Fiche Animateurs Stand Baguenaudier

L'animation "baguenaudier" a été divisée en 3 étapes. La première, "chemins hamiltoniens" vise à introduire la construction du "code de Gray" faite en seconde partie. La troisième, pour terminer, est l'utilisation du code de Gray pour dénouer le casse-tête appelé Baguenaudier.

Le déroulement du stand :
- des feuilles avec carrés et cubes où sont indiquées les coordonnées sont mises à disposition du public pour la première partie.
- à la fin de la seconde partie, on dévoile le code de Gray à 5 bits pour qu'il soit prêt à être utilisé dans la troisième partie.
- au début de la troisième partie, on donne le casse-tête et on laisse les gens réfléchir. On leur explique les deux manières de sortir un anneau de la tringle (voir figure).

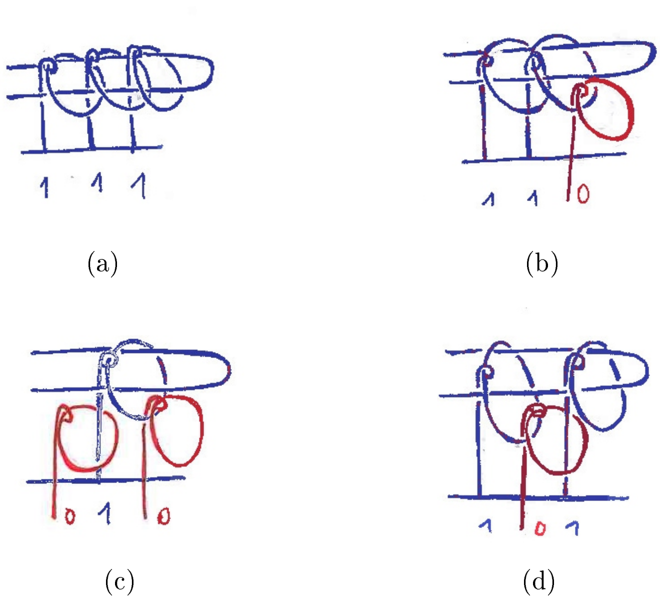

Figure 1 –

Vous avez en (a) la position "maximale" du baguenaudier, celle du départ du casse-tête. Le premier anneau peut toujours être changé de position, aussi on peut passer de (a) à (b) et réciproquement. Le deuxième mouvement réalisable est de bouger l'anneau derrière le premier enlacé. Ainsi on peut passer de (a) à (d) (et réciproquement), ou bien de (b) à (c) (et réciproquement). (Les 0 et 1 sur la figure constituent la traduction de chaque position en code de Gray.)

Quelques remarques supplémentaires pour les différentes fiches :

Pour la version jaune :

- Question B : Penser à faire remarquer qu'il y a plusieurs chemins solutions pour le cube, alors qu'il y en avait un seul pour le carré.
- La partie 4(++) est à faire uniquement si le reste s'est bien passé... On pourra insister sur le nombre de mouvements nécessaires pour 3 anneaux, à comparer avec le nombre de mouvements nécessaires pour 5 anneaux.

Pour la version orange :

- Question 2-C : Pour les plus grands, c'est l'occasion de remarquer qu'à nouveau on a un code dont deux mots consécutifs ne diffèrent que d'une lettre. Ainsi, sans même vérifier sur le cube en traçant effectivement le chemin, on sait que le code est solution, puisqu'il passe par tous les sommets une et une seule fois et que la différence d'une seule lettre permet de savoir qu'on a bien emprunter une arête pour passer d'un sommet au suivant.
- Question 2-F : il faut que la règle permettant de passer d'un mot au suivant soit clairement établie avant de passer à la suite : on change, une fois sur deux, soit la lettre la plus à droite, soit la lettre à gauche du 1 le plus à droite.

Pour la version bleue :

- Mêmes remarques que pour les oranges.
- Question 3-D : en fonction de la parité, il faut soit commencer par enlever le premier anneau tout à droite, soit commencer par enlever le deuxième (conséquence de la construction du code par image miroir). Si on se trompe, on va parcourir le mauvais côté du code depuis 11111...111, et arriver à la position 10000..000 et non 000000..000.
- Question 3-E : voir explication qui suit.
- Question 3-F : Il faudra environ 51 ans pour défaire le baguenaudier à 30 anneaux ! On peut en profiter pour faire remarquer ce qu'il en coûte de se tromper lors du premier coup...

