

# Rapport sur la thèse de Malika KHAROUF

Djalil CHAFAÏ  
LAMA UMR CNRS 8050  
Université Paris-Est Marne-la-Vallée

Mai 2010

On a coutume d'enraciner la théorie des matrices aléatoires dans les travaux des années 1920-1930 des statisticiens Fisher, Wishart, puis Hotteling, sur les matrices de covariances empiriques de vecteurs gaussiens. Depuis lors, ces travaux pionniers ont été poursuivis sans discontinuité par une succession d'auteurs d'horizons très différents. Dès les années 1950-1960, le concept de matrice aléatoire est repris et développé avec vigueur par les physiciens nucléaires comme Wigner, Dyson, Ginibre, et Mehta. La théorie a poursuivi ses avancées dans les années 1960-1980, grâce aux travaux de Pastur, Silverstein, Girko, et Bai notamment. Depuis les années 1990, l'étude des matrices aléatoires a connu un développement sans précédent. Le corpus actuel est remarquable de part la richesse de ses connexions avec de nombreux domaines abstraits et concrets, comme par exemple les polynômes orthogonaux, l'analyse numérique, l'analyse fonctionnelle, la géométrie des corps convexes, la mécanique statistique, les probabilités libres, la théorie des nombres, l'analyse complexe, la combinatoire, la topologie, et la statistique de grande dimension. Cette richesse s'appuie sur le caractère désormais central en mathématiques de la théorie des probabilités et de l'algèbre linéaire.

L'étude de la loi du spectre aux deux premiers ordres en grande dimension constitue un thème important de la théorie des matrices aléatoires. La thèse de Malika Kharouf porte sur les fluctuations de fonctionnelles spectrales de grandes matrices aléatoires et leurs applications aux communication numériques. Elle s'inscrit dans un courant de recherche relativement récent centré sur des modèles de matrices aléatoires en théorie de l'information, qui puise sa source notamment dans les travaux concrets de Foschini, Telatar, et Taricco des années 1990-2000. Sur le plan abstrait, la thèse met en œuvre avec conviction des outils développés par Girko, et exploités par Hachem, Loubaton, et Najim, comme par exemple la méthode *resolvent formula and martingale* (REFORM).

Le manuscrit qui m'a été communiqué comporte cent-trente-trois pages, et se compose de quatre chapitres, d'un appendice technique, ainsi que d'une bibliographie constituée de quatre-vingt-sept références. L'introduction propose notamment un micro-panorama des techniques, des motivations, et des résultats connus de la littérature. Bien qu'elle soit améliorable, cette introduction permet de mieux situer les travaux de Malika Kharouf dans leur contexte scientifique, et rempli donc son rôle essentiel.

La première partie de l'introduction rappelle brièvement certains résultats sur la convergence<sup>1</sup> et la fluctuation de fonctionnelles globales du spectre de modèles her-

---

1. Au passage, la référence [13] me fait plaisir mais est peu appropriée au contexte car elle traite du spectre de matrices non hermitiennes, et la meilleure référence récente sur ce sujet est Tao-Vu.



mitiens ou hermitisés, incluant des modèles avec profils étudiés à l'origine par Girko puis par Hachem, Loubaton, Najim, des modèles information+bruit étudiés par Dozier et Silverstein, et Hachem, Loubaton, Najim, et des résultats de fluctuation de Khorunzhy, Khoruzhenko et Pastur, Bai et Silverstein, Girko, et de Hachem, Loubaton, Najim, entre autres, sur les matrices de Gram et Gram-Kronecker, et sur la fonctionnelle log det. Cette première partie de l'introduction se termine par un paragraphe sur les fluctuations de formes quadratiques, en liaison avec le comportement asymptotique des vecteurs propres. L'étude de l'universalité des vecteurs propres est un sujet difficile qui recèle encore aujourd'hui de nombreux mystères, malgré des avancées notables.

