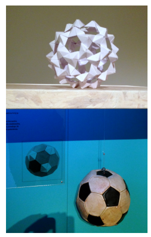
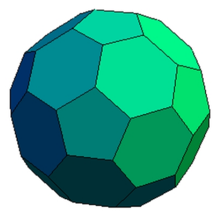
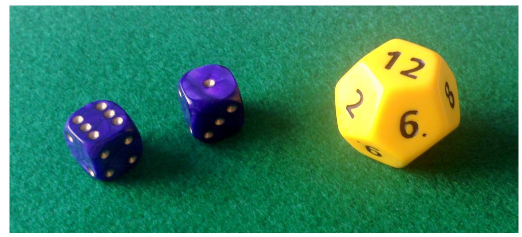
Probabilités et football

Franka Miriam Brückler
Paris, 2015.

À la découverte des probabilités

Au niveau jaune, on utilisera le vocabulaire des chances et non celui des probabilités, qui pourra être employé en gros à partir de la classe de Troisième (fin de). Dans les premières questions, on cherche des réponses intuitives, qui seront confrontées aux fréquences obtenues par la suite. Mais il est vrai qu'il est difficile d'intuiter par exemple la chance d'obtenir un total inférieur à 5 avec deux dés. Il sera bien de laisser les participants chercher un peu afin qu'ils arrivent à l'idée qu'il suffit de dessiner tous les cas, puis, pour gagner du temps, de leur sortir le tableau donnant tous les cas possibles pour faire le calcul. Pour les "petits", on leur donnera de suite le tableau, et on leur fera compter le nombres de cas possibles, et entourer les "cas favorables". On a représenté l'univers avec les 36 cas pour deux dés de couleur différrentes, afin d'éviter les questions dans le cas de deux dés de même couleur où il pourrait être tentant de regarder les paires et non les couples de résultat, car c'est plus compliqué.

⚀ **On joue avec deux dés à 6 faces. Essayez de trouver intuitivement quelle est la chance :**

- **d'obtenir un ⚁ avec un dé à 6 faces ?** *1 chance sur 6*
- **de ne pas obtenir un ⚁ avec un dé à 6 faces ?** *5 chances sur 6*
- **d'obtenir ⚀⚀ en lançant deux dés à 6 faces ?** *1 chance sur 36*
- **d'obtenir un total de 5 en lançant deux dés à 6 faces ?** *4 chances sur 36*
- **d'obtenir un total plus petit que ou égal à 5 en lançant deux dés à 6 faces ?** *10 chances sur 36*

⚁ **On joue maintenant avec un dé à 12 faces. Intuitivement quelle est la chance d'obtenir un 2 ?** *1 chance sur 12*

⚂ **Si on lance un certain nombre de fois les deux dés à 6 faces, en notant la somme des 2 dés, puis qu'on lance le même nombre de fois le dé à 12 faces, pensez-vous que les différents résultats possibles apparaissent à peu près le même nombre de fois ?** *Non, par exemple impossible d'obtenir 1 en lançant deux dés à 6 faces...*

⚃ **Vous allez maintenant lancer ces trois dés.** *Les enfants ne connaissent pas en général la notion de quotient encore moins celle de rapport ; on pourra utiliser ces mots, mais seulement après les avoir expliqués, d'où la rédaction des questions au niveau jaune. Pour gagner du temps, on peut mettre les scolaires par groupes de 4, un qui lance le dé à 12 faces, deux pour les dés à 6 faces et un qui note et remplit le tableau. On aura un tableau en partie rempli pour gagner du temps car 30 lancers, cela risque d'être long. Cette question est typiquement dans l'esprit du programme de Troisième.* **...**

⚄ **Utilisez le tableau des fréquences (tableau 3) pour répondre aux questions suivantes, et comparez vos réponses avec celles données intuitivement au début...**
Les fréquences des différents résultats sur la somme de deux dés à 6 faces et sur le dé à 12 faces sont-elles les mêmes ? *Non, impossible d'obtenir* 1 *avec deux dés !*

