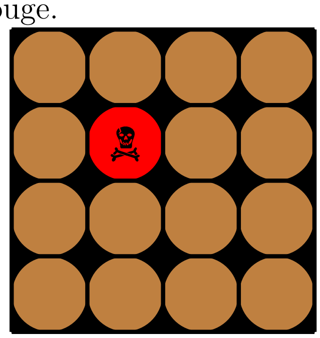
Chocolats mortels : Fiche animateur

La version jaune et la version orange présentent un jeu proche de « course à 20 », ou du « jeu des allumettes ». La version jaune s'arrête là. Dans la version orange, c'est juste un exemple simple pour comprendre la notion de *stratégie gagnante*, avant d'aborder un jeu un peu plus compliqué : le jeu de la tablette de chocolat. La version bleue s'intéresse à l'étude de ce jeu de tablette de chocolat (chomp game, en anglais).

1 Fiche jaune

Un matheux vous propose de jouer au jeu de la boîte de chocolats. En voici les règles :

— On dispose d'une boîte de 16 chocolats, dans laquelle un carré est empoisonné et signalé d'un emballage rouge.



— Chacun leur tour, les deux joueurs choisissent de manger 1 ou 2 chocolats.

— Le joueur qui mange le chocolat empoisonné meurt dans d'atroces souffrances (et a donc perdu).

Remarque : avec les plus jeunes, comprendre que l'ordre dans lequel on choisit les chocolats de la boîte ne compte pas est déjà important.

1. Jouez une ou deux parties deux par deux, puis jouez quelques parties contre un mathématicien. Qui gagne le plus souvent ? Celui qui commence ou l'autre ?
   Quand les gens jouent un peu au hasard, il n'y a généralement pas de différence claire. Par contre, le mathématicien a tendance à gagner souvent...
2. Pour mieux comprendre ce jeu, on va maintenant jouer avec seulement 4 chocolats. Le mathématicien vous demande si vous voulez commencer ou si vous le laissez jouer le premier coup. Qu'en pensez-vous ?
   Il vaut mieux laisser le mathématicien commencer : s'il prend un chocolat, vous en prenez deux et il est contraint de prendre le carré empoisonné. S'il en prend

deux, vous n'en prenez qu'un et il est contraint de prendre le dernier.

3. On rajoute 3 chocolats, ce qui fait donc 7 carreaux. Vous jouez en deuxième. Comment faire pour être sûr de gagner ? *On se ramène au cas précédent : si le premier joueur prend un carreau, vous en prenez deux, s'il en prend deux vous en prenez un, et on est ramené à la question précédente.*
4. Un mathématicien prétend pouvoir gagner à tous les coups avec la boîte de 16 chocolats du début. Naturellement, vous le mettez au défi ! Il vous laisse choisir de jouer en premier ou en deuxième. Que choisissez-vous ?

Il faut choisir de jouer en deuxième. On laisse le carré empoisonné seul et on regroupe les autres trois par trois (mentalement pour ceux qui y arrivent, en les séparant physiquement avec ceux qui ont du mal à comprendre).

À chaque coup du premier joueur, on répond en prenant le complément à 3 *ce sa prise : 1 s'il en a pris 2, 2 s'il en a pris 1. En procédant ainsi c'est lui qui prendra le dernier carreau.*

Le nombre initial de carré est congru à 1 $\mod$ *3. Le premier joueur laisse un nombre de chocolats non congru à 1* $\mod$ *3. Le joueur deux peut alors, quoi qu'ait fait le joueur 1, ramener le nombre de chocolats à un nombre congru à 1* $\mod 3$*.... Bien sûr à ce niveau on ne parle pas de* $\mod 3$*, mais on peut facilement parler de reste dans la division par 3, et même aborder la notion avec ceux qui ne maîtrisent pas la division : on essaie de grouper les chocolats par paquets de 3, combien restent seuls à la fin ?*

