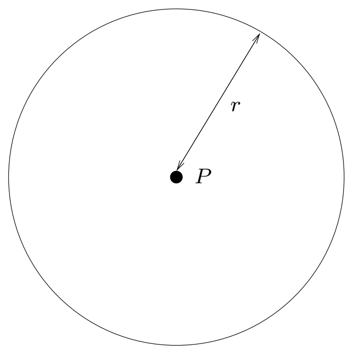
Le rallye des chèvres
Fiche animateur

Le but de cet atelier est d'introduire et de manipuler sur des exemples concrets les notions d'union, d'intersection et (pour les versions les plus avancées) de convexité.

1. La surface obtenue est un **disque**, de rayon r égal à la longueur de la corde, et de centre P l'emplacement du piquet.

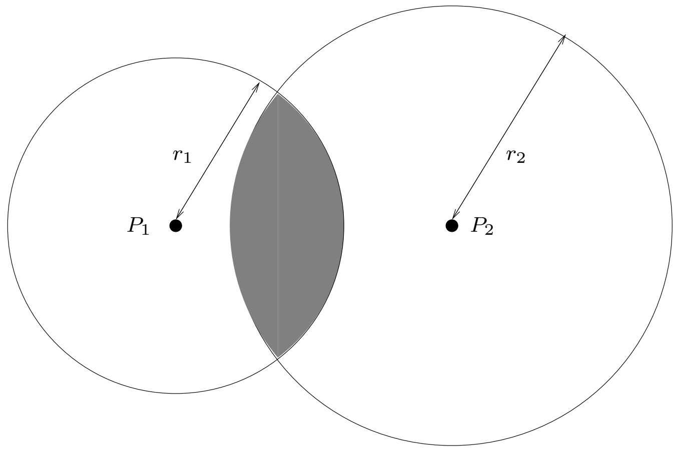


On peut demander aux participants du rallye quelle est l'aire de cette surface. En notant r la longueur de la corde, cette aire est égale à πr^2.

2. Pour pouvoir attacher Chavroux au piquet 1 avec une corde de longueur r_1 et au piquet 2 avec une corde de longueur r_2, il faut que la distance entre les piquets soit inférieure ou égale à la somme $r_1 + r_2$ des longueurs des deux cordes.

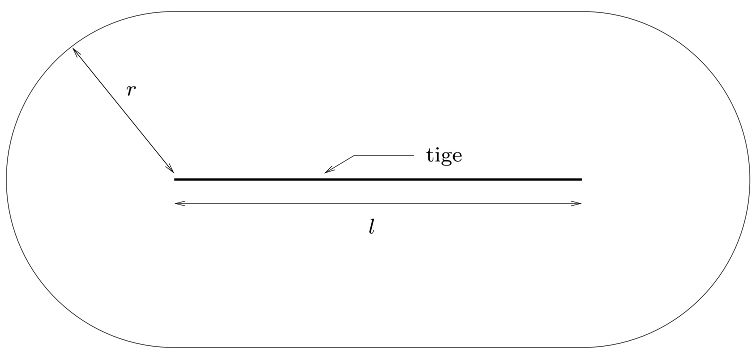
Attention, il s'agit bien de nouer chacune des deux cordes au collier de Chavroux, et non pas d'utiliser une seule corde qui serait attachée aux piquets 1 et 2 à ses extrêmités et qui passerait par le collier de Chavroux en y coulissant librement (dans ce cas on obtiendrait une ellipse).

Dans le cas où la distance entre les piquets est inférieure ou égale à la somme r_1+r_2 des longueurs des deux cordes, la surface que Chavroux peut brouter correspond à l'**intersection** du disque de centre P_1, le piquet 1, et de rayon r_1 avec le disque de centre P_2, le piquet 2, et de rayon r_2.



Si on combine trois piquets et trois cordes, la surface accessible à Chavroux sera l'intersection des trois disques correspondants, etc.