⚅ *Vous pouvez expliquer que cette activité montre que les fréquences, en particulier quand elles sont calculées à partir d'un grand nombre de lancers, peuvent être utilisées comme des approximations des chances / probabilités théoriques***.**
Vous pouvez montrer les différents dés à 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 *et* 20 *faces. On fournit un tableau des valeurs approchées de 1/n pour gagner du temps pour remplir le tableau 4***.**

⚽⚽⚽ Conclusion ⚽⚽⚽

Pour conclure, vous pourrez faire le bilan de ce qui a été vu dans cette partie.
Plus vous réalisez de lancers, plus la fréquence d'un événement sera proche de la chance (resp. probabilité) théorique.
Si la chance qu'un événement arrive (resp. la probabilité d'un événement) est p, la chance qu'il n'arrive pas (resp. la probabilité de l'événement contraire) est $1 - p$.
Si des événements ne peuvent arriver en même temps, la chance (resp. la probabilité) qu'au moins un des deux arrive est la somme des chances que chacun d'eux arrive (resp. des probabilités de chacun d'eux).
Si deux événements sont indépendants (c'est-à-dire le fait que l'un arrive n'influence pas l'autre et vice-versa), la chance (resp. la probabilité) que les deux arrivent est le produit des chances (resp. des probabilités) de chacun d'eux.

⚽⚽⚽

Le paradoxe des anniversaires

Parfois, on peut avoir une bonne intuition à propos des chances qu'un événement se produise. Mais attention, il existe plein de résultats qui ne sont pas du tout intuitifs ! L'un d'entre eux concerne le "paradoxe des anniversaires".

Pour les scolaires, afin de gagner du temps, on choisira la date d'anniversaire de l'un des élèves et c'est cella-là que l'on cherchera dans les tables.

⚀ **À votre avis, sans aucun calcul, combien faut-il de personnes dans un groupe pour qu'il y ait plus d'une chance sur deux qu'il y ait dans ce groupe au moins une personne ayant la même date d'anniversaire que la vôtre ?**
S'il y a 30 personnes, pensez-vous qu'il est probable que quelqu'un partage votre date d'anniversaire ?

⚁ **À votre avis, toujours sans calculs, combien de personnes doivent être réunies pour qu'il y ait plus d'une chance sur deux qu'il y ait au moins deux personnes partageant la même date d'anniversaire ?**
Si 30 personnes sont réunies, pensez-vous qu'il soit probable qu'il y ait au moins deux personnes partageant la même date d'anniversaire ?
En fait, à partir de 23 personnes, il y a plus d'une chance sur deux que ce soit le cas, mais cela n'a rien d'intuitif, on ne demande ici aucun calcul, juste ce que les gens en pensent. Voir plus loin. On demande juste ce que les gens en pensent, pas de calcul.

⚂ *Expliquez alors que nous avons vu que la chance qu'un événement se produise (resp. la probabilité d'un événement) diffère peu de la fréquence quand on procède à un nombre assez grand d'essais. Ainsi, pour les questions ci-dessus, on pourrait faire des essais en prenant au hasard des groupes de personnes d'une taille donnée, par exemple 30 personnes, et en vérifiant si, parmi elles, se trouve quelqu'un qui a la même date d'anniversaire que le participant, ou s'il y en a deux qui partagent la même date d'anniversaire. Si on ne s'est pas trompé dans les réponses aux questions précédentes, et si on examine un nombre suffisamment grand de groupes de 30 personnes, dans plus (ou moins suivant la réponse du participant) de la moitié des groupes, il devrait y avoir une ou deux personnes partageant sa date d'anniversaire.*

Vous avez à votre disposition les tables des dates de naissance des joueurs de la coupe du monde de football 2014. Dans chaque équipe, il y a 30 joueurs.

⚃ **Reprenez les tables des dates de naissance des joueurs.**

- **Dans combien d'équipes y a-t-il au moins 2 joueurs ayant la même date d'anniversaire ?**
  Argentine, Australie, Bosnie-Herzégovine, Brésil, Cameroun, Colombie, Costa Rica, Croatie, Équateur, Angleterre, France, Ghana, Grèce, Honduras, Iran, Japon, Corée, Mexique, Pays-Bas, Nigéria, Russie, Espagne, Suisse, USA, soit 24 équipes sur 32 équipes, d'où une proportion de 75%.
  Voir un peu plus bas le calcul théorique qui donne 71% si on suppose les dates d'anniversaire uniformément réparties dans l'année, ce qui n'est pas tout à fait exact, de sorte que la probabilité que deux personnes soient nées le même jour dans un groupe de n personnes est encore plus forte que le calcul théorique. Le 75% est donc parfaitement cohérent.

