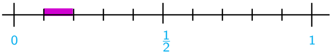
Un *événement* est un ensemble d'issues : par exemple l'événement $a_1 = 1$ correspond à $\{x \in [0,1[\mid a_1 = 1\}$. C'est un *intervalle*, on le note $\{a_1 = 1\}$. Sa probabilité est donné par la *longueur* de cet intervalle :

$$\mathbf{P}(a_1 = 1) = \ell\left[\frac{1}{10}, \frac{2}{10}\right[= \frac{2}{10} - \frac{1}{10} = \frac{1}{10}\,.$$



Un *événement* est un ensemble d'issues : par exemple l'événement $a_1 = 1$ correspond à $\{x \in [0,1[\mid a_1 = 1\}$. C'est un *intervalle*, on le note $\{a_1 = 1\}$. Sa probabilité est donné par la *longueur* de cet intervalle :

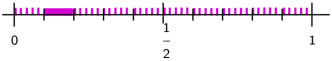
$$\mathbf{P}(a_1 = 1) = \ell\Big[\frac{1}{10}, \frac{2}{10}\Big[= \frac{2}{10} - \frac{1}{10} = \frac{1}{10}\,.$$



Définition

Si un événement est donné comme un intervalle ou comme une union finie d'intervalles disjoints, sa *probabilité* est définie comme la somme des longueurs des intervalles qui le composent.

$$\mathbf{P}(a_1 = 1 \text{ ou } a_2 \text{ est pair}) = \frac{55}{100}$$



Pour $b_1 \in \{0, \ldots, 9\}$ on a $\mathbf{P}(a_1 = b_1) = \frac{b_1+1}{10} - \frac{b_1}{10} = \frac{1}{10}$.

Pour le tirage de a_1, les 10 chiffres $0, \ldots, 9$ sont *équiprobables.*

Tirages indépendants

Plus généralement, soit $b_1, \ldots, b_k$ une suite de k chiffres entre 0 et 9. Quelle est la probabilité de tirer $a_1 = b_1, \ldots, a_k = b_k$? L'événement correspondant est l'intervalle $[y, y + \frac{1}{10^k}[$ avec $y = 0, b_1\, b_2\, \ldots\, b_k$ donc

$$\mathbf{P}(a_1 = b_1, \ldots, a_k = b_k) = \frac{1}{10^k}\,.$$

Tirages indépendants

Soit $k > 0$ un rang donné, et soit $b_k \in \{0, \ldots, 9\}$ un chiffre donné. Quelle est la probabilité de tirer $a_k = b_k$?

L'événement $\{a_k = b_k\}$ est une union finie d'intervalles :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(a_k = b_k) &= \sum_{b_1,\ldots,b_{k-1}} \mathbf{P}(a_1 = b_1, \ldots, a_{k-1} = b_{k-1}, a_k = b_k) \\ &= 10^{k-1} \times \frac{1}{10^k} = \frac{1}{10}\,.\end{aligned}$$

Tirages indépendants

On obtient :

- $\mathbf{P}(a_1 = b_1, \ldots, a_k = b_k) = \frac{1}{10^k}$;
- $\mathbf{P}(a_i = b_i) = \frac{1}{10}$ pour tout entier $i > 0$.

Conclusion :

Les tirages des différents chiffres a_i sont *indépendants* :

$$\mathbf{P}(a_1 = b_1, \ldots, a_k = b_k) = \mathbf{P}(a_1 = b_1) \times \cdots \times \mathbf{P}(a_k = b_k) \,.$$

Invariance des tirages

L'écriture décimale de $x \in [0,1[$, avec la probabilité mesurée par la longueur des intervalles donne un modèle de tirage de chiffres indépendants et équiprobables de chiffres parmi $\{0,\ldots,9\}$.

Invariance des tirages

L'écriture décimale de $x \in [0,1[$, avec la probabilité mesurée par la longueur des intervalles donne un modèle de tirage de chiffres indépendants et équiprobables de chiffres parmi $\{0,\ldots,9\}$.