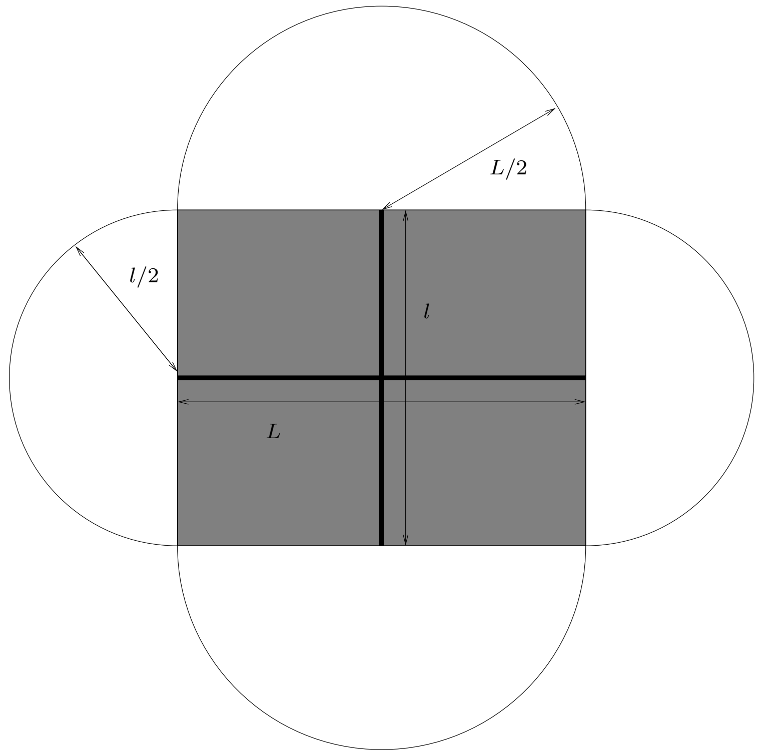
3. La surface que peut brouter Chavroux a la forme d'un stade. Notons l la longueur de la tige et r la longueur de la corde. Cette surface est l'**union** de tous les disques de rayon r dont le centre se situe sur la tige.



On peut demander de calculer l'aire de cette surface. Cette surface est un rectangle de dimension $l \times 2r$, auquel on a collé le long de chacun de ses côtés de longueur $2r$ un demi-disque de rayon r. Son aire est donc égale à $2rl + \pi r^2$.

4. On peut construire ce rectangle de taille $L \times l$ comme l'intersection de deux "stades". Il suffit de placer une première tige de longueur L et d'y attacher Chavroux à l'aide d'une corde de longueur $l/2$. On peut ensuite

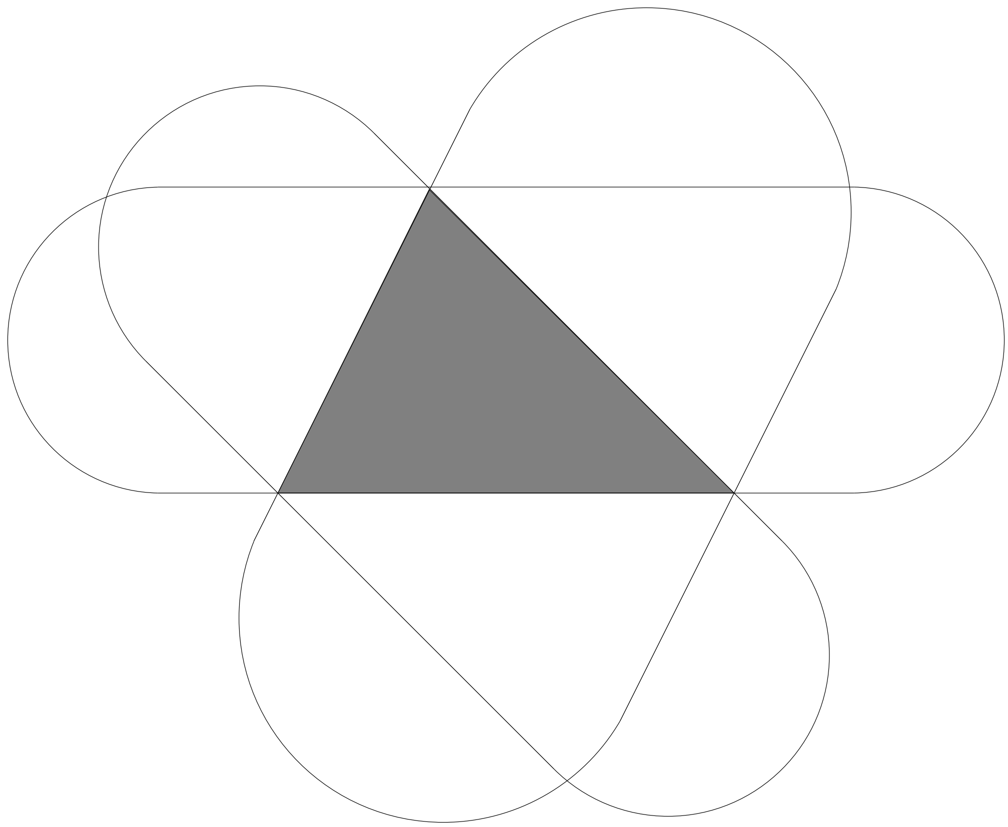
placer une deuxième tige de longueur l perpendiculairement à la première, de telle sorte que les deux tiges se coupent en leur milieu, et y attacher Chavroux avec une corde de longueur $L/2$.