Vous pouvez facilement ajouter des questions pour aller plus loin : que se passe-t-il si on change le nombre de chocolats de la boîte (pour un nombre congru à 1 $\mod 3$*, ou pas congru à* $1 \mod 3$*) ? Et si on autorise à prendre 1, 2 ou 3 chocolats à chaque coup (voir fiche orange) ?*

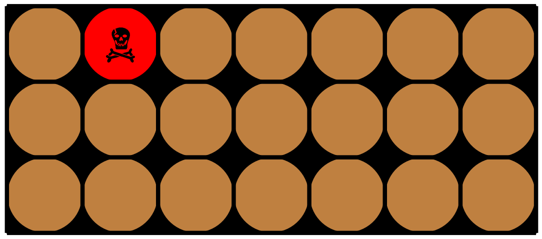
2 Fiche orange

Jeu de la boîte de chocolats

En résumé : c'est comme dans la fiche jaune, mais on autorise les joueurs à prendre 1,2 ou 3 chocolats. La boîte a un nombre de chocolats congru à $1 \mod 4$, le premier joueur laisse nécessairement un nombre non congru à $1 \mod 4$, le deuxième peut le ramener à un nombre congru à $1 \mod 4$ etc. Les explications détaillées sont ci-dessous.

Dans cette version orange du stand, le but de cette partie « boîte de cette partie est surtout d'amener à comprendre la notion de stratégie gagnante sur cet exemple assez simple, avant de passer à la suite.

On dispose d'une boîte de 21 chocolats, dans laquelle un chocolat est empoisonné et signalé d'un emballage rouge.



- Chacun leur tour, les deux joueurs mangent 1, 2 ou 3 chocolats de leur choix.
- Le joueur qui mange le chocolat empoisonné meurt dans d'atroces souffrances (et a donc perdu).

1. Jouez une ou deux parties deux par deux, puis jouez quelques parties contre un mathématicien. Qui gagne le plus souvent ? Celui qui commence ou l'autre ? *Quand les gens jouent un peu au hasard, il n'y a généralement pas de différence claire. Par contre, le mathématicien a tendance à gagner souvent...*
2. *Pour mieux comprendre ce jeu, on va maintenant jouer avec seulement 5 chocolats. Le mathématicien vous demande si vous voulez commencer ou si vous le laissez jouer le premier coup... que préférez-vous faire ? Il vaut mieux laisser le mathématicien commencer : s'il prend un chocolat, vous en prenez trois et il est contraint de prendre le carré empoisonné. S'il en prend deux, vous en prenez deux et il est contraint de prendre le dernier. S'il en prend un seul, vous en prenez trois et vous avez gagné.*
3. On rajoute 4 chocolats, ce qui fait donc 9 carreaux. Vous jouez en deuxième. Comment faire pour être sûr de gagner ? *On se ramène au cas précédent, en prenant « le complément à 4 » du nombre de chocolats pris par le premier joueur.*

   On dit que le deuxième joueur a une stratégie gagnante *: cela signifie qu'il a un plan de jeu qui lui permet de gagner, quoi que joue l'adversaire. Cela ne veut pas dire que le deuxième joueur gagnera à tous les coups, mais qu'il gagnera à tous les coups s'il joue bien. Les « bons » coups à jouer dépendent bien sûr de ceux joués par le premier joueur.*
4. Un matheux prétend pouvoir gagner à tous les coups avec le jeu de 21 chocolats. Naturellement, vous ne le croyez pas et le mettez au défi. Il vous laisse choisir de jouer en premier ou en deuxième. Que choisissez-vous ?

