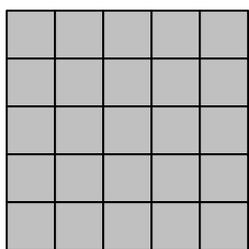


Chasse à la bête

Aucune *bête* ne doit pouvoir pénétrer sur le *territoire*. On dispose de *pièges*, pour empêcher les bêtes de se poser. Une bête est un *polymino* formé de quelques cases.



Un territoire

Piège :



Des bêtes : domino ou



trimino



L'enjeu est de disposer le plus petit nombre de pièges sur le territoire.

Sur le problème ...

Ce problème est caractéristique des problèmes *d'optimisation*. En effet, pour montrer la valeur optimale, il convient d'une part d'exhiber une solution de cette valeur (il suffit) et d'autre part, faire une preuve montrant que l'on ne peut pas faire mieux (il faut). Il existe toujours une solution puisqu'en plaçant des pièges sur chaque case, on est sûr de piéger n'importe quelle bête.

Le problème de recherche mathématique dont est issue cette situation est dû à Golomb (1994)¹ qui a travaillé sur le problème d'exclusion des pentominos². Paul Dorbec (Université Joseph Fourier, Grenoble)³ a utilisé la Chasse à la bête dans sa thèse, comme présentation ludique du problème mathématique qu'il a traité (problème d'empilement et de recouvrement en théorie des graphes). On pourrait travailler sur un problème encore plus général, avec des territoires et des bêtes plus compliqués par exemple, ou en chassant plusieurs bêtes à la fois. Dans le cas général, ce problème est

¹ Golomb S.W. (1994). *Polyominoes – Puzzles, Patterns, Problems and Packings*. Princeton Science Library, Princeton, NJ.

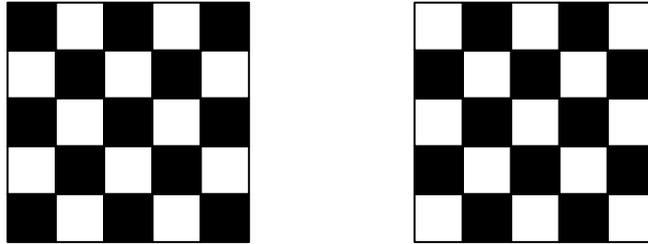
² Voir aussi Gravier S. et Payan Ch. (2001). On the pentomino exclusion problem, *Discrete and Computational Geometry*, 26:375-386.

³ Dorbec, P. (2007). *Empilements et recouvrements*. Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble. Disponible en ligne: <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00181722/fr/>

encore ouvert dans la recherche actuelle.

Chasse à la bête « domino » sur un carré 5 par 5

Il existe une solution à 13 pièges ... et une solution à 12 pièges.



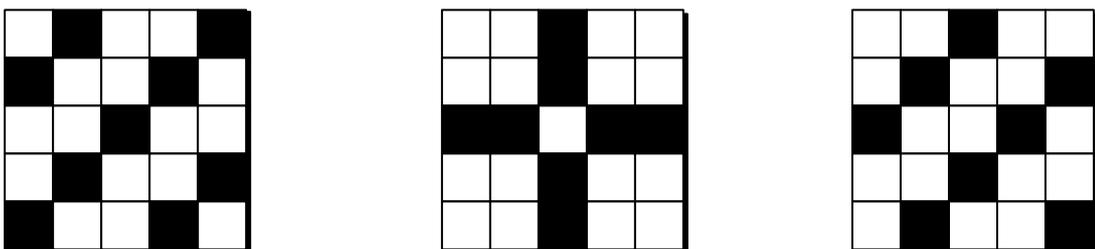
Comment pouvons-nous démontrer que 12 est la solution optimale dans cette configuration? Nous pouvons facilement montrer que 12 bêtes « domino » peuvent se poser sur le territoire 5×5 : ainsi, 12 pièges « au moins » sont nécessaires (c'est ce qu'on appelle une borne inférieure). Il suffit alors d'exhiber une solution à 12 pièges pour pouvoir conclure que 12 est effectivement la solution optimale.

On a ainsi démontré qu'il fallait 12 pièges pour empêcher la bête domino de se poser sur le carré 5 par 5.

On a utilisé l'argument suivant : si on peut placer x bêtes sur le territoire sans qu'elles ne se chevauchent, alors il faut au moins x pièges pour chasser la bête du territoire.

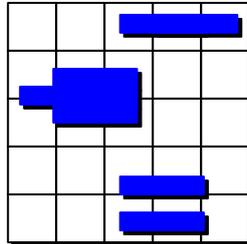
Chasse à la bête (trimino long) sur un carré 5 par 5

Voici des solutions n'utilisant que 8 pièges :



Il nous faut maintenant le démontrer.

– **Première preuve possible** : on dispose le plus grand nombre possible de bêtes sur le territoire. Il est possible d'en placer 8.



Il nous faut donc au moins 8 pièges pour empêcher les bêtes de se poser, et nous avons trouver des solutions n'utilisant que 8 pièges.

On a ainsi montré que 8 pièges sont nécessaires pour empêcher la bête trimino long de se poser sur le carré 5 par 5.

(Remarque : cette technique est facilement généralisable à d'autres tailles de territoire. Pour un rectangle de taille n par m , on obtient $\lfloor nm/3 \rfloor$ pièges.)

