Explications

Pour deux clous, les parcours qui conviennent sont ceux pour lesquels le nombre total de tours de ficelle autour de chaque clou est nul ; autrement dit, la ficelle tourne autour de chaque clou autant de fois dans le sens des aiguille d'une montre que dans le sens inverse. Le codage rend la situation limpide : le mot convient si et seulement si il y a autant de a que de A et autant de b que de B.

Ceci se généralise à un plus grand nombre de lettres : on considère un parcours de la ficelle autour de (par exemple) 26 clous, codé par un mot sur l'alphabet a,A,b,B,...,z,Z. Retirer un clou revient à supprimer dans notre mot toutes les lettres correspondant à ce clou. Le tableau tombe si et seulement si le mot devient "trivial", au sens où en utilisant les règles $aA = Aa = bB = Bb = \cdots = 1$ on arrive à supprimer successivement toutes les lettres du mot. Cette description ne nous dit pas comment trouver un mot qui convienne ; ici les commutateurs peuvent aider. Pour un mot m, on note M le mot inverse, celui qu'entre matheux on noterait m^{-1}, et on note $[m, n]$ le commutateur $mnMN$. Pour deux clous, le mot le plus simple qui convienne est $[a, b] = abAB$. Pour trois clous, une solution est donnée par le commutateur

$$[[a, b], c].$$

De façon générale, si m est un mot sur les 25 premières lettres (et leurs majuscules) qui convient pour 25 clous, alors le mot $[m, z]$ convient pour 26 clous. (Je ne sais pas décrire explicitement tous les mots qui conviennent pour plus de deux lettres, en particulier je ne sais pas si le lien avec les commutateurs est fondamental ; en particulier, je ne sais pas trouver les plus courts).

Ceux qui connaissent auront reconnu le groupe libre ; pour ceux qui ne connaissent pas : on travaille avec les mots en a, A, b, B, et les règles $aA = Aa = bB = Bb = 1$. L'ensemble de tous les mots, quotienté par la relation d'équivalence engendrée par les règles, définit un ensemble G ; la loi de concaténation des mots le muni d'une loi de groupe. Ce groupe est le groupe libre à deux générateurs ; la construction se généralise à un nombre quelconque de lettres. Dans ce groupe, chaque élément a un unique représentant qui est un "mot réduit", c'est-à-dire dans lequel aucune lettre n'est suivie de son inverse. Supprimer toutes les occurrences d'une lettre et de son inverse définit un morphisme de groupe dans le groupe libre avec un générateur de moins ; les mots qui conviennent à notre problème sont ceux qui sont dans l'intersection des noyaux de tous ces morphismes.

Aides

La première question est sans doute la plus difficile, mais les ficelles permettent de faire des essais. Pour aider ceux qui bloquent vraiment, sans comprendre quelle liberté on a, on peut commencer par leur montrer une configuration non standard, par exemple celle où les deux brins issus du tableau passent par dessus le premier clou et se rejoignent en entourant le deuxième. On fait remarquer que ça marche lorsqu'on retire le deuxième, mais pas le premier. Quel est le problème ? (La corde fait un tour autour du second clou, comment faire pour "défaire" ce tour ?)

Pour la question à trois clous, on peut introduire les commutateurs, y compris la notation $[a, b]$.