Remarque : réaliser ceci dans la vraie vie pose en fait des problèmes pratiques, pour que les deux cordes ne s'emmêlent pas autour des tiges métalliques. Nous passons ces difficultés de réalisation technique sous silence, mais rassurez-vous des solutions existent bel et bien !

On peut demander aux participants du rallye ce qui arrive si on diminue la longueur d'une des deux cordes, ou si on l'augmente. Dans le premier cas, la surface obtenue est toujours un rectangle mais plus petit. Dans le deuxième cas par contre il ne s'agit plus d'un rectangle, puisqu'une partie de son bord est arrondie.

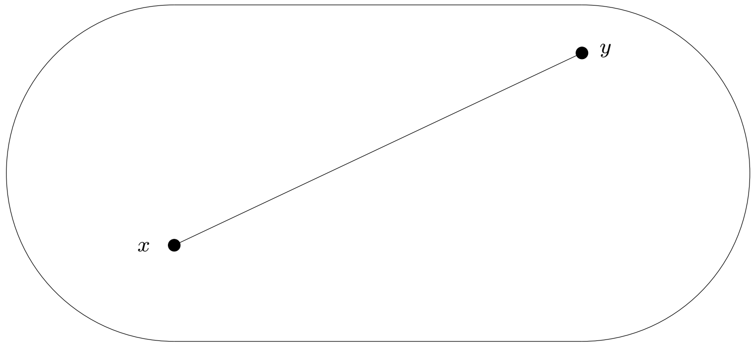
5. Là encore, on peut construire n'importe quel triangle comme étant égal à l'intersection de trois "stades". La réponse en images.



Pour la fiche orange, s'il reste un peu de temps, on pourra évoquer la problématique soulevée par la question 7.

6. Avec ce type d'attaches, la surface que Chavroux peut brouter est obtenue comme étant l'intersection de surfaces de type "stade". Il est difficile de décrire toutes les surfaces qui peuvent être obtenues ainsi. Néanmoins, on peut donner deux conditions nécessaires d'une part, et une condition suffisante d'autre part, pour qu'une surface puisse être réalisée.

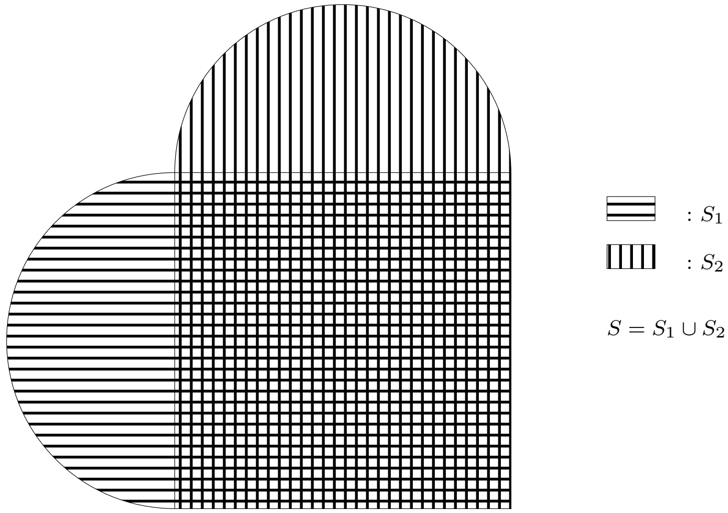
Commençons par les conditions nécessaires. Une surface de type "stade" est **bornée**, c'est-à-dire incluse dans une boule de rayon fini. Toute intersection de telles surfaces sera donc aussi bornée. Par ailleurs, une surface de type "stade" est aussi **convexe**, c'est-à-dire que si deux points x et y sont dans le stade, alors tout le segment $[x, y]$ est inclus dans le stade.