– **Deuxième preuve possible** : on va construire cette preuve en utilisant des arguments sur les lignes et les colonnes du territoire.

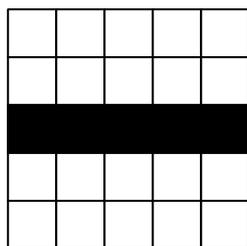
On étudie quelle est la (ou les) case(s) devant contenir un piège sur une colonne et on poursuit le raisonnement sur les colonnes suivantes.

Pour empêcher la bête de se poser sur une colonne, il nous faut au moins un piège. Si on ne place qu'un piège sur cette colonne, il nous faut le placer sur la case « du milieu » (on note cet argument *).

On pourrait utiliser le même argument sur les lignes.



Il nous faut donc au moins 5 pièges pour les cinq colonnes qui composent notre territoire. Mais des bêtes peuvent encore se poser, ce n'est donc pas une solution.



On sait donc qu'il nous faut au moins 6 pièges. Avec 6 pièges, quatre colonnes auront un piège chacune (placé au milieu, toujours avec l'argument *) et la colonne restante en aura deux. Ainsi, il y a au moins deux pièges sur 4 lignes et quatre pièges sur une ligne. Ce qui est encore insuffisant. On remarque que si l'on place un piège sur chacune de ces lignes, on trouve la deuxième solution à 8 pièges.

On sait maintenant qu'il nous faut au moins 7 pièges. Supposons qu'elle existe. Dans une telle solution, au moins 3 colonnes contiennent exactement un piège, placé au milieu. Ces trois colonnes ne peuvent pas être consécutives car sinon, une bête pourra se poser. Si deux de ces colonnes sont consécutives, alors chaque colonne adjacente doit contenir au moins 4 pièges pour empêcher la bête de se poser. 4 pièges sur une colonne et au moins un piège pour chacune des autres colonnes donnent 8 pièges, ce qui est trop. Ainsi, les colonnes contenant un piège ne sont pas adjacentes : ce sont les colonnes n°1, 3 et 5. En utilisant l'argument * sur les lignes, cela implique que chaque ligne excepté celle du milieu a exactement un piège. Ce n'est pas possible quand la colonne du milieu a un piège seulement.

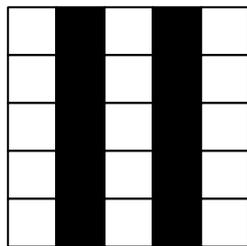
Ainsi, 8 pièges sont nécessaires. OUF !

Chasse à la bête



(trimino en L) sur un carré 5 par 5

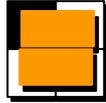
L'argument de pavage par des bêtes ne suffit plus car on ne peut mettre que 8 bêtes dans un carré 5 par 5 alors que la meilleure solution obtenue utilise 10 pièges.



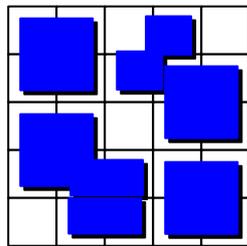
On obtient alors, seulement, un encadrement sur la valeur de l'optimum. De tels résultats sont courants dans les problèmes de recherche. Toutefois, on peut dans ce cas précis raffiner la preuve par pavage afin de montrer que 10 sont nécessaires.

On remarque tout d'abord que la bête se place en fait sur un carré 2 par 2. Il

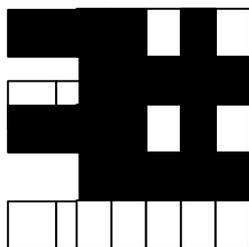
nous faut alors un piège pour la bête posée sur ce carré 2 par 2 et encore un piège supplémentaire sur la case restante afin qu'une autre bête « voisine » ne viennent pas empiéter sur notre carré 2 par 2.

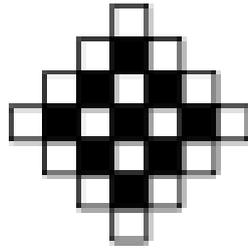


Ainsi, pour chaque carré 2 par 2, il nous faut 2 pièges. On essaie alors de disposer ces blocs 2 par 2 sur le territoire. « Au pire », on en a 4 (on peut faire la liste des différents cas possibles) et deux bêtes peuvent encore se poser : il nous faut donc 4×2 pièges plus 2, c'est-à-dire **10 pièges pour empêcher la bête de se poser.**



Autre argumentation possible : on raisonne sur les colonnes du territoire. Vu la forme de la bête, on va regarder ce qu'il se passe sur les 2 premières colonnes. Au mieux, on peut disposer 4 pièges pour empêcher la bête de se poser (deux bandes de deux). On raisonne ensuite sur les deux colonnes suivantes et enfin sur la dernière colonne. On obtient alors la solution à 10 pièges :

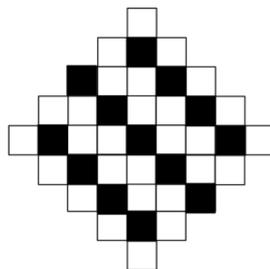




Solution à 9 pièges

Une bête domino recouvre 2 cases qui se touchent. On peut voir ce territoire comme un sous-ensemble du carré 7 par 7 et construire la solution ci-dessus de proche en proche en raisonnant sur les lignes ou les colonnes et en plaçant un piège toutes les deux cases.

Chasse à la bête trimino long sur le territoire T3



Solution à 13 pièges