La seconde partie de l'introduction fournit une description rapide des concepts et modèles de matrices aléatoires en théorie des communications numériques sans fils et fait le lien avec la première partie. Sont abordés le multiple input multiple output (MIMO) à évanouissement rapide ou lent, l'information mutuelle, la capacité, les modèles de Rayleigh, de Kronecker, de Rice, le rapport signal sur interférence+bruit (RSIB) du code division multiple access (CDMA), et enfin le taux d'erreur (BER) et la probabilité de dépassement. L'idée de base du MIMO consiste à multiplier les émetteurs et récepteurs de manière à mieux tirer partie du canal bruité<sup>2</sup>. L'information mutuelle d'un tel système est tout naturellement décrite par une fonctionnelle log det. La capacité correspond alors à un maximum sous contrainte de cette fonctionnelle. La prise en compte d'échos conduit aux modèles de Rayleigh, tandis que la prise en compte de corrélations entre les émetteurs ou les récepteurs conduit à des modèles de Kronecker. Les modèles de Rice correspondent à la situation simple de trajets directs et s'écrivent comme une matrice information+bruit. Le RSIB conduit à des formes quadratiques aléatoires. Telatar et Foschini, entre autres, font figure de pionniers en matière de modélisations matricielles aléatoires pour les communication sans fil. Leur approche permet d'affirmer que la capacité de systèmes MIMO idéalisés croît linéairement en fonction du nombre d'antennes. En pratique, le nombre d'antennes est bien souvent de l'ordre de quelques unités, tandis que la théorie considère des asymptotiques (théorème de Marchenko-Pastur par exemple, cependant, la forme asymptotique est vite atteinte).

La troisième partie de l'introduction souligne les contributions de la thèse aux problématiques abordées précédemment, et présente brièvement les trois autres chapitres : deux articles publiés dans IEEE IT, et un en préparation, tous en collaboration. L'introduction se termine par une liste de publications et de communications.

Le second chapitre – article écrit en collaboration avec Kammoun, Hachem, Najim et publié à IEEE IT<sup>3</sup> – concerne les fluctuations de formes quadratiques aléatoires de la forme<sup>4</sup>  $y^*(Y_K Y_K^* + \rho I_K)^{-1} y$  où  $Y_K$  est une matrice aléatoire  $N \times K$  centrée avec profil de variance et  $y$  un vecteur aléatoire indépendant de  $Y_K$ . Les hypothèses précises figurent page 25. Les auteurs établissent un théorème central limite en utilisant la méthode REFORM de Girko et un critère de type Lyapunov via une inégalité de Burkholder. Le résultat principal figure page 32. Le caractère aléatoire et indépendant de  $y$  rend la fluctuation de la forme quadratique peu sensible à la structure de  $Y_K$ . Bien que les formules et calculs soient parfois lourds et peu esthétiques, ils conduisent à des approximations utilisables (pages 44–48). Ce premier travail met en œuvre des

2. Cette technologie, brevetée depuis les années 1980, puis améliorée peu à peu, a été mise en œuvre par exemple sur les Freebox en France pour le WiFi IEEE 802.11 dans les années 2000.

3. Page 19 de la thèse, la première référence bibliographique est sans doute [39] et non pas [42].

4. Le signe “ $-1$ ” manque dans l'équation (1.10) page 18 mais figure bien dans (2.2) page 24.



techniques sophistiquées déjà explorées par les deux coauteurs.

Le troisième chapitre – article écrit en collaboration avec Kammoun, Hachem, Najim, et publié à IEEE IT – traite du taux d'erreur (BER) et de la probabilité de dépassement, à la fois sur le plan analytique et numérique. Il s'agit d'un cas typique de modèle de grandeur positive à fluctuation asymptotique gaussienne. Lorsque la variance est trop grande par rapport à la moyenne, le modèle asymptotique permet des valeurs négatives, ce qui n'est pas commode. L'approche correctrice utilisée par les auteurs consiste à calculer trois moments asymptotiques pour remplacer la gaussienne par une loi de type gamma. Le calcul de ces moments repose sur la structure gaussienne du modèle, et fait usage d'intégrations par parties et d'inégalités fonctionnelles de type Poincaré (appliquées à un polynôme matriciel de faible degré), développées dans l'article numéroté [35]. Les calculs sont lourds (57–61) mais le modèle l'impose peut-être. Le résultat se trouve page 53. Le chapitre se termine par des simulations (62–67). L'intégration par parties et l'inégalité de Poincaré sont disponibles au delà des gaussiennes, et on peut donc se demander légitimement si l'approche subsiste au delà ou pas.

