Candidature aux postes
de maître de conférences
Section : 26

Malika Kharouf

TABLE DES MATIÈRES

CURRICULUM VITAE

Malika Kharouf

Née le 17 décembre 1980
Nationalité marocaine

adresse personnelle :
100, boulevard de l'Hopital
75013 Paris

mail : `mkharouf@u-paris10.fr`
page perso : `http://mkharouf.sitego.fr`

Situation Professionnelle Actuelle

Post-doctorat en Théorie spectrale de grandes matrices aléatoires.

Laboratoire LIGM, Université Paris-Est Marne-La-Vallée.

Expériences Professionnelles et Titres Universitaires

Attachée Temporaire d'Enseignement et de Recherche, 2009-2011.

Département SEGMI et SPSE, Université Paris Ouest Nanterre La Défense.

Enseignante Vacataire, sept.- déc. 2008.

Département de Mathématiques et Informatique, Université Hassan II Casablanca, Maroc.

Doctorat en Mathématiques Appliquées, 2007-2010.

Fluctuations de fonctionnelles spectrales de grandes matrices aléatoires et applications aux communications numériques.

en cotutelle, TSI/LTCI, Télécom Paristech et DMI/LIAD, Université Hassan II, Casablanca. Sous la direction de Walid Hachem et Jamal Najim (Télécom Paristech) et Ahmed Elkharroubi (Univ. Hassan II), soutenue le 19 Juin 2010.

Diplome d'Etudes Supérieures Approfondies en Mathématiques Appliquées (Probabilités et Statistique), 2006
Université Hassan II, Casablanca, mention Bien (rang 1).
2004-2005 : Master 1, Probabilités et Statistique.
2005-2006 : Master 2, Probabilités et Statistique.
Sep-Déc. 2006 : Projet de recherche de fin d'étude. Thème : "Etude spectrale de quelques matrices aléatoires de Gram".

Licence de Mathématiques Appliquées (Probabilités et Statistique), 2004
Université Mohamed V, Rabat, Maroc, mention Bien (rang 1).
2000-2002 : DEUG Mathématiques/ Physique.
2002-2003 : $3^{\text{ème}}$ année Mathématiques.
2003-2004 : Licence Mathématiques, option : Probabilités et Statistique.

Distinctions

1. Prix de thèse de l'Université Hassan II, Casablanca, Maroc 2010.
2. Bourse de recherche de l'Agence Universitaire de la Francophonie, 2008/2009.

ACTIVITÉS D'ENSEIGNEMENTS

J'ai toujours été persuadée que la dualité enseignement-recherche est fondamentale pour un bon rendement d'une activité académique. L'enseignement doit en effet rester en évolution permanente tant que la recherche suit sont développement. Un futur Enseignant chercheur se doit en conséquent non seulement d'acquérir une solide formation supérieure, mais aussi de la nourrir continuellement par le biais de l'enseignement.

Ce point de vue justifie mon désir de rester en permanence au contact de l'enseignement comme le témoignent mes activités d'enseignement dont une partie a eu lieu déjà pendant mon cursus au Maroc.

Sep.-Déc. 2008 : Vacataire à l'Université Hassan II Casablanca

J'ai commencé à enseigner à partir de ma deuxième année de doctorat à l'université Hassan II Casablanca au Maroc. Je suis intervenue dans l'enseignement de l'analyse mathématique pour les étudiants de licence 1, semestre 1, filière SVT (Sciences de la Vie et de la Terre). La démarche qui a été productive, résumée dans le tableau ci-après, va de l'identification des difficultés des étudiants, à la proposition de démarches de leur résolution.

Difficultés des étudiants	Objectifs visés	Démarches adoptées	Constats généraux
Enseigner les mathématiques en français aux étudiants ayant le français comme 2^{eme} langue	Familiariser les étudiants avec le vocabulaire français	Passer suffisamment de temps avec des notions déjà vu au lycée	Satisfaction globale observée et attrait pour la langue française pour le scientifique
Problèmes d'hétérogénéités	Passer le message pour le plus grand nombre possible d'étudiants	Poursuivre la stimulation des bons étudiants tout en encourageant toute intervention positive de ceux en difficulté	La motivation d'un bon nombre d'étudiants au final

2009-2011 : ATER à l'Université Paris-Ouest Nanterre

Mes enseignements à l'université Paris 10 ont porté principalement sur la théorie de la statistique, le public étant, pour la plupart, des étudiants des sciences humaines. L'objectif visé était d'assurer que l'étudiant comprenne suffisamment la démarche statistique afin d'être à même de conduire de bonnes interprétations des observations expérimentales. Je résume l'essentiel de cette nouvelle expérience dans le tableau suivant :

Difficultés des étudiants	Objectifs visés	Démarches adoptées	Constats généraux
Difficulté d'apprendre sans comprendre : les psycho, socio, et aussi les SVT ont un attrait pour le concret	Rendre le plus clair possible les outils mathématiques	Faire le lien entre certains problèmes de la vie courante et leurs résolutions à l'aide d'outils mathématiques	Les étudiants sont plus attentionnés
Compréhension du problème statistique	Mise en équation du problème statistique	Décomposition du problème en sous problèmes : le procédé d'inférence se fait par **étapes**	Une fois les étapes respectées, les étudiants arrivent à résoudre les problèmes proposés

L'expérience de ces premiers contacts avec l'enseignement a été bénéfique pour tous (étudiants et moi comprise). Le défi à relever était celui d'enseigner les mathématiques à ceux qui ne s'y destinaient pas. L'effort qu'il a fallu consentir a été celui de développer la capacité de simplifier l'outil mathématiques tout en prenant garde de ne pas vider les notions abordées de leurs contenus mathématiques.

2011-2012 : Vacataire à l'Université Paris-Est Marne-La-Vallée

A l'université Paris-Est Marne La Vallée, j'interviens dans l'enseignement des mathématiques pour les étudiants de $3^{\text{ème}}$ année dans le cadre de la formation *Ingénieurs 2000*, option : "Eléctronique et Communications" ainsi qu'aux étudiants du Master1, mention "Electronique, télécommunication, géomatique".