   Il faut choisir de jouer en deuxième. On laisse le carré empoisonné seul et on regroupe les autres quatre par quatre (mentalement, de préférence) :

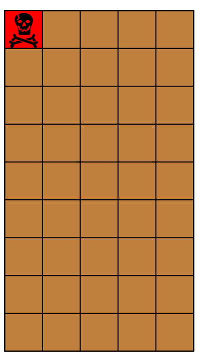
   À chaque coup du premier joueur, on répond en prenant le complément à 4 *de sa prise : 1 s'il en a pris 3, 2 s'il en a pris 2, 3 s'il en a pris 1. En procédant ainsi c'est lui qui prendra le dernier carreau.*

(Le nombre initial de carré est congru à 1 $\mod 4$. Le premier joueur laisse un nombre de chocolats non congru à $1 \mod 4$. Le joueur deux peut alors, quoi qu'ait fait le joueur 1, ramener le nombre de chocolats à un nombre congru à $1 \mod 4$....)

Là aussi, des questions supplémentaires sont possibles, mais si vous disposez de peu de temps (par exemple le vendredi avec les classes), il est sans doute plus intéressant de passer à la suite qu'ajouter ces questions subsidiaires.

— *Que se passe-t-il si la boîte contient 22 chocolats ?*
— *Si on change la règle du jeu, autorisant chaque joueur à prendre 1,2,3 ou 4 chocolats ? Plus dur : 1,2,4 (mais pas 3) chocolats ?*
— *Question bonus plus difficile : si on autorise à enlever 1, 2 ou 4 chocolats (mais pas 3) ? On peut alors forcer que le nombre de chocolats reste constant modulo 3 (si 1 je joue 2, si 2 je joue 1, si 4 je joue 2). Il faut alors faire en sorte qu'il reste égal à 1 modulo 3 après notre coup. Par exemple pour 21 chocolats, c'est le joueur 1 qui a une stratégie gagnante en commençant par enlever 2 chocolats).*

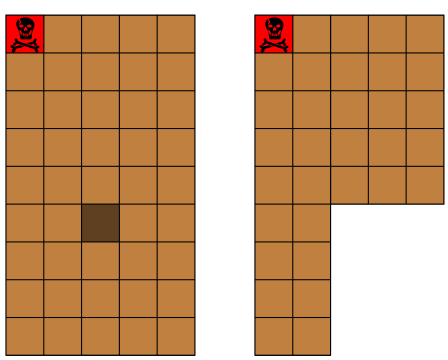
Jeu de la tablette de chocolat



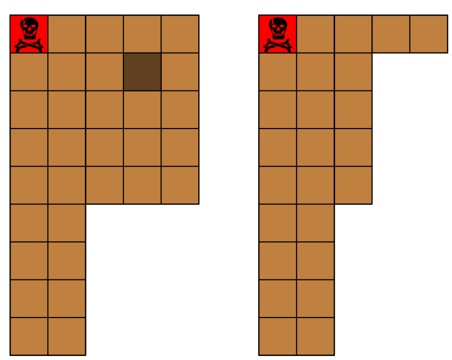
On dispose d'une tablette de chocolat, dont le carré en haut à gauche est empoisonné.

— Chacun leur tour, les deux joueurs désignent un carré de chocolat et mangent tous les carreaux dans le « quart bas-droite » délimité par ce carreau. Voici deux exemples.

coup n° 1 :



coup n° 2 :

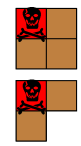


— Le joueur qui mange le carreau empoisonné a perdu.

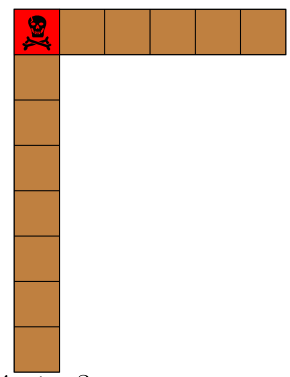
1. Jouez quelques parties en binômes avec une tablette 3x4. Qu'en pensez-vous ? *On ne voit pas apparaître si facilement de stratégie gagnante, cette fois... On peut remarquer qu'il vaut mieux éviter certains coup, comme laisser juste une ligne ou juste une colonne (qui permettent alors à l'autre joueur de tout prendre d'un coup sauf le carré empoisonné et vous laisser mourir au tour suivant).*

On va jouer avec une tablette plus petite pour essayer de trouver une stratégie gagnante.

