Fiche animateur: jeux de la tablette

1 Fiche jaune

Le but est de faire comprendre le jeu de la course à 20 dans une version chocolat. Les règles du jeu sont les suivantes :

- On dispose d'une boîte de 21 chocolats, dans laquelle un carré est empoisonné et signalé d'un emballage rouge.
- Chacun leur tour, les deux joueurs mangent 1, 2 ou 3 chocolats de leur choix.
- Le joueur qui mange le chocolat empoisonné meurt dans d'atroces souffrances (et a donc perdu).

Dans ce jeu, le joueur qui commence a une stratégie gagnante, c'est-à-dire une manière de jouer qui lui permet de gagner à tous les coups. Le but de l'atelier est de comprendre ce qu'est une stratégie gagnante et de l'expliciter.

Ici la stratégie est basée sur le fait que l'on peut toujours forcer le nombre de chocolats à diminuer de 4 en jouant le complémentaire du coup de son adversaire ($1 \to 3$, $2 \to 2$, $3 \to 1$). Puisqu'on part de 21 chocolats c'est le deuxième joueur a une stratégie gagnante : il pourra faire en sorte que le nombre de chocolats descende jusqu'à 1.

Plus généralement si le nombre de chocolats est congru à 1 modulo 4, le joueur 2 a une stratégie gagnante, et sinon c'est le joueur 1 qui a une stratégie gagnante (son premier coup consiste à ramener le nombre de chocolats à quelque chose de congru à 1 modulo 4).

Il faut bien faire comprendre que le fait d'avoir une stratégie gagnante ne veut pas dire qu'on gagne à tous les coups, mais seulement qu'on gagne à tous les coups si on joue bien.

Questions bonus : On peut demander ce qui se passe avec un nombre différent de chocolats (22), ou si on autorise à enlever 1,2,3 ou 4 chocolats. Une question plus difficile : si on autorise à enlever 1, 2 ou 4 chocolats (réponse : on peut alors forcer que le nombre de chocolats reste constant modulo 3 (si 1 je joue 2, si 2 je joue 1, si 4 je joue 2). Il faut alors faire en sorte qu'il reste égal à 1 modulo 3 après notre coup. Par exemple pour 21 chocolats, c'est le joueur 1 qui a une stratégie gagnante en commençant par enlever 2 chocolats).

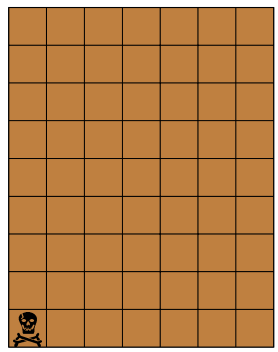
2 Fiche orange

Pour la première partie, cf. fiche jaune.

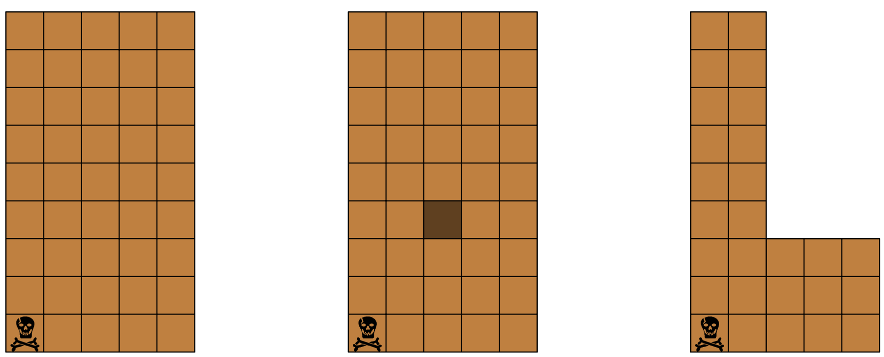
3 Fiche bleue

Le jeu de la tablette de chocolat mortelle

Deux joueurs ont une tablette de chocolat rectangulaire et dont le carré en bas à gauche est empoisonné.



Chacun leur tour, ils mangent des carrés de cette tablette selon la règle suivante : ils choisissent un carré et mangent également tous ceux qui sont à droite ou au-dessus de ce carré. Par exemple, un coup se joue comme cela :



Le joueur qui mange le carré empoisonné a perdu.

Existence d'une stratégie gagnante...

Peut-être essayer d'expliquer cela à partir de l'arbre du jeu ? Racine de l'arbre = état de départ du jeu. Ensuite, on représente tous les premiers coups possibles du joueur 1 par des flèches partant de la racine et arrivant à un sommet qui représente l'état du jeu après ce coup du joueur 1. En partant de chaque sommet, on représente tous les coups que pourrait alors jouer le joueur 2 etc.

On veut étiqueter les sommets de telle sorte qu'il soit étiqueté 1 si à partir de cet état du jeu, le joueur 1 possède une stratégie gagnante et 2 si à partir de ce sommet, le joueur 2 a une stratégie gagnante. On veut montrer qu'on peut étiqueter la racine, pour cela on étiquette récursivement tous les sommets, en partant des feuilles.