Mon intervention, qui consiste en des travaux dirigés de probabilités et de statistique, avec pour objectif d'enseigner aux étudiants les outils mathématiques nécessaires pour répondre à des problèmes d'ingénierie. La théorie de l'estimation, les notions de vraisemblance, de tests d'hypothèses, de courbes ROC ainsi que la méthode des moindres carrés font l'objet, entre autres, des enseignements que j'assure à l'université Paris-Est.

Le tableau ci-après récapitule cette activité d'enseignement.

Année Universitaire	Public	Contenu
2011-2012 Université Paris-Est Marne-La-Vallée	Master 1 *Eléctronique et Communications* (14h)	Probabilités, Inférence statistique, Tests d'hypothèses, Régression linéaire Méthodes des moindres carrés
	$3^{\text{ème}}$ année *Ingénieurs 2000 (14h)*	Probabilités Théorie de l'estimation
2009-2011 Université Paris 10 Nanterre	L3 *Sciences humaines(96h)*	Tests d'hypothèses : tests de comparaison de moyennes, de proportions, tests Khi-carrés, d'homogénéité, d'independances..
	L2 *Sciences humaines (96h)*	Statistique Inférentielle : Théorie de l'échantillonnage, théorie de l'estimation..
	L1 Economie (72h)	Statistique descriptive univariée et bivariée Corrélation et Régression
	L1 *Sciences humaines (120h)*	Statistique descriptive
2008-2009 Université Hassan II Casablanca	L1 *SVT (48h)*	Analyse Mathématique : Dérivabilité, Continuité, Dévoleppements limités..

L : Licence et SVT : Sciences de la Vie et de la Terre.

Persuadée que l'enseignement fait partie intégrante de la bonne formation du chercheur, je suis prête à m'investir dans des enseignements bien plus variés de probabilités et de statistique, ainsi que tout autre domaine des mathématiques dont l'équipe à laquelle j'appartiendrais en verrait le besoin. L'illustration par la pratique nécessite la prise en main des outils comme Matlab, Scilab, Maple, Latex, Excel, qui font couramment l'objet des enseignements qui m'intéresseraient également.

ACTIVITÉS DE RECHERCHE

I Introduction

Les progrès significatifs qu'ont connu différentes technologies ces dernières décennies ont transformé l'analyse statistique univariée en celle multivariée. En effet, nous sommes aujourd'hui confrontés à l'analyse de données de très grandes dimensions issues de différents domaines comme, les télécommunications, la finance ou encore la génétique. La théorie des grandes matrices aléatoires, un champs de recherche de grande actualité, a démontré sa pertinence pour le développement d'outils probabilistes et analytiques permettant la mise en oeuvre de résultats asymptotiques répondant aux problèmes de grandes dimensions.

L'objectif de mes travaux de recherche est double : d'une part, contribuer au développement de techniques probabilistes/statistiques étudiant le spectre de grandes matrices aléatoires et d'autre part, promouvoir les applications de ces outils en les important essentiellement dans le domaine des communications numériques. Cet objectif, de nature interdisciplinaire, peut être décomposé en trois grands axes :

1. Etablissement de théorèmes limites pour des fonctionnelles spectrales de matrices aléatoires de grandes dimensions.
2. Développement d'estimateurs consistants de quelques statistiques, fonctionnelles de matrices aléatoires, quand le nombre de paramètres augmente au même rythme que le nombre d'observations.
3. Traitement statistique du signal numérique et étude de quelques indices de performances des systèmes de communications multi-antennes.

II Travaux réalisés

Le théorème central limite représente un ingredient crucial pour la compréhension du comportement asymptotique d'objets stochastiques. Malgré les nombreux travaux réalisés autour de la question de l'étude des fluctuations de fonctionnelles spectrales de matrices aléatoires (voir [1] et les réferences citées), il existe encore beaucoup de questions à explorer dans ce domaine.

Le comportement global du spectre de grandes matrices de covariance constitue le thème autour duquel se cristallisent mes premières contributions. Dans mon premier travail, je me suis intéressée à l'étude des fluctuations de formes quadratiques associées à la résolvente de matrices de covariance. Ce type de fonctionnelles spectrales a fait l'objet de très peu de travaux malgré son importance théorique et pratique.

Un second axe considéré comme très ambitieux, concerne l'établissement de théorèmes limites pour des modèles matriciels déformés (voir [2,3] pour des résultats de premier ordre). Dans cette direction, je me suis intéressée à l'établissement d'un théorème central limite pour la fonctionnelle spectrale *logdet* pour une matrice de Gram déformée.

Dans ces contributions, nous avons développé des résultats asymptotiques ayant un impact important aussi bien sur le plan théorique - établissement de théorèmes limites pour de nouveaux modèles matriciels- que pratique - compréhension du comportement asymptotique de quelques indices de performances pour les systèmes de transmission multi-antennes.

II.1 Fluctuations de formes quadratiques aléatoires

La distribution limite de formes quadratiques :

$$\beta_n = \sum_{i,j=1}^{N} A_{ij} X_i X_j,$$

dans le cas où les entrées du vecteur $\mathbf{X} = [X_1, \ldots, X_N]$ sont des variables aléatoires, constitue un ingrédient très important pour réussir le procédé d'inférence statistique asymptotique pour des processus linéaires de type : $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i Y_{t-i}$. Le but étant donc d'établir des théorèmes limites pour une grande classe de matrices $\mathbf{A} = (A_{ij})_{i,j}$ sous le moins possible de contraintes sur la loi des entrées du vecteur aléatoire $\mathbf{X}$ (voir [4,5,6]).

L'hypothèse que la matrice $\mathbf{A}$ peut être aléatoire est, à ma connaissance, très peu considérée dans la littérature [6]. Il semble intéressant d'étudier l'impact de la stochasticité de la matrice $\mathbf{A}$. Notre contribution pour cette question consiste à considérer la résolvente d'une matrice de covariance comme la matrice de base de la forme quadratique. Plus précisémment, nous considérons le modèle matriciel suivant :

$$\mathbf{A}_N = (\mathbf{\Sigma}\mathbf{\Sigma}^* - z\mathbf{I}_N)^{-1}, \quad z \in \mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C}, \Im(z) > 0\},$$

où $\mathbf{\Sigma}$ est une matrice rectangulaire $(N \times n)$, dont les entrées sont données par :

$$\Sigma_{ij} = \frac{\sigma_{ij}^n}{\sqrt{n}} X_{ij}^n, \quad 1 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq n.$$

Les X_{ij}^n sont des variables aléatoires i.i.d. centrées et réduites, et $(\sigma_{ij}^n)_{ij}$ est une famille de suites de réels positifs.