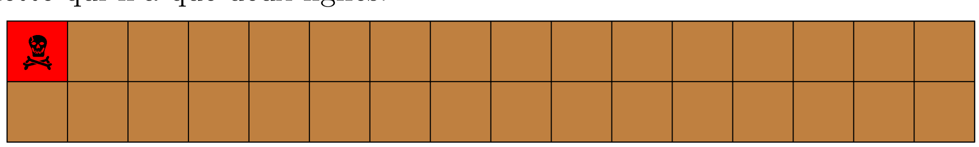
2. Commencez par la tablette 2x2 : lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante, et quelle est-elle ? *Le premier joueur a une stratégie gagnante : il peut commencer par prendre le carré en bas à droite. Quoi que fasse ensuite le deuxième joueur, le premier peut gagner.*



3. On joue maintenant avec une tablette bien entamée avec une seule ligne de 6 carreaux et une seule colonne de 8 carreaux.



   Le premier joueur a une stratégie gagnante, pouvez-vous la décrire ? *Le premier joueur enlève deux carreaux sur la colonne, en laissant 6. Le deuxième joueur joue nécessairement un coup qui « déséquilibre » le nombre de carrés sur la ligne et sur la colonne. Le premier joueur peut décider de les équilibrer etc. C'est alors le deuxième joueur qui prend le carré empoisonné.*
4. On joue maintenant avec une tablette carrée (avec strictement plus d'un carreau !). Voyez-vous la stratégie gagnante pour le premier joueur ? *Le premier joueur peut jouer juste en bas à droite du carré empoisonné, laissant alors une tablette avec une ligne et une colonne au deuxième joueur avec le même nombre de carrés. Ensuite, c'est comme dans la question précédente : le joueur 2 est obligé de déséquilibrer ligne et colonne, le joueur 1 peut toujours les équilibrer.*
5. Essayez de décrire la stratégie gagnante du premier joueur dans le cas d'une tablette qui n'a que deux lignes.



En fait, on peut démontrer (et ce n'est pas très difficile, il nous faudrait juste un peu plus de temps !) que quel que soit le format $n \times m$ de la tablette de départ, le premier joueur a une stratégie gagnante.

C'est l'objet de la fiche bleue, lire la section suivante pour les détails !

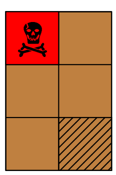
Mais cette démonstration théorique ne permet pas de décrire explicitement la stratégie gagnante, comme on a pu le faire ici dans quelques cas particuliers plus simples (tablette carrée, tablette à deux lignes). Nous en avons déterminé quelques unes à l'aide de l'ordinateur, pour des tablettes pas trop grandes ; essayez notre programme ! Que se passe-t-il si vous jouez contre l'ordinateur et que vous jouez un coup qui ne fait pas partie d'une stratégie gagnante ?

Comme l'ordinateur est programmé pour suivre une stratégie gagnante, dès que vous faites une « erreur » (un coup qui n'est pas gagnant), c'est l'ordinateur qui a une stratégie gagnante, et comme il va la suivre vous ne pourrez plus gagner ! Comme dans le jeu du début avec la boîte de chocolat : si celui qui dispose d'une stratégie gagnante fait une erreur, il offre la stratégie gagnante à l'autre...

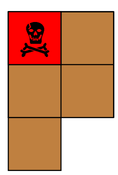
3 Fiche bleue

On appelle *position* une configuration de jeu, et on dit qu'elle est *gagnante* si le joueur dont c'est le tour possède une stratégie qui lui permet de gagner à coup sûr. On dit qu'une position est *perdante* si l'autre joueur possède une stratégie lui permettant de gagner à coup sûr.

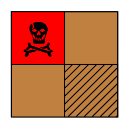
1. Déterminer quelles positions sont gagnantes et perdantes pour une tablette 2×3 en indiquant un coup gagnant si la position est gagnante. Un des deux joueurs a-t-il une stratégie gagnante ? Remarquez que toutes ces positions sont soit perdantes, soit gagnantes.