L'écriture décimale de $f(x)$, avec la même probabilité, donne le **même modèle** (*rappel :* f agit par décalage sur les écritures décimales).

En effet : si $f(x) = 0, x'_1 x'_2 \ldots$ on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(x'_1 = b_1, \ldots, x'_k = b_k) &= \mathbf{P}(x_2 = b_1, \ldots, x_{k+1} = b_k)\\ &= \frac{1}{10^k}\,.\end{aligned}$$

Invariance des tirages

Conclusion

Pour tout entier $n \geq 0$, l'écriture décimale de $f^n(x)$, avec la même probabilité, donne le toujours **même modèle** probabiliste.

Interprétation probabiliste

Du point de vue probabiliste, il n'y a pas de différence entre :

- Tirer k fois le dé à 10 faces ;
- Tirer k fois le dé à 10 faces après n premiers lancers.

Pour simplifier les notations, on va maintenant considérer l'écriture des nombres en base 2 au lieu de l'écriture décimale :

$$0, a_1\, a_2\, a_3 \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} \quad \text{avec } a_i \in \{0, 1\}.$$

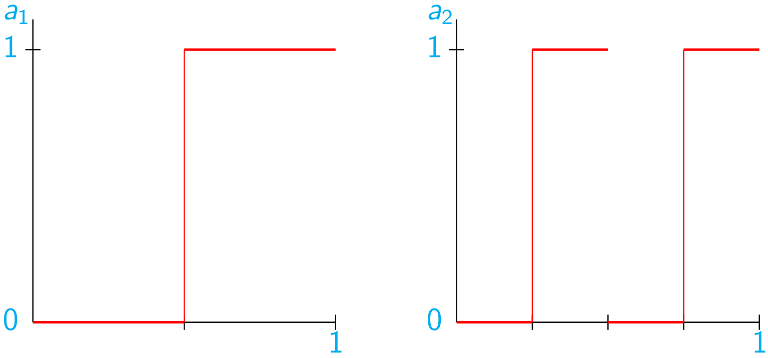
Les *chiffres* $a_i \in \{0, 1\}$ sont appelés *digits.*

Pour tout entier $i > 0$ on considère le i^{e} digit $a_i(x)$ comme une *fonction*

$$a_i : [0, 1[\to \{0, 1\}\,.$$

En langage probabiliste, a_i est appelée une *variable aléatoire*.

Graphes des fonctions a_1 et a_2 :



Question : comment se répartissent les valeurs des a_i, pour $i \to \infty$?

Intuitivement : les sommes normalisées $\frac{1}{n}\sum_{i=1} a_i(x)$ devraient "en général" converger vers la valeur moyenne "typique" $\frac{1}{2}$ puisqu'il y a "autant de 0 que de 1" si x est choisi au hasard.

Présence d'exceptions :

$$x = \frac{1}{2} = 0,1 \qquad\qquad \to 0$$
$$x = \frac{6}{7} = 0,110\,110\cdots \qquad\qquad \to \frac{2}{3}$$

- Nécessité d'utiliser un langage probabiliste pour "négliger" ces exceptions.

Théorème (loi faible des grands nombres)

Pour tout $\epsilon > 0$:

$$\mathbf{P}\Big(\big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i(x) - \frac{1}{2}\big| > \epsilon\Big) \longrightarrow_{n\to\infty} 0.$$

Loi faible des grands nombres : énoncé

Théorème (loi faible des grands nombres)

Pour tout $\epsilon > 0$:

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i(x) - \frac{1}{2}\right| > \epsilon\right) \longrightarrow_{n\to\infty} 0.$$

Remarque. Si $h : [0,1[\to \mathbb{R}$ est une fonction en escalier, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ cet ensemble : $\left\{x \in [0,1[\mid h(x) > \alpha\right\}$ est une union finie d'intervalles.