Pour mener à bien ce projet, il nous a été nécessaire d'approfondir nos connaissances sur la théorie des équivalents déterministes (dite encore la théorie de la G-estimation, G pour Generalized) mise en oeuvre par Girko [7,8]. Cette théorie consiste à approximer la transformée de Stieltjes de la mesure spectrale associée aux valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}$, qui est bien une quantité aléatoire, par des équivalents déterministes, sous le régime asymptotique quand les dimensions de la matrice N et n tendent conjointement vers l'infini.

Pour établir un théorème central limite (TCL), nous avons étudié séparemment deux quantités :
Le biais : qui mesure l'erreur commise en remplaçant $\mathbb{E}\beta_n(-\rho)$ par un aproximant deterministe $\bar{\beta}_n(-\rho)$ de $\beta_n(-\rho)$.
Le terme fluctuant : qui étudie les fluctuations de $\beta_n(-\rho)$ autour de son espérance. L'approche adoptée ici s'est inspirée de la méthode REFORM (REsolvent FOrmula and Martingales) introduite par Girko [7] : en 1975, Girko a établi un théorème central limite pour la trace de la résolvente des matrices de Wigner ainsi que les matrices de covariance en combinant la transformée de Stieltjes et la technique des martingales.

Plus précisémment, notre approche consiste, dans un premier temps, à exprimer la forme quadratique, centrée et bien normalisée (normalisation d'ordre $\sqrt{n}$), sous forme d'une somme d'incréments de martingales par rapport à une certaine filtration. Ensuite, de démontrer que la suite de la somme des variances conditionnelles de la martingale considérée admet comme approximant déterministe une suite de réels positifs. Cette dernière jouera le rôle de la variance dans le TCL. Et enfin, après avoir validé le contrôle du comportement asymptotique de la variance (condition de Lindeberg), nous faisons usage du théorème central limite pour les martingales [9] qui garantie le comportement gaussien des fluctuations de la statistique $(\beta_n(-\rho) - \mathbb{E}\beta_n(-\rho))$.

Applications :

Le contexte applicatif du travail cité ci-dessus est celui de l'étude des performances des systèmes de transmission multi-antennes.

Les systèmes de communications muti-antennes : MIMO (Multiple Input Multiple Output), CDMA (Code Division Multiple Access), MC-CDMA (Multi-Carrier CDMA).., admettent dans la plupart des situations, la représentation matricielle suivante :

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{\Sigma}_n \mathbf{t}_n + \mathbf{b}_n,$$

où $\mathbf{r}_n$ représente le vecteur discret des signaux reçus, $\mathbf{t}_n$ le vecteur des symbols transmis, $\mathbf{b}_n$ un bruit additif et $\mathbf{\Sigma}_n$ la matrice canal. L'objectif est d'estimer le signal transmis $\mathbf{t}_n$ à partir du signal reçu $\mathbf{r}_n$ et de la matrice canal $\mathbf{\Sigma}_n$. Faisons l'hypothèse que le centre d'intérêt est le premier utilisateur $\mathbf{t}_0^n$. L'estimateur linéaire de Wiener propose comme estimateur : $\hat{\mathbf{t}}_0^n = \mathbf{g}_n^* \mathbf{r}_n$ où $\mathbf{g}_n$ est le vecteur minimisant l'erreur quadratique moyenne $\mathbb{E}|\mathbf{g}_n^* \mathbf{r}_n - \mathbf{t}_0^n|^2$. Un indicateur de performance de cet estimateur est le Rapport Signal à Interference plus Bruit (RSIB). En décomposant la matrice canal $\mathbf{\Sigma}_n = [\mathbf{y}_n \quad \mathbf{Y}_n]$, le RSIB peut être donné par :

$$\beta_n(-\rho) = \mathbf{y}_n^* \left(\mathbf{Y}_n \mathbf{Y}_n^* + \rho I_N\right)^{-1} \mathbf{y}_n,$$

où $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ représente la variance du bruit supposé blanc ($\mathbb{E}|\mathbf{b}_n \mathbf{b}_n^*| = \rho I_N$).

L'étude théorique confirme donc le caractère gaussien des fluctuations du rapport signal sur bruit quand le nombre d'émetteurs et de récepteurs tendent conjointement vers l'infini. Nos résultats théoriques sont également confirmés par des simulations numériques.

Nous pensons que nos résultats présentent plusieurs intérets pratiques :

- Le TCL permet la prédiction de quelques quantités importantes dans l'étude des systèmes de transmission comme, à titre d'exemples, *la probabilité de dépassement* ou encore *le taux d'erreur binaire.*
- L'implémentation informatique de nos résultats, utilisant des équivalents déterministes au lieu des vraies quantités aléatoires, est computationnellement efficace.

Publications :

Ce travail a fait l'objet d'une collaboration avec W. Hachem, A. Kammoun et J. Najim et a mené aux publications :

1. "A Central Limit Theorem for the SINR at the LMMSE Estimator Output for Large Dimensional Signals". IEEE Inf. Theory , Vol. 55 (11), nov. 2009.
2. "Fluctuations of the SNR at the Wiener Filter Output for Large Dimensional Signals". IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications SPAWC 2008.

II.2 Comportement asymptotique de fonctionnelles de formes quadratiques

La compréhension des fluctuations du RSIB permet d'analyser le comportement d'autres indices de performances de systèmes de transmission multi-antennes, comme le taux d'erreur binaire (*BER pour Bit Error Rate*) ou encore la probabilité de dépassement (*outage probability*).

L'objectif de mon second travail était effectivement l'étude de ces deux indices dont les expressions mathématiques sont données en fonction du RSIB :

$$\mathbf{BER} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \mathrm{MGF}\left(-\frac{1}{2\sin^2\phi}\right) d\phi, \quad \mathbf{P}_{out}(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Gamma_{in}\left(\alpha, \frac{y}{b}\right),$$

Γ et Γ_{in} sont respectivement les fonctions gamma et gamma incomplète. MGF représente la fonction génératrice des moments de la loi du RSIB et b est un paramètre qui dépend des 2 premiers moments du RSIB.