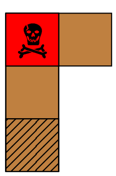
nº 1 : G



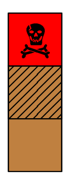
nº 2 : P



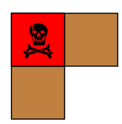
nº 3 : G



nº 4 : G



nº 5 : G



nº 6 : P

nº 7 : G

nº 8 : G

nº 9 : P

On raisonne en partant de la fin du jeu. La configuration n^o 9 est perdante (P). Celles avec seulement 2 carrés sont gagnantes (G). La configuration n^o 6 est perdante (voir question précédente). La n^o 5 est gagnante parce qu'on peut ne laisser que le carré empoisonné. La n^o 4 est gagnante parce qu'on peut, en ne prenant qu'un carré, laisser l'adversaire dans la position n^o 6 perdante. La n^o 3 est gagnante (voir question précédente). La position n^o 2 est perdante : quoi qu'on fasse, on laisse l'autre joueur avec une position gagnante (3,4,5 ou 8). La n^o 1 est gagnante : en enlevant le carré en bas à droite on laisse l'autre dans la position n^o 2 perdante.

Les coups gagnants sont hachurés sur la figure.

2. On veut analyser une position donnée, pour une tablette de départ $n \times m$ quelconque.
   (a) Expliquer pourquoi si tous les coups possibles mènent à des positions gagnantes, la position est perdante.

   Si tous les coups possibles mènent à des positions gagnantes, alors quoi qu'on fasse on laisse l'autre joueur avec une stratégie gagnante. C'est donc qu'on était dans une position perdante.

   (b) Expliquer pourquoi si (au moins) un des coups mène à une position perdante, la position est gagnante.

   Si un des coups mène à une position perdante, alors on peut décider de joueur un tel coup et cela place l'autre joueur dans une position perdante. On a donc une stratégie gagnante, la position était gagnante.

3. En utilisant l'*arbre du jeu* (voir l'exemple en annexe), en déduire par récurrence que toutes les positions sont gagnantes ou perdantes, quelle que soit la taille de la tablette de départ.

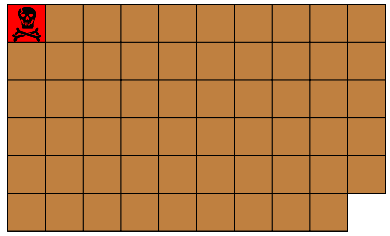
   Racine de l'arbre = état de départ du jeu. Ensuite, on représente tous les premiers coups possibles du joueur 1 par des arcs partant de la racine et arrivant à un sommet qui représente l'état du jeu après ce coup du joueur 1. En partant de chaque sommet, on représente tous les coups que pourrait alors jouer le joueur 2 etc. Les feuilles sont les fins du jeu. On veut étiqueter les sommets G (gagnant) ou P (perdant).

   Comme dans la question 1, on part de la fin et on remonte dans l'arbre. On sait étiqueter les feuilles. On procède ensuite par récurrence pour montrer qu'on peut étiqueter tous les sommets : si tous les fils d'un sommet sont G, notre sommet peut être étiqueté G ; si au moins un des fils est P, notre sommet est G (d'après la question précédente).

4. En déduire qu'au début du jeu, un des deux joueurs a nécessairement une stratégie gagnante.

   On a aussi pu étiqueter la racine de l'arbre.

5. On suppose par l'absurde que c'est le deuxième joueur qui a une stratégie gagnante. Le premier joueur décide de commencer par le carreau tout en bas à droite.