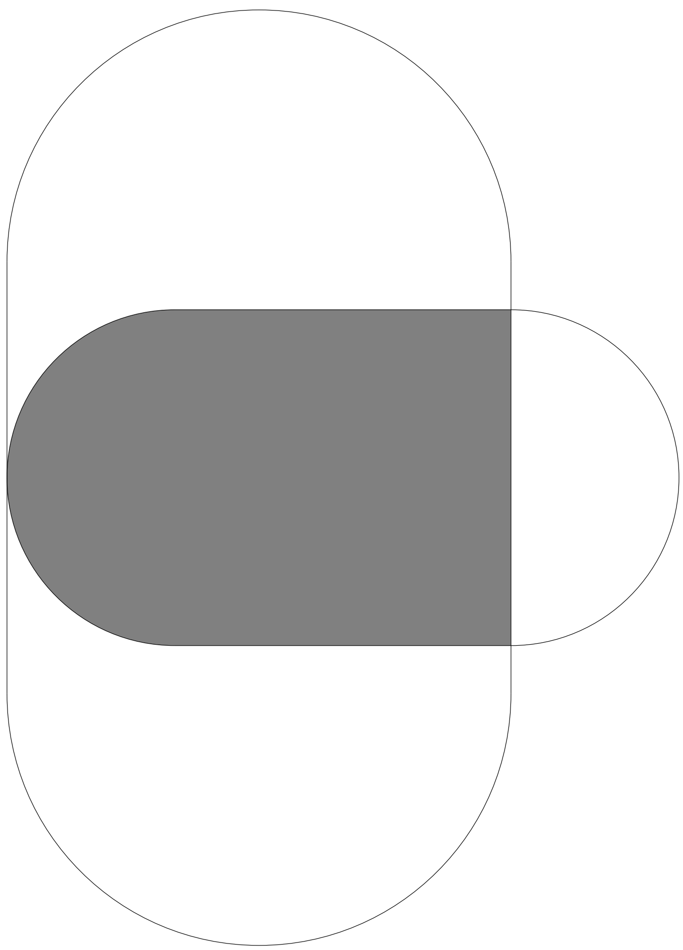
Cette propriété est préservée par intersection : toute intersection d'ensembles convexes est elle-même convexe. Ainsi, les surfaces que Madame Lulu peut espérer obtenir par cette méthode sont toutes nécessairement bornées et convexes.

Voyons maintenant une condition suffisante. Les questions 4. et 5. nous ont fait manipuler le triangle et le rectangle. Il s'agit de deux cas particuliers de **polygones**, c'est-à-dire d'ensembles du plan dont le bord est constitué dun nombre fini de segments. Tout polygone, à condition qu'il soit convexe, peut être réalisé comme intersection de surfaces de type "stade". Cela vient d'une propriété plus générale : un polygone convexe peut s'écrire comme l'intersection d'un nombre fini de demi-plans, dont les frontières sont exactement les droites qui contiennent les segments qui constituent le bord du polygone convexe.

7. Avec deux chèvres, chacune attachée à un ou des piquets ou tiges, Madame Lulu peut obtenir des surfaces S qui s'écrivent comme des unions de deux surfaces S_1 et S_2, chacune correspondant à la surface que peut brouter une des deux chèvres. Pour dessiner un cœur S, on peut écrire $S = S_1 \cup S_2$ où S_1 et S_2 sont deux stades tronqués comme représentés sur la figure ci-dessous.



Reste à réaliser S_1 et S_2 comme étant les zones respectives où peuvent brouter chacune des deux chèvres. On peut construire S_1 comme une intersection de deux surfaces de type "stade".



Il suffit donc d'attacher Chavroux à 2 tiges avec 2 cordes de longueurs adéquates pour que la zone de pelouse que Chavroux puisse brouter soit exactement S_1. Par symétrie, on peut restreindre son compagnon à brouter exactement la zone S_2 en l'attachant également à 2 tiges par 2 cordes, et ainsi réaliser le cœur S comme étant exactement la zone que l'une ou l'autre des chèvres peut brouter.

Si on considère 3 chèvres, on pourra réaliser des surfaces qui sont des unions de 3 ensembles, chacun de ces ensembles étant lui-même une intersection de différentes surfaces de type "stade", etc.