Nous avons étudié ces deux quantités dans le cadre d'un modèle gaussien séparable, i.e. les entrées de la matrices Σ sont données par : $\Sigma_{ij} = \frac{d_i \tilde{d}_j}{\sqrt{n}} X_{ij}$, d_i et $\tilde{d}_j$ étant des réels positifs, X_{ij} sont des v.a.i.i.d. complexes gaussiennes centrées et réduites.

Des techniques gaussiennes (formule d'integration par partie, inégalité de Nash-Poincaré) ont été utilisées dans cette étude. Des simulations numériques confirment la pertinence de nos résultats théoriques.

Publications :

Ce travail, réalisé en collaboration avec W. Hachem, A. Kammoun et J. Najim, a fait l'objet des publications :

1. "BER et Outage Probability Approximations for LMMSE Detectors on Correlated MIMO Channels". IEEE Inf. Theory , Vol. 55 (10), oct. 2009
2. "Outage probability approximation for the Wiener Filter SINR in MIMO systems". IEEE SPAWC 2008.

II.3 Fluctuations d'une fonctionnelle spectrale linéaire

L'étude de fonctionnelles linéaires de valeurs propres de grandes matrices aléatoires constitue toujours un sujet de grande actualité [1]. Une fonctionnelle linéaire définie sur le spectre d'une matrice $\mathbf{A}_n$, de taille $n \times n$ et dont $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont ses n valeurs propres, est, dans la plupart des situations, donnée par :

$$\mathcal{N}_n(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\lambda_i),$$

où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction test suffisamment lisse.

Notre contribution dans ce thème consiste à étudier les fluctuations de $\mathcal{N}_n(\log)$ pour un modèle de matrices déformées. Ce travail, à notre connaissance, inaugure ce sentier vers les modèles de matrices de covariances déformées. En outre, un apport de ce travail est la mise en lumière de l'impact de la structure de la matrice de déformation sur la forme de la variance dans le TCL.

Dans ce travail, nous avons considéré le modèle matriciel suivant :

$$\mathbf{A}_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} D_n^{1/2} X_n \tilde{D}_n^{1/2} + M_n \right) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} D_n^{1/2} X_n \tilde{D}_n^{1/2} + M_n \right)^*,$$

les matrices D_n et $\tilde{D}_n$ sont positives, diagonales de taille resp. $N \times N$ et $n \times n$. La $N \times n$ matrice X_n est complexe, d'entrées independantes identiquement distribuées centrées et réduites, et la matrice M_n est deterministe de norme spectrale bornée.

Nous nous sommes intéressés à l'étude des fluctuations de la statistique :

$$I_n(\rho) = \log\det\left(\mathbf{A}_n + \rho I_N\right), \quad \rho \in \mathbb{R}^+.$$

Nous avons adapté la technique des martingales (REFORM) pour étudier les fluctuations de la variable $I_n(\rho)$. L'adaptation de cette technique nous a demandé de développer davantage d'outils mathématiques afin de bien traiter des entités qui apparaissent naturellement au fur et à mesure de l'étude. Des entités comme des formes bilinéaires de type $u_n^* \left(\Sigma_n \Sigma_n^* + \rho I_N\right)^{-1} v_n$ où u_n et/ou v_n est un vecteur aléatoire ou un vecteur ligne ou colonne de la matrice de centrage M_n. Nous avons été également confrontés à l'analyse de la trace normalisée de la résolvente $\frac{1}{n}\mathrm{tr}\left(\Sigma_n \Sigma_n^* + \rho I_N\right)^{-1}$.

Aux termes, nous avons montré que, lorsqu'elle est centrée et bien normalisée, la variable $I_n(\rho)$ se comporte bien asymptotiquement comme une variable gaussienne. Nous avons montré également que la variance et le terme biais dans le TCL dépendent bien de la structure non-centrée de la matrice $\mathbf{A}_n$.

Outre l'intéret de ce résultat, présentant une étude complète des fluctuations d'une statistique très rencontrée aussi bien dans la théorie que dans la pratique ($\log\det$), le développement de ce travail nous a offert l'opportunité de découvrir d'autres pistes intéressantes à explorer. Le traitement des formes bilinéaires, par exemple, en fait une des pistes : lors de ce travail, nous avons étudiés le comportement asymptotique de ces quantités et quelques perspectives peuvent être résumées en l'étude des fluctuations des formes bilinéaires ainsi que l'évaluation de l'impact des vecteurs propres de la matrice de centrage.

Applications :

Dans la théorie de l'information de Shanonn, il est bien connu que l'utilisation des systèmes multi-antennes augmente le débit de transmission dans les systèmes de transmission sans fil. L'étude de l'information mutuelle a donc fait l'objet de plusieurs travaux. Notre contribution dans ce cadre consiste à étudier les fluctations de l'information mutuelle pour un systèmes de transmission multi-utilisateurs. Formellement, cette variable est donnée par :

$$\mathcal{I}_n(\rho) = \frac{1}{n} \log\det\left(\mathbf{I}_N + \mathbf{A}_n\right),$$

où, $\rho > 0$ représente le rapport signal sur bruit et $\mathbf{A}_n$ est une matrice aléatoire hermitienne modélisant la matrice canal.

Notre résultat théorique cité précédemment trouve bien dans ce cadre une application très importante, permettant de prédire beaucoup de choses (seuil de détéction, probabilité de dépassement..) sur le système multi-antennes et les caractéristiques du canal de transmission.

Ce travail a fait l'objet des publications suivantes :

1. En collaboration avec W. Hachem, J. Najim et Jack Silverstein : "A CLT for Information-Theoretic Statistics of non-centered Gram Random Matrices", Random Matrix Theory and its Applications, 2012.
2. En collaboration avec A. Elkharroubi, W. Hachem, A. Kammoun et J. Najim : "On the fluctuations of the mutual information for non-centered MIMO channels : The non-gaussian case". IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications SPAWC 2010.