On étiquette les feuilles, qui représentent les états finaux du jeu par 1 si le joueur 1 a gagné, 2 si le joueur 2 a gagné. Ensuite, pour étiqueter un sommet si tous ses fils sont étiquetés :

- si c'est au joueur 1 de jouer :
  - si tous les fils sont étiquetés 2, quoi que fasse le joueur 1, il amène le jeu dans un état où l'autre joueur a une stratégie gagnante. → 2.
  - sinon, au moins un des fils est étiqueté 1. En jouant un tel coup, le joueur 1 amène le jeu à un état où il a une stratégie gagnante. → 1.
- si c'est au joueur 2 de jouer :
  - si tous les fils sont étiquetés 1, quoi que fasse le joueur 2, il amène le jeu dans un état où l'autre joueur a une stratégie gagnante. → 1.
  - sinon, au moins un des fils est étiqueté 2. En jouant un tel coup, le joueur 2 amène le jeu à un état où il a une stratégie gagnante. → 2.

... pour le premier joueur

On se place dans le cas où la tablette contient strictement plus d'un carré (s'il n'y en a qu'un, c'est évidemment le deuxième joueur qui gagne...). On peut montrer en ce cas que c'est nécessairement le premier joueur qui a une stratégie gagnante, sans pour autant pouvoir l'expliciter.

En effet, supposons par l'absurde que le deuxième joueur ait une stratégie gagnante. Si le premier coup du premier joueur est de ne manger que le carré en haut à droite, le deuxième sait donc répondre à ce coup de manière à avoir toujours une stratégie gagnante. Or, ce coup du deuxième joueur aurait pu être joué directement par le premier joueur, qui avait donc une stratégie gagnante ! Contradiction.

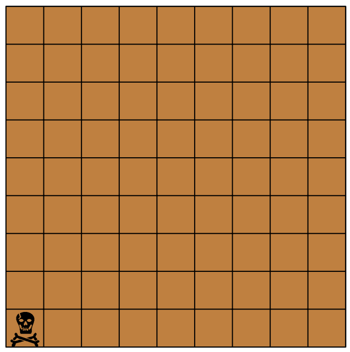
Remarque : on appelle souvent ce raisonnement « vol de stratégie ».

Stratégie explicite dans quelques cas simples

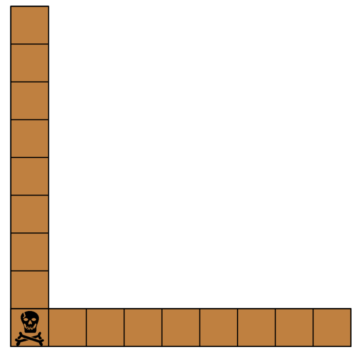
En général, on ne sait pas expliciter une stratégie gagnante (même avec un ordinateur, dès que la tablette est un peu grande – à préciser). Le jeu présente donc toujours un intérêt ! Néanmoins, dans certains cas simples on peut les trouver.

tablette carrée (ou jeu de Nim)

Pour l'instant je n'ai pas trop d'idée de comment amener à la réponse sans vendre la mèche. Voici donc une stratégie gagnante. Le premier joueur mange le carré juste au-dessus à droite de celui empoisonné, de manière à ne laisser qu'une ligne et une colonne :



Départ :
tablette carrée

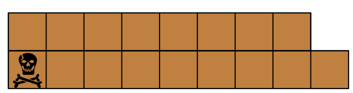


Premier coup
joueur 1

Là, pour ceux qui connaissent, c'est le jeu de Nim. Le deuxième joueur mange un certain nombre de carrés sur la ligne ou sur la colonne. En réponse, le premier joueur en mange le même nombre sur la colonne ou sur la ligne (équilibrant les deux « branches »). C'est ainsi le deuxième joueur qui finit par manger le carré empoisonné.

tablette à deux rangées

Indication : quoi que joue le joueur 2, à chaque tour du jeu le joueur 1 peut toujours se ramener à une configuration du type :



4 Un peu plus sur les jeux finis

On s'intéresse aux jeux finis, c'est-à-dire aux jeux à deux joueurs où il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que au bout de au plus N tours, l'un des deux joueurs aura gagné. On peut les modéliser ainsi : on a un ensemble A (ensemble des coups possibles), et on définit un jeu sur A de longueur N comme la donnée d'un ensemble J non vide de suites finies d'éléments de A de longueur au plus N tel qu'aucun élément de J ne soit le préfixe d'un autre élément de J (J comme l'ensemble non vide des parties terminées possibles) et d'un sous-ensemble V de J (l'ensemble des parties remportées par le joueur 1). Une position (légale) est une suite finie qui est le préfixe d'un élément de J.

Par exemple, pour le jeu de la tablette dans la fiche jaune, $N = 21$, et J est l'ensemble des suites finies d'éléments de $\{1, 2, 3\}$ de somme 21, et V est le sous-ensemble des suites dans J de longueur paire (le joueur 1 gagne si c'est le joueur 2 qui a joué en dernier). Pour le jeu de la tablette, c'est déjà plus pénible à écrire proprement mais on voit qu'on est bien dans ce cadre avec N le nombre de cases.