- **Pouvez-vous en déduire une estimation de la chance qu'au moins deux personnes partagent la même date d'anniversaire dans un groupe de 30 personnes ?**

Ces estimations sont-elles proches de vos prévisions ?

⚽⚽⚽ Conclusions ⚽⚽⚽

Pour conclure sur cette partie, expliquez qu'il faut faire très attention quand on calcule des chances (resp. probabilités). Ce n'est pas la même chose de demander si quelqu'un fête son anniversaire le même jour que vous, ou de se demander si deux personnes dans un groupe fêtent leur anniversaire un même jour quelconque. Il faut au moins 253 personnes pour qu'il y ait au moins une chance sur deux que quelqu'un fête son anniversaire le même jour que vous, alors qu'il faut seulement un groupe de 23 personnes pour qu'il y ait au moins une chance sur deux pour que deux personnes de ce groupe aient une date d'anniversaire commune.
En effet, supposons que n *personnes sont dans une même salle. On ne considérera pas les années bissextiles.*
L'univers Ω *est formé de tous les* n*-uplets de jours d'anniversaire. On a donc* $\Omega = \{1, \cdots, 365\}^n$ *et* $Card(\Omega) = 365^n$*. On suppose que les dates d'anniversaire sont distribuées "au hasard" sur l'année (ce qui n'est pas réaliste en fait), de sorte que l'on munit* Ω *de la probabilité uniforme, notée* $\mathbb{P}$*. Ainsi, si* $E \in \mathcal{P}(\Omega)$ *est un événement,* $\mathbb{P}(E) = \frac{Card(E)}{Card(\Omega)}$*.*

On considère l'événement E *"il existe une personne ayant la même date d'anniversaire que moi". L'evénement contraire* $\overline{E}$ *est "aucune des* n *personnes n'a la même date d'anniversaire que moi", ce qui signifie qu'elles sont toutes nées l'un des 364 jours qui ne correspondent pas à ma date d'anniversaire.*

$$\mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}(\overline{E}) = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n.$$

Il s'ensuit

$$\mathbb{P}(E) > \frac{1}{2} \Longleftrightarrow n > \frac{\ln 2}{\ln(\frac{365}{364})} \Longleftrightarrow n \geq 253.$$

On considère cette fois l'événement E *"les personnes ont toutes leur anniversaire un jour différent". L'événement* E *est formé de tous les échantillons de taille* n *sans répétition, donc*

$$Card(E) = A_{365}^n = 365.364.363. \dots .(365 - n + 1),$$

et

$$\mathbb{P}(E) = \frac{A_{365}^n}{(365)^n}.$$

La probabilité qu'au moins deux personnes aient leur anniversaire le même jour est la probabilité de l'événement contraire, et est donc égale à $1 - \frac{A_{365}^n}{(365)^n}$*. Si* $n = 23$*, cette probabilité vaut environ* $0,507$*...*
Elle est d'environ 0,97 s'il y a 50 personnes, d'environ 0,999 s'il y en a 100, et égale à 1 *si* $n \geq 366$ *!*
Pour n=30, le cas des équipes de football lors de la coupe du monde 2014, cette probabilité vaut environ 0,706 (à comparer avec la féquence trouvée égale à 75%).

⚽⚽⚽

Tirs au but : une introduction à la modélisation mathématique

Le tableau suivant indique le nombre de tirs au but durant les trois dernières années de la Ligue 1 (en France) et des trois dernières finales de Coupe du monde, et le calcul des fréquences correspondantes !