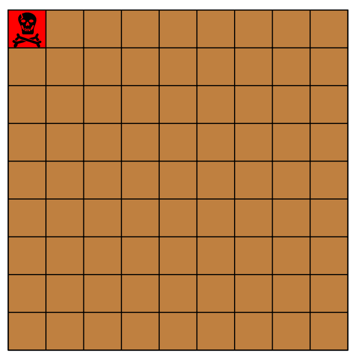


Montrer que le deuxième joueur joue alors forcément un coup perdant ! Que concluez-vous ?

Le deuxième joueur joue un coup, qui aurait pu être joué dès le départ par le premier joueur ! Or le premier joueur ne disposait pas hypothèse que de coups perdants, donc le deuxième joueur joue un coup perdant. On aboutit à une contradiction, car le deuxième joueur est supposé avoir une stratégie gagnante, donc être capable de répondre un coup gagnant à tout coup du premier joueur.

Conclusion : c'est toujours le joueur 1 qui a une stratégie gagnante. On appelle ce joli argument « vol de stratégie ».

6. *On joue maintenant avec une tablette carrée (avec strictement plus d'un carreau !). Voyez-vous la stratégie gagnante pour le premier joueur ? Voir la fiche orange !*



On ne sait pas donner des règles simples pour suivre des stratégies gagnantes en général même si on sait qu'elles existent et que pour une taille de tablette raisonnable, l'ordinateur peut les calculer. Essayez de jouer contre l'ordinateur avec notre programme ! Que se passe-t-il si à un moment du jeu vous jouez un coup non gagnant ?

Comme l'ordinateur est programmé pour suivre une stratégie gagnante, dès que vous faites une « erreur » (un coup qui n'est pas gagnant), c'est l'ordinateur qui a une stratégie gagnante, et comme il va la suivre vous ne pourrez plus gagner ! Comme dans le jeu du début avec la boîte de chocolat : si celui qui dispose d'une stratégie gagnante fait une erreur, il offre la stratégie gagnante à l'autre…

4 Un peu plus sur les jeux finis

On s'intéresse aux jeux finis, c'est-à-dire aux jeux à deux joueurs où il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que au bout de au plus N tours, l'un des deux joueurs aura gagné. On peut les modéliser ainsi : on a un ensemble A (ensemble des coups possibles), et on définit un jeu sur A de longueur N comme la donnée d'un ensemble J non vide de suites finies d'éléments de A de longueur au plus N tel qu'aucun élément de J ne soit le préfixe d'un autre élément de J (J comme l'ensemble non vide des parties terminées possibles) et d'un sous-ensemble V de J (l'ensemble des parties remportées par le joueur 1). Une position (légale) est une suite finie qui est le préfixe d'un élément de J.

Par exemple, pour le jeu de la tablette dans la fiche jaune, $N = 21$, et J est l'ensemble des suites finies d'éléments de $\{1, 2, 3\}$ de somme 21, et V est le sous-ensemble des suites dans J de longueur paire (le joueur 1 gagne si c'est le joueur 2 qui a joué en dernier). Pour le jeu de la tablette, c'est déjà plus pénible à écrire proprement mais on voit qu'on est bien dans ce cadre avec N le nombre de cases.

On peut voir que dans ces jeux, l'un des deux joueurs a toujours une stratégie gagnante :