Démarche de recherche acquise

Cette première expérience de recherche forme un ensemble que je juge cohérent et très formateur. Aux termes de ces travaux, j'ai développé la démarche scientifique qui me semble la plus pertinente pour mener à bien des projets théoriques qui répondent à des problématiques relevées de la pratique. Cette démarche je la résume en trois étapes, qui communiquent entre elles tout au long du travail de recherche :

– **Modélisation :** Une étape cruciale pour la compréhension de la problématique réelle. L'objectif de cette étape est de réussir la traduction du problème réel en langage mathématique. Il me semble que la façon la plus frutueuse pour atteindre cet objectif est de rester en contacte avec les spécialistes du domaine applcatif. En ce qui concerne mon expérience, comme j'ai travaillé sur des problèmes relevés de la théorie de l'information, j'ai toujours collaboré avec des spécialistes du domaine.
– **Analyse :** Cette étape constitue le coeur du travail mathématique. L'objectif étant d'établir des théorèmes limites, de trouver des estimateurs consistants, de comprendre le comportement limite de quelques entités mathématiques...etc.
– **Programmation :** Confirmation des résultats théoriques en développant des algorithmes et en les validant par le biais des simulations numériques.

III Travaux en cours

Au terme de ma thèse, il m'a semblé tout à fait naturel que le cadre restreint qui était le notre, du fait des échéances de la thèse, méritait d'être élargi. Car les problèmes posés par les applications réalistes nous mettent au devant des considérations bien plus complexes, en l'occurence des matrices aléatoires aux entrées non centrées.

Ceci a conduit à considérer comme travail imminent, la prise en compte du caractère non centré des matrices de base dans l'étude des fluctuations des formes quadratiques (voir sous-section (II.1)).

Cette extension, dans laquelle nous avons reposé notre analyse sur le comportement global des valeurs propres sans information particulière sur les vecteurs propres, restreint quelque peu le champ d'application des résultats obtenus, du moins un peu moins que si l'on avait intégré ces derniers. Ceci nous a conduit à une seconde direction : étudier l'influence des vecteurs propres. Cette nouvelle considération conduit à un problème beaucoup plus complexe tant du point de vue pratique que théorique, car les outils mathématiques tout autre doivent être développés.

Dans cette partie subdivisés en deux, nous présentons dans la deuxième l'état d'avancement dans la direction du décentrage, en observant l'impact des vecteurs propres, précédé dans la première par les résultats obtenus sur l'hypothèse de non-centrage dans le cadre d'une généralisation du travail présenté en sous-section (II.1).

III.1 Etude des fluctuations des formes quadratiques : cas non centré

Le travail présent, porte sur la généralisation de quelques résultats obtenus pendant ma thèse à des modèles plus concrèts. Nous nous sommes donc intéressés dans un premier temps à l'étude des fluctuations des formes quadratiques de type introduit précédemment (1) pour un modèle de matice aléatoire non centrée. L'établissement d'un TCL pour ces formes quadratiques demande une étude très technique et très précise de quelques quantités aléatoires faisant appel aux entrées individuelles de la résolvente de la matrice étudiée.

Dans un contexte applicatif aux communications numériques sans fil, l'indice de performance "rapport signal à interférences plus bruit" pour un modèle matriciel information plus bruit présente une application directe du résultat théorique obtenu. Ce travail, en collaboration avec R. Couillet, M. Debbah, A. Kammoun et J. Najim a donné lieu à la publication :

1. "On the fluctuations of the SINR at the output of the Wiener filter for non centered channels : the non Gaussian case", IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, 2012.

La version journal est en cours de rédaction.

III.2 Comportement asymptotique des vecteurs propres de grandes matrices aléatoires

Pour le présent travail, je le prépare en collaboration avec **Pan Guang-Ming, Université de Singapore.**

Le but de ce travail est de comprendre le comportement asymptotique des vecteurs propres de grandes matrices aléatoires non-centrées. Ce projet de recherche est motivée par la remarque suivante : pour les matrices de Wishart (matrice de covariance à entrées i.i.d. gaussiennes), la matrice des vecteurs propres a une distribution de Haar dans l'ensemble des matrices orthogonales. L'objectif est à présent de vérifier si cela reste vrai pour des modèles matriciels plus généraux. Dans ce travail, qui demeure en cours, nous envisageons d' adopter l'approche de Silverstein [10,11,12] mettant en oeuvre une démarche pour que la matrice des vecteurs propres d'une matrice de covariance soit asymptotiquement Haar ditribuée. L'idée principale est la suivante. Soit $\mathbf{U}$ une $n \times n$ matrice Haar distribuée dans le groupe des matrices orthogonales. On sait que pour tout vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y}_n = \mathbf{U}\mathbf{x} = (y_1, \ldots, y_n)^t$ suit une distribution uniforme sur la sphère unité. En conséquence si $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)^t$ suit $\mathcal{N}(0, \mathbf{I}_n)$, alors $\mathbf{y}_n$ aura la même distribution que $\mathbf{z}/\left\|\mathbf{z}\right\|$.

En définissant le processus stochastique $\mathbf{Y}_n(t)$ dans l'espace des fonctions càdlàc $\mathbf{D}(0,1)$ comme suit :

$$\mathbf{Y}_n(t) = \sqrt{\frac{n}{2}} \sum_{i=1}^{[nt]} \left(|y_i|^2 - \frac{1}{n} \right) \stackrel{d}{=} \sqrt{\frac{n}{2}} \frac{1}{\|\mathbf{z}\|^2} \sum_{i=1}^{[nt]} \left(|z_i|^2 - \frac{\|\mathbf{z}\|^2}{n} \right), \tag{1}$$

il apparaît de la deuxième égalité que que $\mathbf{Y}_n(t)$ converge vers un pont Brownien $\mathbf{B}(t)$ quand n tend vers l'infini.

Nous envisageons un résultat analogue pour des matrices de covariances plus générales, notamment des matrices non centrées.

Soit $\mathbf{U}_n \Delta_n \mathbf{U}_n^*$ la décomposition spectrale de la matrice de covariance considérée $\mathbf{\Sigma}_n$, avec $\Delta_n = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $\mathbf{U}_n$ est une matrice unitaire formée des vecteurs propres de $\mathbf{\Sigma}_n$. On définit un processus $\mathbf{Y}_n(t)$ comme en (1). L'objectif est alors d'évaluer les propriétés asymptotiques du vecteur $\mathbf{y}_n = \mathbf{U}\mathbf{x}$, pour tout vecteur unitaire $n-$dimensionel $\|\mathbf{x}_n\|$, à travers l'analyse du processus $\mathbf{Y}_n(t)$.