	Ligue 1 14/15	Ligue 1 13/14	Ligue 1 12/13	WC2014	WC2010	WC2006
Tirs au but tentés	126	79	71	36	32	26
Tirs au but réussis	103	66	64	26	23	38
Fréquence (en %)	81,75%	83,54%	90,14%	72,22%	71,88%	68,42%

En fait, dans la plupart des ligues et championnats de football, environ 70 % à 80 % de tirs au but se transforment en buts.
Vous pouvez expliquer qu'en fait, ces chiffres peuvent aussi être retrouvés à l'aide d'arguments géométriques et physiques, mais ça n'est pas notre sujet de préoccupation ici. Il est communément admis qu'un tir au but est une sorte de loterie, aussi bien pour le tireur que pour le gardien. Par une modélisation probabiliste simple, en supposant que cet effet de loterie est vrai, on peut vérifier que les pourcentages annoncés sont raisonnables. C'est ce que l'on va faire, en commençant par un modèlle trop simple, on demandera au participant pourquoi plus tard.

⚀ **La cage est divisée en 4 zones.**

- **Quelle est la probabilité que le gardien devine où il doit se placer pour arrêter le tir ? 1/4**
- **Quelle est la probabilité de marquer un but dans ce scénario simple ? 3/4**
- **Les hypothèses de ce scénario sont-elles réalistes ? Que manque-t-il ?** *À ce stade, on cherche juste à faire dire que 4 zones, ce n'est pas assez.*

⚁ **D'après vous, du point de vue du gardien, en combien de zones est-il raisonnable de considérer que la cage est divisée ? Le symbole ⚽ va représenter ce nombre.**

Devant vous se trouvent des perles en plastique de deux couleurs. Prenez ⚽-1 perles de couleur 1 et 1 perle de couleur 2 et mettez-les dans la première boîte. La perle de couleur 2 représente le gardien arrêtant le but.

Si vous fermez les yeux et que vous choisissez une perle dans la boîte, quelle est la probabilité de tirer une perle de couleur 1 ? *(i.e. que le but soit marqué) ?*

⚂ **Zlatan Ibrahimović a loupé la cage en 2013 et David Trézéguet en finale de la coupe du monde 2006, laissant la coupe l'Italie ?**

Évidemment, chez les professionnels, il est peu probable qu'un joueur manque la cage. Choisissez un pourcentage dans le tableau ci-dessous et prenez le nombre de perles correspondant. Mettez-les dans la deuxième boîte. Les perles de couleur 2 représentent les loupés.

⚃ **Maintenant, fermez les yeux et tirez une perle dans chacune des deux boîtes. Si aucune d'elles n'est de couleur 2, cela correspond dans notre modèle à un but marqué. Notez le résultat du tirage, remettez les perles dans leurs boîtes de départ et recommencez l'expérience 30 fois.**

- **Quel est le nombre de "buts marqués" sur ces 30 essais ?**

- **Quelle est la fréquence des tirs au but transformés dans notre modèle ? Comparez ce nombre aux pourcentages annoncés au début !**

⚄ **Si la probabilité que le gardien fasse le mauvais choix est** p **et que la probabilité que le tireur ne manque pas la cage est** q**, quelle est la probabilité que le but soit marqué ? Vous pouvez utilisez la fréquence obtenue à la question ⚄ ci-dessus pour trouver la réponse à cette question.** *Il faudrait trouver le produit pq.*

⚽⚽⚽

Cotes et coefficients de paris

⚀ **Imaginez que vous pariez sur le résultat d'un lancer de pièce avec quelqu'un, vous pariez sur "face" et votre adversaire parie sur "pile".**

- **Quelle est la probabilité que vous remportiez le pari ? Et votre adversaire ?** *La pièce n'étant pas truquée - on laisse le participant se poser la question - chaque joueur a une probabilité égale à 1/2 de gagner.*

- **Combien y a-t-il de résultats possibles à ce pari ?** *2, pile ou face*

On dit que votre *cote* dans ce jeu est donnée par le rapport

nombre de résultats possibles en votre faveur **:** ***nombre de résultats possibles en votre défaveur.***

- **Quelle est votre cote dans ce jeu ?** *1 résultat en notre faveur, 1 résultat en notre défaveur, la cote vaut donc 1 ; d'où l'expression "cote 1 contre 1"*