Conséquence :

La probabilité

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i(x) - \frac{1}{2}\right| > \epsilon\right)$$

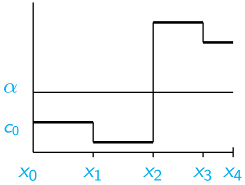
est bien définie.

Inégalité de Tchebitychev

Si $h : [0,1[\to \mathbb{R}$ est une fonction en escalier positive, alors pour tout $\alpha > 0$ on a :

$$\mathbf{P}\big(f(x) > \alpha\big) < \frac{1}{\alpha}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Démonstration.



$$\mathbf{P}(f(x) > \alpha) = \sum_{j\,:\,c_j>\alpha} (x_{j+1} - x_j)$$

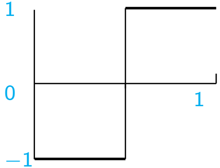
$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_j c_j(x_{j+1} - x_j)$$

$$> \alpha \sum_{j\,:\,c_j>\alpha} (x_{j+1} - x_j). \quad \square$$

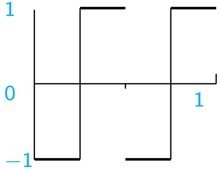
On pose $r_i(x) = 2a_i(x) - 1$.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i(x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} r_i(x) \qquad s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i(x)\,.$$

Graphe de r_1



Graphe de r_2



$$\int_0^1 r_i(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_0^1 s_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_0^1 r_i(x)r_j(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad i \neq j$$

$$\int_0^1 s_n^2(x)\,\mathrm{d}x = n\,.$$

De $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i(x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2n} s_n$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\Big(\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i(x) - \frac{1}{2}\Big| > \epsilon\Big) &= \mathbf{P}\Big(\frac{s_n^2}{4n^2} > \epsilon^2\Big) \\
&= \mathbf{P}\big(s_n^2 > 4n^2\epsilon^2\big) \quad \text{on prend } \alpha = 4n^2\epsilon^2 \\
&< \frac{1}{4n^2\epsilon^2} \underbrace{\int_0^1 s_n^2(x)\,\mathrm{d}x}_{=n} \quad \text{(inég. de Tchebytchev)} \\
&= \frac{1}{4n\epsilon^2} \longrightarrow_{n\to\infty} 0. \quad \square
\end{aligned}$$

Complément : loi forte des grands nombres

- **Loi faible :** pour $\epsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i(x) - \frac{1}{2}\right| > \epsilon\right) = 0$.
- **Interprétation :** pour tout $\epsilon > 0$, la *proportion* des x dont le comportement est "anormal à ϵ près au rang n" tend vers 0 quand $n \to \infty$.
- La loi faible ne dit rien sur le *comportement individuel* des sommes $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i(x)$ à x fixé.

Complément : loi forte des grands nombres

- **Loi faible :** pour $\epsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i(x) - \frac{1}{2}\right| > \epsilon\right) = 0$.
- **Interprétation :** pour tout $\epsilon > 0$, la *proportion* des x dont le comportement est "anormal à ϵ près au rang n" tend vers 0 quand $n \to \infty$.
- La loi faible ne dit rien sur le *comportement individuel* des sommes $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i(x)$ à x fixé.

Loi forte des grands nombres

- Un nombre $x \in [0,1[$ est dit *normal* si $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_i(x) \to_{n\to\infty} \frac{1}{2}$.
- Un ensemble $N \subset [0,1[$ est dit *négligeable* si pour tout $\epsilon > 0$, il existe une union finie U d'intervalles telle que $N \subset U$ et $\mathbf{P}(U) < \epsilon$ (autrement dit : $\mathbf{P}(N) = 0$).
- **Loi forte des grands nombres (E. Borel, 1909) :** les nombres de $[0,1[$ qui *ne sont pas normaux* forment un ensemble négligeable.

Bibliographie

- **P. Billingsley**. *Probability and Measure, 3rd edition* (chap. 1). John Wiley, 1995.