Le quatrième et dernier chapitre constitue un travail en cours, en collaboration avec Hachem, Najim, et Silverstein. Il concerne l'étude des fluctuations d'une fonctionnelle log det pour un modèle particulier, qui représente par exemple l'information mutuelle d'un canal de Rice<sup>5</sup>. À nouveau, les auteurs mettent en œuvre la méthode REFORM de Girko et un théorème central limite pour les martingales (Lyapunov). L'étude du comportement du biais semble être la dernière brique en cours de réalisation.

À la lecture de la thèse, on peut se demander si l'étude des valeurs propres extrêmes et des vecteurs propres peut apporter quelque chose à ces modèles issus du concret.

Bien que je ne sois pas un expert en communications sans fil, je reste admiratif de l'ampleur du travail mené sur ces modèles matriciels épineux issus de ces applications. Malika Kharouf a su mettre en œuvre avec succès, en compagnie de ses coauteurs, un certain nombre de techniques sophistiquées comme la REFORM de Girko. Parallèlement, elle s'est attachée à revenir aux situations plus concrètes et à tester ses résultats. Pour toutes ces raisons, il me semble que cette thèse mérite clairement d'être soutenue.

Djalil Chafaï, mai 2010  
LAMA UMR CNRS 8050  
Université Paris-Est Marne-la-Vallée

---

5. Elle peut être vue comme un potentiel logarithmique. Elle apparaît dans les travaux de Szegő.





## Rapport sur le mémoire de thèse de doctorat de Mademoiselle Malika KHAROUF

intitulé:

Fluctuations de fonctionnelles spectrales de grandes matrices aléatoires et  
applications aux communications numériques

Ce travail de thèse s'inscrit dans le domaine de la théorie des grandes matrices aléatoires. Il a pour objectifs l'étude et le développement d'outils performants pour les systèmes de télécommunications sans fil et en particulier les systèmes MIMO et ceux utilisant les techniques d'accès multiples CDMA. En effet la technologie MIMO tire profit de la diversité spatiale. La technologie CDMA se base sur un multiplexage par code en plus des possibilités offertes par les multiplexages temporel et spatial. Ces 2 techniques jouent un rôle important dans l'amélioration du rapport Signal sur bruit plus interférences et donc sur la qualité des communications.

Le document est partagé en 4 chapitres auxquels s'ajoutent une annexe et une bibliographie. A part le premier chapitre qui représente l'introduction du document et qui est rédigé en français, les autres le sont en anglais.

Dans le chapitre introductif, l'auteur rappelle d'abord les principaux résultats obtenus pour le premier et le second ordre de fonctionnelles spectrales pour quelques modèles de matrices aléatoires. Ensuite une présentation du contexte applicatif est donnée avec la précision des principaux outils qui seront utilisés par la suite comme l'information mutuelle pour un système multi-antennes, les modèles de Rayleigh et de Rice, le rapport signal à interférence plus bruit et le taux d'erreur et la probabilité de dépassement. A la fin de ce chapitre, sont résumées les différentes contributions de l'auteur suivies par ses publications.

Le chapitre 2 examine les propriétés mathématiques d'une fonction fondamentale dans l'analyse des performances pour les signaux multidimensionnels de large dimension: il s'agit du minimum de l'erreur quadratique moyenne. L'auteur commence par rappeler des résultats concernant le comportement asymptotique des formes quadratiques au premier ordre dans le cas général et dans le cas séparable. Ce dernier est très intéressant au niveau des applications. Ensuite la candidate présente sa contribution qui étudie les fluctuations des formes quadratiques. Son approche est





Laboratoire de Recherche en Informatique et Télécommunications  
Faculté des Sciences de Rabat, Université Mohammed V-Agdal  
<http://www.fsr.ac.ma/GSCM/>

basée sur la décomposition de la forme quadratique en une somme de martingales puis l'utilisation du théorème de la limite centrale pour les martingales. La dernière partie de ce chapitre est consacrée à l'aspect applicatif où à travers des simulations les résultats théoriques sont validés.