Pour cette fin, nous commençons par une transformation du paramètre temps du processus $\mathbf{Y}_n(t)$, et posons alors :

$$\mathbf{X}_n(x) = \mathbf{Y}_n \left(F^{\mathbf{\Sigma}_n}(x) \right),$$

où $F^{\mathbf{\Sigma}_n}(x)$ est la distribution spectrale empirique de la $n \times n$ matrice $\mathbf{\Sigma}_n$, définie par :

$$F^{\mathbf{\Sigma}_n}(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{I}(\lambda_j \leq x),$$

les λ_j étant les valeurs propres de $\mathbf{\Sigma}_n$.

Si la distribution de $\mathbf{U}_n$ est "proche" de la distribution de Haar, alors $\mathbf{X}_n(x)$ devrait approcher $\mathbf{B}(F(x))$, où $F(x)$ est la distibution spectral limite de $\mathbf{\Sigma}_n$.

Nous définissons maintenant une nouvelle distribution empirique basée à la fois sur les valeurs propres et les vecteurs propres :

$$F_1^{\mathbf{\Sigma}_n}(x) = \sum_{j=1}^{n} |y_j|^2 \mathbf{I}(\lambda_j \leq x).$$

Le problème se ramène donc à l'étude du comportement asymptotique du processus :

$$\mathbf{X}_n(x) = \sqrt{\frac{n}{2}} \left(F_1^{\mathbf{\Sigma}_n}(x) - F^{\mathbf{\Sigma}_n}(x) \right).$$

Ceci est une transformation considérable du problème initial, conduisant à un problème beaucoup plus abordable pour lequel les résultats seront disponibles dans un futur relativement proche.

III.3 Localisation des valeurs propres des matrices de covariances structurées

Ce projet de recherche est en collaboration avec **Philippe Loubaton, laboratoire LIGM, Université Paris-Est Marne-La-Vallée**.

Récemment, les problèmes concernant le régime asymptotique local, plus précisément l'étude de la localisation des valeurs propres, présentent un champ de recherche de grande actualité. Ceux-ci constituent le centre d'intérêt de plusieurs travaux récents ([13,14,15,16] (voir aussi quelques une des références citées).

Considérons le modèle matriciel suivant :

$$\mathbf{A}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{D}_n^{1/2} \mathbf{X}_n,$$

où $\mathbf{D}_n = \mathbf{M}_n + \mathbf{I}_n$, $\mathbf{M}_n$ est supposée de rang plein $N \times N$, et $\mathbf{X}_n$ est rectangulaire $N \times n$ d'entrées i.i.d complexes standars. On suppose que les $N - K$ (K étant un entier naturel) plus petites valeurs propres de $\mathbf{D}_n$ sont égales à 1 et que les K plus grandes valeurs propres convergent vers des limites $1 \leq \gamma_1 \leq \cdots \leq \gamma_K$ quand $n \to \infty$. Comme $\mathbf{D}_n$ est une perurbation de l'identité de petit rang K comparé aux dimensions N et n, il est attendu que le comportement global des valeurs propres de $\mathbf{A}_n \mathbf{A}_n^*$ soit proche du cas où $\mathbf{A}_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{X}_n$, i.e. que leur distributin empirique soit proche de la loi de Marcenko-Pastur. En effet, on a toujours la convergence de la mesure spectrale de $\mathbf{A}_n \mathbf{A}_n^*$ vers la loi de Marcenko-Pastur dont le support est donné par : $[(1 - \sqrt{c})^2, (1 + \sqrt{c})^2]$, où c est telle que $\frac{N}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} c$. Cependant, quand $n \to \infty$, toutes les valeurs propres de $\mathbf{A}_n \mathbf{A}_n^*$ ne se concentrent pas autour du bulk $[(1 - \sqrt{c})^2, (1 + \sqrt{c})^2]$. En effet, il est montré (voir Baik et Silverstein [17]) que les K plus grandes valeurs propres de $\mathbf{A}_n \mathbf{A}_n^*$ peuvent converger vers des limites en dehors du bulk si $\gamma_1, \ldots, \gamma_K$, les valeurs propres limites correspondantes des K plus grandes valeurs propres de $\mathbf{D}_n$, sont supérieures à un certain seuil.

Mon projet dans ce thème est le suivant : on considère une matrice $\mathbf{A}_n$ constituée de blocs de matrices de Toeplitz, ensuite de la perturbée par une matrice de rang fini $\mathbf{D}_n$ et de regarder la localisation des valeurs propres limites de la matrice de covariance $(\mathbf{A} + \mathbf{D}_n)(\mathbf{A}_n + \mathbf{D}_n)^*$.

Dans ce travail de recherche, en collaboration avec Philippe Loubaton, nous avons prouvé, sous quelques conditions sur les moments, que la loi limite de la matrice de covariance d'une matrice blocs-Toeplitz est bien, encore une fois, la loi de Marcenko-Pastur. L'étape suivante sur laquelle nous travaillons est l'étude de la loi limite de la plus grande valeur propre, et ensuite nous allons nous intéresser à la localisation des plus grandes valeurs propres de la matice perturbée par rapport au bulk Macenko-Pastur.

Nous estimons que ce projet de recherche ambitieux et de très grande actualité, apportera des contributions de grands intérêts à la fois au niveau théorique qu'au niveau applicatif.

Ces résultats sur les matrices de covariances trouvent naturellement leurs applications dans le cadre des localisations de sources. Dans le contexte du traitement statistique du signal numérique, Silverstein et Combettes [17] traitent le problème de la détection de signal dans les grands réseaux de capteurs. Il ont montré que les valeurs propres de la matrice de covariance empirique se séparent en deux groupes, le groupe des K plus grandes valeurs propres est directement relié au nombre de sources émettrices. Ces phénomènes de séparation des valeurs propres ont également été développés, notamment par Nadakuditi et Edelman [18], Krichman et Nadler [19], Bianchi et al. [20].