On peut voir que dans ces jeux, l'un des deux joueurs a toujours une stratégie gagnante :

- On peut montrer par induction qu'une position (un préfixe de J) est soit gagnante soit perdante (pour le joueur qui va jouer), l'induction se faisant sur le nombre d'étapes maximal avant que la partie finisse (c'est donc essentiellement la même preuve que celle qui est présentée dans la fiche bleue).
- Une manière plus visuelle d'expliquer la preuve précédente est de faire un arbre de tous les coups possibles à partir du début, et remonter depuis les feuilles de l'arbre pour savoir si chaque position est gagnante ou perdante. Plus précisément, on étiquette les feuilles, qui représentent les états finaux du jeu par 1 si le joueur 1 a gagné, 2 si le joueur 2 a gagné. Ensuite, pour étiqueter un sommet si tous ses fils sont étiquetés :
  - si c'est au joueur 1 de jouer :
    - si tous les fils sont étiquetés 2, quoi que fasse le joueur 1, il amène le jeu dans un état où l'autre joueur a une stratégie gagnante. $\to 2$.
    - sinon, au moins un des fils est étiqueté 1. En jouant un tel coup, le joueur 1 amène le jeu à un état où il a une stratégie gagnante. $\to 1$.
  - si c'est au joueur 2 de jouer :
    - si tous les fils sont étiquetés 1, quoi que fasse le joueur 2, il amène le jeu dans un état où l'autre joueur a une stratégie gagnante. $\to 1$.
    - sinon, au moins un des fils est étiqueté 2. En jouant un tel coup, le joueur 2 amène le jeu à un état où il a une stratégie gagnante. $\to 2$.
- Une manière différente de prouver ça est d'utiliser le principe tiers-exclu et de modifier un peu le formalisme. On va ajouter à A un symbole † qui signifie que le joueur ne fait rien (ce qui n'arrive qu'une fois la partie finie) et remplacer J par un ensemble $\tilde{J}$ où on ajoute à toutes les suites dans J de longueur $k < N$ un suffixe formé de $N - k$ fois le symbole †. On fait la même chose pour V ce qui nous donne un ensemble $\tilde{V}$. On obtient le même jeu que tout à l'heure mais maintenant les parties sont toutes de longueur N. Mettons que N soit pair pour simplifier la notation.

  Alors dire que le joueur I a une stratégie gagnante, c'est dire qu'il existe un coup légal a_1 tel que pour tout coup légal a_2, il existe un coup légal a_3 tel que pour tout coup légal a_4,..., tel que pour tout coup légal a_N, la suite $(a_1, a_2, ..., a_N)$ est dans V.

  La négation de la phrase précédente est : pour tout coup légal a_1, il existe un coup légal a_2 tel que pour tout coup légal a_3 il existe un coup légal a_4..., il existe un coup légal a_N tel que la suite $(a_1, a_2, ..., a_N)$ n'est pas dans V. Ceci veut précisément dire que le joueur II a une stratégie gagnante ! Ainsi d'après le principe du tiers-exclu, l'un des deux joueurs a forcément une stratégie gagnante.

Dans le jeu de la tablette, l'argument de vol de stratégie exposé dans la fiche bleue permet de dire que le joueur I a une stratégie gagnante. Le même type d'argument s'applique au jeu de hex.

Le jeux d'échec ne rentre pas tout à fait dans ce cadre puisqu'il y a les cas de pat, mais c'est tout de même un jeu fini à cause de la règle qui dit que si on observe la même position sur l'échiquier trois fois, la partie est pat. Ça permet de montrer avec les mêmes arguments que précédemment que l'un des deux joueurs a une stratégie non perdante (qui le mène soit à pat soit à une victoire). On ne sait bien sûr pas lequel possède cette stratégie non perdante, ni si elle est en fait gagnante ! On observe cependant que le joueur qui commence (le blanc) gagne plus souvent...

On peut aussi regarder les jeux infinis, où J et V deviennent des sous-ensembles de $A^{\mathbb{N}}$, et où on demande que J soit fermé. Sous l'axiome du choix, on sait alors montrer qu'il existe des jeux sur $A = \{0, 1\}$ ou aucun des deux joueurs n'a une stratégie gagnante. On sait aussi que si A est dénombrable, et si V est un borélien, alors un des deux joueurs a une stratégie gagnante (on parle de jeu déterminé). Ce théorème dû a Martin a d'innombrables applications en théorie descriptive des ensembles. Un des sujets d'étude en théorie des ensembles est l'axiome de détermination, qui dit que si A est dénombrable, tout jeu sur A est déterminé. Un tel axiome contredit clairement l'axiome du choix, mais on ne sait pas s'il est compatible avec les autres axiomes de la théorie des ensembles. Il a cependant plein de conséquences sympathiques, comme le fait que tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ deviennent mesurables au sens de Lebesgue et au sens de Baire.