Dans le chapitre 3, l'auteur étudie la distribution statistique du rapport signal à interférences plus bruit pour le cas d'un récepteur basé sur le principe de la minimisation de la moyenne de l'erreur quadratique des communications sans fils avec entrées et sorties multiples. A la fin du chapitre, des simulations dans le cas d'une liaison montante où le récepteur est une station de base équipée de plusieurs antennes valident les résultats théoriques obtenus.

Le dernier chapitre est consacré aux matrices GRAM non centrées et surtout à l'élaboration du théorème de la limite centrale pour les statistiques de l'information. L'auteur rappelle tout d'abord les résultats obtenus dans la littérature. Plusieurs résultats théoriques sont dérivés et démontrés.

La thèse de Malika Kharouf a donné lieu à plusieurs résultats originaux qui ont fait l'objet de publications dans des revues et conférences très prestigieuses. A l'exception du style très compact et de l'absence de quelques introductions et conclusions, le document est très bien rédigé.

Au terme de ces conclusions et des différents aspects de la thèse (publications, qualité scientifique et rédaction de rapport de thèse), nous concluons que le mémoire de thèse de doctorat de Malika Kharouf, mérite d'être soutenu devant un jury pour l'obtention du grade de docteur en sciences.

Fait à Rabat, le 25 mai 2010  
Prof. Driss ABOUTAJDINE



Philippe Loubaton  
Université Paris-Est / Marne la Vallée  
Laboratoire d'Informatique Gaspard Monge, UMR CNRS 8049  
5 Bd. Descartes, Champs sur Marne, 77454 Marne la Vallée Cedex 2  
email loubaton@univ-mlv.fr.

Rapport sur le mémoire intitulé,  
"Fluctuations de fonctionnelles spectrales de grandes matrices aléatoires et  
applications aux communications numériques",  
présenté par Malika Kharouf en vue de l'obtention du doctorat de l'Université  
Hassan II Ain Chock et de Telecom Paris Tech.

Le présent manuscrit a pour but d'étudier quelques problèmes liés aux fluctuations de certaines quantités dépendant de grandes matrices aléatoires apparaissant dans le domaine des communications numériques. Le document est composé de 4 chapitres, le premier étant à caractère introductif.

Le travail proprement dit débute au chapitre 2 dans lequel M. Kharouf s'intéresse au rapport signal à interférences plus bruit en sortie d'un récepteur MMSE apparaissant dans le contexte d'un modèle de transmission suffisamment général pour couvrir la plupart des contextes applicatifs du domaine des communications numériques (systèmes multi-antennes, systèmes MC-CDMA). M. Kharouf considère plus précisément une matrice de canal dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes centrées de variances différentes, le champ de variance associé étant non nécessairement séparable. Techniquement, le SINR est défini comme la valeur prise par une forme quadratique associée à l'inverse de la résolvante de la matrice de Gram du canal sur un vecteur indépendant du canal, et dont les entrées sont indépendantes de variances différentes. Le comportement au premier ordre du SINR est connu puisqu'il a été montré qu'il converge vers une quantité déterministe que l'on est en mesure d'évaluer. M. Kharouf s'intéresse aux fluctuations du SINR autour de cette limite. A noter que la littérature n'a abordé ce problème que dans le cas où toutes les variables aléatoires mises en jeu sont indépendantes et identiquement distribuées. L'approche utilisée par M. Kharouf, déjà mise en oeuvre dans d'autres contextes mettant en jeu des matrices aléatoires mais pas dans celui de l'étude du SINR, consiste à écrire le SINR comme la somme d'incrémentes de martingales, et de vérifier les conditions du théorème de la limite centrale correspondant. Si la condition de Liapunov se vérifie relativement aisément, la convergence en probabilité de la somme des variances conditionnelles des incréments de martingale, et l'identification de la limite correspondante, nécessite un travail important nécessitant une excellente expertise des matrices aléatoires mises en jeu ici. Le résultat final montre que le SINR converge à la vitesse  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  ( $N$  étant l'une des dimensions de la matrice du canal) et la variance asymptotique est la somme de 2 termes positifs dont l'un s'annule si le canal est construit à partir de variables aléatoires de module constant. La forme du résultat dans le cas d'un champ de variance séparable est ensuite mise en évidence. On retrouve alors dans l'expression de la variance asymptotique des termes apparaissant dans d'autres contextes. Le chapitre se termine par quelques simulations numériques montrant la pertinence des résultats obtenus en termes applicatifs. Les résultats de

ce chapitre ont fait l'objet d'un article qui est paru dans la revue "IEEE Transactions on Information Theory".