IV Recherche envisagée

L'estimation des valeurs propres et des vecteurs propres de grandes matrices aléatoires est un domaine de recherche récent (voir, par exemple, Elkaroui [21], Mestre [22]). Dans ses travaux [22,23,24], Mestre a considéré le modèle matriciel suivant :

$$\mathbf{\Sigma}_n = \mathbf{D}_n^{1/2}\mathbf{X}_n, \quad \text{avec, } \mathbf{D}_n = \mathbf{A}_n\mathbf{R}_n\mathbf{A}_n^* + \sigma^2\mathbf{I}_N,$$

où, $\mathbf{A}_n$ $(N \times K)$ et $\mathbf{R}_n$ $(K \times K)$ sont de rang plein égale à K $(\leq N)$ et telles que les $N - K$ plus petites valeurs propres de $\mathbf{D}_n$ sont toutes égales à σ, qui est un réel positif. $\mathbf{X}_n$ est $N \times n$ supposée d'entrées i.i.d. complexes gaussiennes standards. Il a remarqué que l'espace propre associé à la valeur propre σ^2 de $\mathbf{D}_n$ est engendré par les vecteurs directionnels $\mathbf{a}(\theta_1), \ldots, \mathbf{a}(\theta_K)$, qui représentent les vecteurs colonnes de la matrice $\mathbf{A}_n$. Cette remarque implique que les angles $\theta_1, \ldots, \theta_K$ sont des zéros de la fonction de localisation :

$$\eta_n(\theta) = \sum_{k=1}^{N-K} \mathbf{a}(\theta)^*\mathbf{u}_{k,n}\mathbf{u}_{k,n}^*\mathbf{a}(\theta),$$

avec, $\mathbf{u}_{k,n}$ est le vecteur propre de $\mathbf{D}_n$ associé à la valeur propre $\gamma_{k,n}$.

En se plaçant sous le régime asymptotique $N, n \to \infty$ tout en gardant un rapport N/n asymptotiquement constant, les résultats classiques (sous le régime N fixe et n tend vers l'infini) pour estimer les formes quadratiques de type $\eta(\theta)$ ne sont plus valables. Mestre [50] a donc proposé une approche très intéressante en exploitant les principes de la G-estimation ainsi que les résultats de localisation des valeurs propres de Bai et Silverstein [24,12]. L'idée de base étant d'exprimer la fonction de localisation par l'intégrale de contour entourant uniquement la valeur propre σ^2 de $\mathbf{D}_n$:

$$\eta_n(\theta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{a}(\theta)^* \left(\mathbf{D}_n - \omega \mathbf{I}_N\right)^{-1} \mathbf{a}(\theta) d\omega.$$

Ensuite, en utilisant les approximants déterministes de la transformée de Stieltjes de la mesure spectrale de la matrice $\mathbf{\Sigma}_n \mathbf{\Sigma}_n^*$, la théorie des résidus et quelques propriétés des fonctions analytique, Mestre a réussi à trouver des estimateurs consistants de la fonction de localisation $\eta_n(\theta)$.

Ces travaux très séduisants ont des apports intéressants aussi bien sur la théorie que la pratique. Mestre a étudié un modèle gaussien, il me semble, comme projet de grand intérêt, la généralisation de ces travaux aux cas non gaussiens et aussi pour des modèles matriciels plus complexes.

L'ensemble de mes recherches (en cours et les perspectives) forme un programme de recherche que je juge ambitieux et intéressant. Votre laboratoire me me disposera de conditions de recherche optimales pour mener à bien mon programme de recherche qui, je le signale, n' empiétra pas mon adaptation aux thématiques de ma futur équipe d'accueil. Il est par ailleurs susceptible d'engranger de collaborations dont mon équipe d'accueil ne pourrait qu'en bénéficier.

V Responsabilités Scientifiques

Rapporteur : Annales de l'IHP, Euporean Signal Processing Conference.

PUBLICATIONS

Articles de Journal

J1 "*A CLT for Information-Theoretic Statistics of non-centered Gram Random Matrices*". RMTA 2012. En collaboration avec J. W. Silverstein, W. Hachem et J. Najim.

J2 "*A Central Limit Theorem for the SINR at the LMMSE estimator output for large dimensional signals*". IEEE Inf. Theory, 2009, avec A. Kammoun, W. Hachem et J. Najim.

J3 "*BER and Outage probability approximations for LMMSE detectors on correlated MIMO channels*". IEEE Inf. Theory, 2009, avec A. Kammoun, W. Hachem et J. Najim.

Actes de Conférences Internationales avec comité de lecture

C1 "*On the fluctuations of the SINR at the output of the Wiener filter for non centered channels : the non Gaussian case*", IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, 2012, avec, R. Couillet, M. Debbah, A. Kammoun et J. Najil.

C2 "*On the fluctuations of the mutual information for non-centered MIMO channels : The non-gaussian case*". IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC) 2010, avec A. Kammoun, W. Hachem, J. Najim et A. Elkharroubi.

C3 "*Fluctuations of the SNR at the Wiener Filter Output for Large Dimensional Signals*". IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC) 2008, avec A. Kammoun, W. Hachem et J. Najim.

C4 "*Outage probability approximation for the Wiener Filter SINR in MIMO systems*". IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC) 2008, avec A. Kammoun, W. Hachem et J. Najim.

Thèse

[T] Thèse de doctorat en Mathématiques Appliquées, en cotutelle, Télécom Paristech, Paris et Université Hassan II, Casablanca, soutenue le 19 juin 2010.

Titre de la thèse
Fluctuations de fonctionnelles spectales de matrices aléatoires et applications aux communications numériques .

Toutes ces publications sont disponibles sur la page :
`http://mkharouf.sitego.fr/recherche.html`.

SÉMINAIRES ET CONFÉRENCES

Participation à des conférences, colloques, écoles d'été

1. IEEE International conference on acoustics, speech and signal processing, 23-30 mars 2012, Kyoto, Japon.
2. Ecole d'hiver des Houches : Random matrix theory and integrable systems, 4-9 mars 2012, Les Houches.
3. Summer School on random matrix theory and its applications, Université de Changchun, 10-30 juillet, 2011, Changchun, Chine.
4. 6th Workshop on Stochastic Processes and their Applications, Université de Potsdam, juillet 2011, Potsdam, Allemagne.
5. Workshop : Large Random Matrices and their applications, Télécom Paristech, 11-13 octobre 2010, Paris.
6. Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications, 20-23 juin 2010, Marrakech, Maroc.
7. Fifth Workshop on Stochastic Processes and their Applications, Université paris X, Nanterre, 9-11 juin, 2010.
8. Conference on Random matrices, Centre de Mathématiques de Jussieu, Chevaleret, 1-4 juin 2010.
9. Neuvième Colloque "Jeunes Probabilistes et Statisticiens", Le Mont-Dore (Puy de Dôme), 3-7 mai 2010.
10. Fall School on compressed sensing, random matrices, high dimensional geometry, Université Marne-La-Vallée, novembre 2009.
11. Troisièmes Rencontres Des Jeunes Statisticiens, Aussois, 31 août-4 septembre 2009.