- **Si vous pariez une somme ☺ sur un lancer de pièce, et que le gagnant remporte les 2 mises, quelle somme votre adversaire doit parier pour que le jeu soit équitable ? Exactement ☺, plus que ☺ ou moins que ☺ ?** *Par symétrie du jeu, l'adversaire doit miser exactement ☺*

- **Dans le cas où ☺=1, quelle somme récupérez-vous si vous gagnez le pari (en comptant votre mise et celle de l'adversaire) ? Et si vous misez une somme ☺ quelconque ?** *On récupère la mise ☺=1 et celle de l'adversaire ☺=1, donc 2, mais attention, on n'a gagné que 1. Si on mise ☺, on récupère 2 ☺ quand on gagne.*

On appelle *coefficient* de votre pari le nombre c tel que vous récupérez c fois votre mise lorsque vous gagnez.

- **Quel est le lien entre la probabilité que vous remportiez le pari et votre coefficient de pari ?** *Il semble que le* coefficient *soit égal à l'inverse de la probabilité de remporter le pari, mais cela pourrait être une autre formule. Regardons ce qui se passe si la pièce est truquée et que l'on a une probabilité p de gagner, $1-p$ de perdre. Si on mise ☺, par définition du coefficient de pari, on récupère c ☺ quand on gagne, de sorte que l'espérance de gain est -☺+ c ☺ p (n'oublions pas que l'on a misé ☺). Or le jeu est équitable, donc cette quantité est nulle, d'où c=1/p.*

On admet que cette relation reste vraie si la probabilité que vous gagniez est p et non plus $1/2$. Dans la suite, on va vérifier cette relation à partir des fréquences.

⚁ *On impose à tout le monde la même probabilité, 25%, de gagner son pari, pour des raisons de simplicité.*

- **Quelle est la cote correspondante ?** *1 cas en notre faveur et 3 cas en notre défaveur, donc cote de 1:3 ou 1 contre 3*

- **Quel est le coefficient (pour un jeu équitable) correspondant ? On le notera ⚽.** *Ici $p = 1/4$ d'où ⚽=1/p=4.*

⚂ Les sites de paris proposent en principe des coefficients plus bas que si le jeu était équitable, de façon à gagner de l'argent. Nous allons utiliser un dé à 12 faces pour tester ce qu'on gagne ou perd si on prend un coefficient égal à ⚽ et si on prend un coefficient égal ⚽-0,4.
Sur les 12 résultats possibles du dé, les résultats de 1 à 3 vont représenter des matchs se finissant sur un nul.

- **Lancez le dé à 12 faces 30 fois et notez les résultats obtenus dans le tableau 6.**
- **Combien de "matchs nuls" avez-vous obtenus ?**
- **Si vous aviez parié la somme 1 sur chaque match, combien auriez-vous gagné ou perdu avec le coefficient de pari ⚽ ? Et avec le coefficient ⚽-0,4 ?**

Le passage de 4 à 3,6 peut paraître faible, mais normalement, on doit constater que les gains sont nettement moindres !

⚽⚽⚽

Tableau 4

Equipe	Buts	Tirs	Fréquence	Meilleur dé
Paris SG (M,L)	83	491	16,90%	6 faces
Olympique Lyon	72	524	13,74%	8 faces
Olympique Marseille	76	579	13,13%	8 faces
FC Evian T. G.	41	334	12,28%	8 faces
SM Caen (N)	54	462	11,69%	8 faces
HSC Montpellier	46	396	11,62%	8 faces
SC Bastia	37	320	11,56%	8 faces
AS Saint-Etienne	51	443	11,51%	8 faces
EA Guingamp (P)	41	359	11,42%	10 faces
AS Monaco	51	452	11,28%	10 faces
Stade Reims	47	441	10,66%	10 faces
OGC Nizza	44	418	10,53%	10 faces
FC Toulouse	43	431	9,98%	10 faces
Girondins Bordeaux	47	488	9,63%	10 faces
Stade Rennes	35	365	9,59%	10 faces
OSC Lille	43	463	9,29%	10 faces
FC Lorient	44	486	9,05%	12 faces
RC Lens (N)	32	411	7,79%	14 faces
FC Metz (N)	31	450	6,89%	16 faces
FC Nantes	29	424	6,84%	16 faces

Données issues de http://www.squawka.com/football-team-rankings