Le chapitre 3 s'intéresse toujours au SINR en sortie d'un récepteur MMSE dans le cas d'un canal de transmission dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes de variances différentes. M. Kharouf considère cependant le cas où le champ de variance associé est séparable, et où les variables aléatoires sont gaussiennes complexes circulaires. L'évaluation de la loi limite du SINR permet d'approximer le taux d'erreur moyen associé à ce récepteur. Plutôt que d'utiliser une approximation gaussienne, elle étudie une approximation par une loi Gamma déjà proposée dans la littérature, mais dans un contexte différent, et qui permet d'évaluer le taux d'erreur de façon très élégante grâce à la fonction génératrice des moments de la loi du SINR. En pratique, il s'agit ici d'évaluer analytiquement les 3 premiers moments du SINR. Les 2 premiers ont été évalués dans le chapitre précédent, de sorte qu'il convient ici de calculer le troisième moment. M. Kharouf utilise ici pleinement le caractère gaussien des éléments du canal en utilisant une formule d'intégration par parties ainsi que l'inégalité de Nash-Poincaré, outils dont l'utilité dans le contexte gaussien avait été mis en évidence récemment par Pastur. Le résultat le plus étonnant du chapitre réside dans le fait que le troisième moment décroît à la vitesse  $\frac{1}{N^2}$  alors que l'on aurait pu s'attendre à un rythme  $\frac{1}{N^{3/2}}$ . Des simulations numériques montrent l'intérêt des résultats dans le cadre de l'évaluation des probabilités d'erreur. Ces résultats ont été publiés dans la revue "IEEE Transactions on Information Theory".

Le dernier chapitre s'intéresse à la loi limite de l'information mutuelle d'un canal multi-antenne corrélé de Rice. Il s'agit donc de démontrer un théorème de la limite centrale pour une fonctionnelle particulière des valeurs propres de la matrice de Gram d'une matrice aléatoire non centrée, dont les éléments sont indépendants, avec un champ de variance séparable. Il s'agit intrinsèquement d'un problème connu pour être plus difficile que l'étude du SINR. M. Kharouf montre d'abord que l'information mutuelle peut être mise sous la forme d'une somme d'incrémentes de martingale, et se propose d'utiliser de nouveau le théorème de la limite centrale correspondant. Si la condition de Liapunov se vérifie aisément, le reste des développements sont d'une grande complexité et nécessitent une très grande lucidité. M. Kharouf montre tout d'abord que les éléments individuels de la résolvante de la matrice de Gram du canal convergent vers ceux de son équivalent déterministe. Il s'agit d'un résultat nouveau qui repose en grande partie sur l'astucieux lemme 15. M. Kharouf établit la convergence en probabilité de la somme des variances conditionnelles des incréments de martingale grâce à des calculs assez proches de ceux ayant permis d'établir le lemme 15. Elle procède enfin à l'identification de la variance de l'information mutuelle, qui malgré son expression remarquablement nécessite un véritable travail d'orfèvre, et donne lieu à une série d'évaluations franchement peu évidentes.

En conclusion, le travail de M. Kharouf présente des résultats d'actualité, de haut niveau, dont les chapitres 2 et 3 ont été publiés dans une excellente revue. Le point culminant de la thèse est le chapitre 4 qui a nécessité la mise en oeuvre de preuves difficiles. M. Kharouf a démontré une maîtrise remarquable de diverses techniques du domaine des grandes matrices aléatoires, ainsi qu'une excellente compréhension de leurs applications aux communications numériques. J'autorise donc Malika Kharouf à soutenir son travail en vue de l'obtention du doctorat de l'Université Hassan II Ain Chock et de Telecom Paris Tech.

Philippe Loubaton, Professeur à l'Université Paris-Est / Marne la Vallée.