12. Summer School in Signal Processing and its Applications, 30 juin-4 juillet 2007, Boumerdès, Algérie.
13. Workshop Modélisation Mathématique, Université Hassan II, novembre 2006, Casablanca, Maroc.

Présentations dans des séminaires ou groupes de travail

1. Invitée au séminaire Matrices aléatoires, Institut de Mathématiques de Toulouse, 24 mars 2011.
2. Invitée au séminaire de probabilité, Institut Joseph Fourier, Grenoble, 15 mars 2011.
3. Invitée au groupe de travail : Processus stochastiques et matrices aléatoires, UPMC, Paris, 11 mars 2011.
4. Invitée au groupe de travail MAP5, Université Paris Descartes, Paris, 4 mars 2011.
5. Invitée au groupe de travail ASPro, Université Paris-Est, Marne-La-Vallée, 18 janvier 2011.
6. Séminaire MODAL'X, Université Paris Ouest Nanterre, 9 décembre 2010.
7. Séminaire des doctorants, STA/LTCI Télécom Paristech.
8. Séminaire : calculs stochastiques, Université Cadi Ayyad, Marrakech, 1 avril 2008.
9. Invitée au séminaire EHTP, Ecole Hassania des Travaux Publics, Casablanca, 15 mars 2008.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Lytova, L. Pastur. Central limit theorem for linear eigenvalue statistics of the Wigner and the sample covariance random matrices. Metrika, 69(2-3) :153-172, 2009.

[2] R.B. Dozier, J.W. Silverstein. Analysis of the limiting spectral distribution of large dimensional information-plus-noise type matrices. J. Multivariate Ana., 98(6) :1099-1122, 2007.

[3] R.B. Dozier, J.W. Silverstein. On the empirical distribution of eigenvalues of large dimensional information-plus-noise type matrices. J. Multivariate Ana., 98(4) :678-694, 2007.

[4] F. Gotze et A. Tikhomirov(2002). Asymptotic distributions of quadratic forms and applications. J. Theoret. Probab., vol. 15, pp. 424Ũ475

[5] R.J. Bhansali, L. Giraitis, P.S. Kokoszka (2007). Convergence of quadratic forms with nonvanishing diagonal. Stat. Probab. Letters, vol. 77, pp. 726Ũ734.

[6] G.-M. Pan, M.-H Guo, W. Zhou (2007). Asymptotic distributions of the Signal-to-Interference Ratios of LMMSE detection in multiuser communications. Ann. Appl. Probab., vol. 17, no. 1, pp. 181Ũ206

[7] V. L. Girko (1990). Theory of Random Determinants. Kluwer, Dordrecht.

[8] V. L. Girko (2001). Theory of Stochastic Canonical Equations. Kluwer, Dordrecht.

[9] P. Billingsley (1995). Probability and Measure, 3rd ed. Wiley, New York. MR1324786V.

[10] J. W. Silverstein, Weak convergence of random functions defined by the eigenvectors of sample covariances matrices. *Ann. Probab.* 18 1174-1193. 1990

[11] J. W. Silverstein, On the eigenvectors of large-dimensional sample covariance matrices. *J. Multivariate Anal.* 30 1-16. 1989.

[12] J. W. Silverstein, Some limit theorems on the eigenvectors of large dimensional sample covariance matrices. *J. Multivariate Anal.* 15 295-324. 1984.

[13] F. Benaych-Georges, R.N. Rao. The eigenvalue and the eigenvectors of finite, low rank perturbations of large random matices. Adv. in Math. Vol. 227, no. 1(2011)494-521.

[14] F. Benaych-Georges, R.N. Rao. The eigenvalue and the eigenvectors of finite, low rank perturbations of large random matices. Arxiv. 2012.

[15] M. Capitaine, C. Donati-Martin, D. Féral, M. Février. Free convolution with a semi-circular distribution and eigenvalues of spiked deformations of Wigner matrices. Arxiv, 2010.

[16] M. Capitaine, C. Donati-Martin, D. Féral. The largest eigenvalue of finite rank deformation of large Wigner matrices : convergence and nonuniversality of the fluctuations. Ann. Probab. 37(1) :1-47, 2009.

[17] J.W. Silverstein, P.L. Combettes. Signal detection via spectral theory of large dimensional randommatrices. IEEE Transactions on Signal Processing, 40(8) :2100Ũ2105, 1992.

[18] R.R. Nadakuditi, A. Edelman. Sample eigenvalue based detection of high-dimensional signals in white noise using relatively few samples. IEEE Transactions on Signal Processing, 56(7) :2625Ũ2638, 2008.

[19] S. Kritchman, B. Nadler. Non-parametric detection of the number of signals : Hypothesis testing and randommatrix theory. IEEE Transactions on Signal Processing, 57(10) :3930Ũ3941, 2009.

[20] P. Bianchi, M. Debbah, M. Maida, J. Najim. Performance of statistical tests for single-source detection using randommatrix theory. IEEE Transactions on Information Theory, 57(4) :2400Ũ2419, 2011.

[21] N. El Karoui. Spectrum estimation for large dimensional covariance matrices using random matrix theory. Annals of Statistics, 36(6) :2757Ũ2790, 2008.

[22] X. Mestre. Improved estimation of eigenvalues and eigenvectors of covariance matrices using their sample estimates. IEEE Transactions on Information Theory, 54(11) :5113Ũ5129, 2008.

[23] X. Mestre. On the asymptotic behavior of the sample estimates of eigenva-

lues and eigenvectors of covariance matrices. IEEE Transactions on Signal Processing, 56(11) :5353Ű5368, 2008.

[23] X. Mestre, M.A.Lagunas. Modified subspace algorithms for DoA estimation with large arrays. IEEE Transactions on Signal Processing, 56(2) :598, 2008..

[24] Z.D. Bai,J.W. Silverstein. Exact separation of eigenvalues of large dimensional sample covariance matrices. Annals of Probability, 27(3) :1536Ű1555, 1999.