- On peut montrer par induction qu'une position (un préfixe de J) est soit gagnante soit perdante (pour le joueur qui va jouer), l'induction se faisant sur le nombre d'étapes maximal avant que la partie finisse (c'est donc essentiellement la même preuve que celle qui est présentée dans la fiche bleue).
- Une manière plus visuelle d'expliquer la preuve précédente est de faire un arbre de tous les coups possibles à partir du début, et remonter depuis les feuilles de l'arbre pour savoir si chaque position est gagnante ou perdante. Plus précisément, on étiquette les feuilles, qui représentent les états finaux du jeu par 1 si le joueur 1 a gagné, 2 si le joueur 2 a gagné. Ensuite, pour étiqueter un sommet si tous ses fils sont étiquetés :
  - si c'est au joueur 1 de jouer :
    - si tous les fils sont étiquetés 2, quoi que fasse le joueur 1, il amène le jeu dans un état où l'autre joueur a une stratégie gagnante. $\rightarrow$ 2.
    - sinon, au moins un des fils est étiqueté 1. En jouant un tel coup, le joueur 1 amène le jeu à un état où il a une stratégie gagnante. $\rightarrow$ 1.
  - si c'est au joueur 2 de jouer :
    - si tous les fils sont étiquetés 1, quoi que fasse le joueur 2, il amène le jeu dans un état où l'autre joueur a une stratégie gagnante. $\rightarrow$ 1.
    - sinon, au moins un des fils est étiqueté 2. En jouant un tel coup, le joueur 2 amène le jeu à un état où il a une stratégie gagnante. $\rightarrow$ 2.
- Une manière différente de prouver ça est d'utiliser le principe tiers-exclu et de modifier un peu le formalisme. On va ajouter à A un symbole † qui signifie que le joueur ne fait rien (ce qui n'arrive qu'une fois la partie finie) et remplacer J par un ensemble $\tilde{J}$ où on ajoute à toutes les suites dans J de longueur $k < N$ un suffixe formé de $N - k$ fois le symbole †. On fait la même chose pour V ce qui nous donne un ensemble $\tilde{V}$. On obtient le même jeu que tout à l'heure mais maintenant les parties sont toutes de longueur N. Mettons que N soit pair pour simplifier la notation.

  Alors dire que le joueur I a une stratégie gagnante, c'est dire qu'il existe un coup

légal a_1 tel que pour tout coup légal a_2, il existe un coup légal a_3 tel que pour tout coup légal a_4,..., tel que pour tout coup légal a_N, la suite $(a_1, a_2, ..., a_N)$ est dans V.
La négation de la phrase précédente est : pour tout coup légal a_1, il existe un coup légal a_2 tel que pour tout coup légal a_3 il existe un coup légal a_4..., il existe un coup légal a_N tel que la suite $(a_1, a_2, ..., a_N)$ n'est pas dans V. Ceci veut précisément dire que le joueur II a une stratégie gagnante ! Ainsi d'après le principe du tiers-exclu, l'un des deux joueurs a forcément une stratégie gagnante.

Dans le jeu de la tablette, l'argument de vol de stratégie exposé dans la fiche bleue permet de dire que le joueur I a une stratégie gagnante. Le même type d'argument s'applique au jeu de hex.

Le jeux d'échec ne rentre pas tout à fait dans ce cadre puisqu'il y a les cas de pat, mais c'est tout de même un jeu fini à cause de la règle qui dit que si on observe la même position sur l'échiquier trois fois, la partie est pat. Ça permet de montrer avec les mêmes arguments que précédemment que l'un des deux joueurs a une stratégie non perdante (qui le mène soit à pat soit à une victoire). On ne sait bien sûr pas lequel possède cette stratégie non perdante, ni si elle est en fait gagnante ! On observe cependant que le joueur qui commence (le blanc) gagne plus souvent...

On peut aussi regarder les jeux infinis, où J et V deviennent des sous-ensembles de $A^{\mathbb{N}}$, et où on demande que J soit fermé. Sous l'axiome du choix, on sait alors montrer qu'il existe des jeux sur $A = \{0, 1\}$ ou aucun des deux joueurs n'a une stratégie gagnante. On sait aussi que si A est dénombrable, et si V est un borélien, alors un des deux joueurs a une stratégie gagnante (on parle de jeu déterminé). Ce théorème dû a Martin a d'innombrables applications en théorie descriptive des ensembles. Un des sujets d'étude en théorie des ensembles est l'axiome de détermination, qui dit que si A est dénombrable, tout jeu sur A est déterminé. Un tel axiome contredit clairement l'axiome du choix, mais on ne sait pas s'il est compatible avec les autres axiomes de la théorie des ensembles. Il a cependant plein de conséquences sympathiques, comme le fait que tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ deviennent mesurables au sens de Lebesgue et au sens de Baire.