Pour le niveau expert (bleu), les questions E et F en partie 3 nécessitent de faire un peu de calcul.

En question E, il s'agit de démontrer que le nombre minimal de mouvements à réaliser sur un baguenaudier à n anneaux pour passer de "tous les anneaux sont enlacés" à "tous les anneaux sont libérés" est égal à :

$$\begin{cases} \dfrac{2^{n+1}-2}{3} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \dfrac{2^{n+1}-1}{3} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

On reprend la construction du code de Gray par image miroir et on regarde le rang occupé par le mot avec que des 1 dans le code. Notons n le nombre de lettres, et appelons x_n le rang que nous recherchons.(Attention, le nombre de coups recherché n'est pas x_n mais $x_n - 1$!)

Pour $n = 1$, on a $x_1 = 2$. Pour $n = 2$, on a $x_2 = 3$. Etc.

On considère le code de Gray à $n-1$ lettres. Par définition de x_{n-1}, il y a x_{n-1} mots de 00...00 (rang 1) jusqu'à 11...11 (rang x_{n-1}), et il y a $2^{n-1} - x_{n-1}$ mots restant jusqu'au mot 10..00. Comptant à partir de 10..00 en remontant jusque 11..11, on trouve $2^{n-1} - x_{n-1} + 1$ mots.

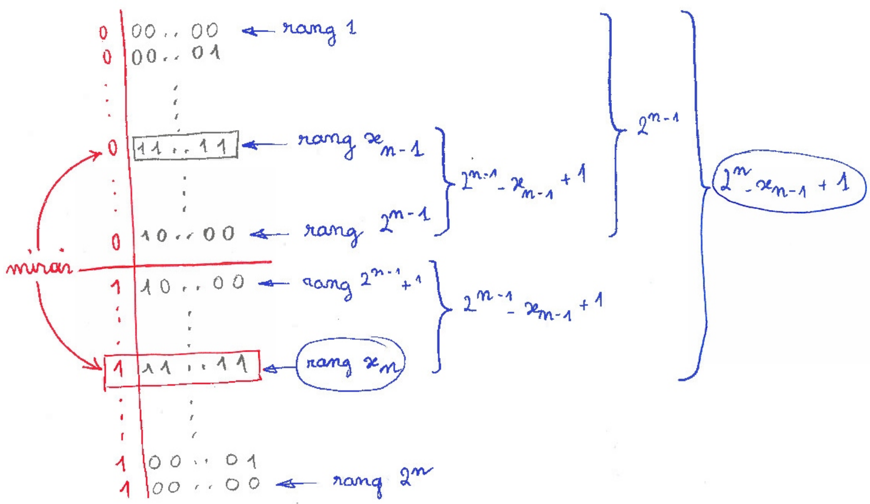

FIGURE 2 –

On construit l'image miroir afin d'obtenir le code à n lettres. Le mot avec n lettres 1 est le symétrique du mot avec $n-1$ lettres 1 et un zéro rajouté à gauche dans la construction. Pour obtenir le rang x_n de ce mot avec n lettres 1, on compte ainsi les 2^{n-1} mots "au-dessus" du miroir (de 00..00 à 010..00), puis $2^{n-1} - x_{n-1} + 1$ mots pour atteindre celui avec n lettres 1.

On a donc : $x_n = 2^n - x_{n-1} + 1 = 2^n - (2^{n-1} - x_{n-2} + 1) = ...$ On voit ainsi apparaître une somme alternée de puissance de 2, ainsi que des 1 qui s'éliminent deux par deux. On écrit ainsi :

$$\begin{cases} \text{pour } n \text{ pair } : x_n = 2^n - 2^{n-1} + .. - 2^3 + x_2 = 2^n - 2^{n-1} + .. - 2^3 + 3 = \dfrac{2^{n+1}+1}{3} \\ \text{pour } n \text{ impair } : x_n = 2^n - 2^{n-1} + .. - 2^2 + x_1 = 2^n - 2^{n-1} + .. - 2^2 + 2 = \dfrac{2^{n+1}+2}{3} \end{cases}$$

D'où le nombre de mouvements, $x_n - 1$, comme annoncé.